4
A185
93273
Smith
115

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NÚMS. 1, 2 Y 3.
JULIO, AGOSTO Y SEPTIEMBRE
DE 1912.

Smithsonian Institution
FEB 1926
271374
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ART. 117 DE LOS ESTATUTOS DE LA ACADEMIA

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1912

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ACADÉMICOS DE NÚMERO

Excmo. Sr. D. José Echegaray, *Presidente.*
Zurbano, 56.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo, *Vicepresidente.*
Fuentes, 9.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.
Velázquez, 16.

Excmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario.*
Orellana, 10.

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario.*
Valverde, 26.

Excmo. Sr. D. Julián Calleja y Sánchez, Conde de Calleja, *Tesorero.*
Argensola, 6.

Ilmo. Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé, *Contador.*
Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez.
Carrera de San Jerónimo, 53.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro-Reverter.
Barquillo, 15.

Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.
Atocha, 118.

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.
Alfonso XII, 72.

Ilmo. Sr. D. Pedro Palacios.
Monte Esquinza, 9.

Sr. D. Blas Lázaro é Ibiza.
Palafox, 19.

Excmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo.
Quintana, 38.

Excmo. Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo.
Válgame Dios, 3.

Sr. D. José María de Madariaga, *Vicesecretario.*
Zurbano, 18.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Mourelo.
Piamonte, 14.
Excmo. Sr. D. José Marvá y Mayer.
Plaza de Santa Catalina de los Donados, 3.
Ilmo. Sr. D. Rafael Sánchez Lozano.
Génova, 17.
Sr. D. José Gómez Ocaña.
Atocha, 127 dupdo.
Sr. D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco.
Amnistía, 10.
Ilmo. Sr. D. Nicolás de Ugarte y Gutiérrez.
Cervantes, 2. — Alcalá de Henares.
Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández y Rodríguez.
Fuencarral, 51.
Ilmo. Sr. D. Vicente de Garcini.
Alarcón, 5.
Sr. D. Miguel Vegas.
Pez, 1 y 3.
Sr. D. Blas Cabrera.
Paseo de Martínez Campos, 1.
Sr. D. Enrique Hauser.
Zorrilla, 33.
Ilmo. Sr. D. Eduardo Mier y Miura.
Serrano, 29.

ACADÉMICOS ELECTOS

Ilmo. Sr. D. Ignacio Bolívar.
Paseo de Martínez Campos, 17.
Ilmo. Sr. D. Bernardo Mateo Sagasta.
Casa de Oficios.—Moncloa.
Ilmo. Sr. D. Pedro de Avila y Zumarán.
Travesía de la Ballesta, 8.
Sr. D. Ignacio González Martí.
Hernán Cortés, 7.
Sr. D. Eduardo León y Ortiz.
Fuencarral, 19 y 21.
Excmo. Sr. D. José Casares y Gil.
Plaza de Santa Catalina de los Donados, 2.
Sr. D. Luis Octavio de Toledo.
Pez, 36.
Sr. D. Augusto Krahe.
Moreto, 7.

La Academia está constituída en tres Secciones:

1.ª CIENCIAS EXACTAS.—Sres. Navarro-Reverter, *Presidente;* Vegas, *Secretario;* Arrillaga, Torroja, Torres Quevedo, Ventosa, Ugarte, Fernández y Rodríguez y Garcini.

2.ª CIENCIAS FÍSICAS.— Sres. Carracido, *Presidente;* Mourelo, *Secretario;* Echegaray, Salvador, Muñoz del Castillo, Madariaga, Marvá, Cabrera, Hauser y Mier.

3.ª CIENCIAS NATURALES.—Sres. Hidalgo, *Presidente;* Gómez Ocaña, *Secretario;* Cortázar, Calleja, Mallada, Cajal, Palacios, Lázaro y Sánchez Lozano.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES NACIONALES

Sr. D. Andrés Poey. *París.*
Sr. D. Eduardo Boscá y Casanoves. *Valencia.*
Ilmo. Sr. D. Luis Mariano Vidal. *Barcelona.*
Excmo. Sr. D. Leopoldo Martínez Reguera. *Madrid.*
Excmo. Sr. D. Rogelio de Inchaurrandieta. *Madrid.*
Sr. D. Ramón de Manjarrés y de Bofarull. *Sevilla.*
Excmo. Sr. D. Modesto Domínguez Hervella. *Madrid.*
Ilmo. Sr. D. Ricardo Vázquez-Illá y Martínez. *Valladolid.*
Sr. D. Zoel García de Galdeano. *Zaragoza.*
Sr. D. Eduardo J. Navarro. *Málaga.*
Ilmo. Sr. D. José María Escribano y Pérez. *Murcia.*
Sr. D. Lauro Clariana y Ricart. *Barcelona.*
Excmo. Sr. D. Rafael Breñosa y Tejada. *Segovia.*
Excmo. Sr. D. Joaquín María de Castellarnáu y Lleopart. *Segovia.*
Excmo. Sr. D. Juan Bautista Viniegra y Mendoza, Conde de Villamar, Capitán General de la Armada.
Sr. D. Juan Vilaró Díaz. *Habana.*
Excmo. Sr. D. Pablo Alzola y Minondo. *Bilbao.*
Excmo. Sr. D. Joaquín de Vargas y Aguirre. *Salamanca.*
Excmo. Sr. D. José J. Landerer. *Valencia.*
Sr. D. José Eugenio Ribera. *Madrid.*
Sr. D. Tomás Escriche y Mieg. *Barcelona.*

Sr. D. Eugenio Mascareñas. *Barcelona.*
Sr. D. Bernabé Dorronsoro. *Granada.*
Sr. D. Esteban Terradas. *Barcelona.*
Sr. D. Ventura Reyes Prosper. *Toledo.*

ACADÉMICOS CORRESPONSALES EXTRANJEROS

Angüiano (A.). *Méjico.*
Lemoine (V.). *Reims* (?).
Collignon (E.). *París.*
Barrois (Ch.). *Lille.*
Hoonholtz, Barón de Teffé (A. L. de). *Río de Janeiro* (?).
Gomes Teixeira (F.). *Porto.*
Príncipe de Mónaco (S. A. el). *Mónaco.*
Choffat (P.). *Lisboa.*
Arata (P. N.). *Buenos Aires.*
Carvallo (M.). *París.*
Eneström (G.). *Estocolmo.*
Ferreira da Silva (A. J.). *Porto.*
Pina Vidal (A. A. de). *Lisboa.*
Brocard (H.). *Bar-le-Duc.*
Ocagne (M. d'). *París.*
Romiti (G.). *Pisa.*
Wettstein Ritter von Westersheim (R.). *Viena.*
Engler (A.). *Berlín.*
Guedes de Queiróz, Conde de Foz (G.). *Lisboa.*
Rayleigh (Lord). *Salisbury.*
Arrhenius. (S.). *Estocolmo.*
Ramsay (G.). *Londres.*
Castanheira das Neves (J.). *Lisboa.*
Pilsbry (E.). *Filadelfia.*
Porter (C. E.). *Santiago de Chile.*
Herrero Ducloux (E.). *La Plata (República Argentina).*
Chervin (A.). *París.*
Urbain (G.). *París.*
Moureu (C.). *París.*

Sarasin (E.). *Ginebra.*
Guye (F. A.). *Ginebra.*
Guimarâes (R.). *Lisboa.*
Capellini (J.). *Bolonia.*
Academia Mejicana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Méjico.*

I.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimaséptima.

SEÑORES:

Mucho nos hemos detenido en el problema de Dirichlet, y aun así, sólo hemos expuesto lo más elemental.

Nada hemos dicho del método de Mr. Poincaré, que el ilustre autor titula «Método del balayage» (del barrido).

Nada tampoco del método de Neumann.

Nada, por últimó, de la ecuación de Ferdholm ni del sistema de resolución de este autor. Ni hemos tenido tampoco tiempo para exponer varios teoremas preparatorios de todos estos métodos.

Pero el curso casi termina y será preciso dejarlos para más adelante, dado que por acaso les llegue su turno.

El tiempo nos falta y podremos darnos por contentos, si en las conferencias que nos restan logramos presentar algunos ejemplos de que hemos de hacer uso más adelante, relativos á la teoría de la potencial.

Empecemos por los ejemplos más elementales.

***

Potencial de una superficie esférica homogénea.—Seguiremos en esta parte de nuestras conferencias, frecuentemente,

la marcha y los métodos de Mr. Poincaré, aunque en rigor no son más que la aplicación inmediata de los métodos ya explicados.

Basta aplicar la fórmula general de la potencial y efectuar después las integrales.

Un método sólo difiere de otro en los procedimientos de simplificación del método general.

Sea una esfera $A\,a\,B\,a'$ (fig. 58). La superficie esférica está cargada de materia atrayente, homogénea.

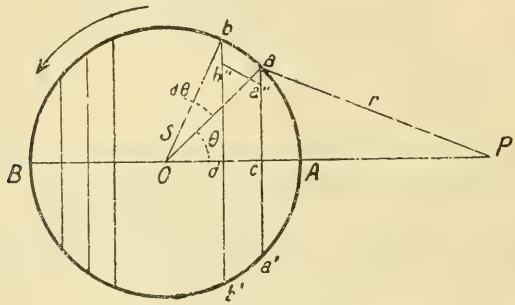


Figura 58.

Se trata, pues, de determinar la potencial de esta superficie ponderable, y pueden presentarse tres casos.

Que el punto sea exterior á la superficie esférica, que sea interior ó que esté sobre la misma superficie.

Primer caso.—Punto exterior. Supongamos que P sea el punto exterior, para el cual queremos determinar la potencial de la superficie esférica.

No habrá más que descomponer la esfera en elementos materiales, dividir cada uno de ellos por la distancia de su centro de gravedad al punto P y efectuar la integral de todos estos cocientes para toda la superficie esférica.

Suponemos que el plano del papel es un plano que pasa por el diámetro BA, es decir, por la recta BAP, y que la circunferencia que está representada es la intersección de la superficie esférica con dicho plano.

Para dividir la superficie de la esfera en elementos infinitamente pequeños, la dividiremos en zonas $ab\ b'\ a'$ por planos perpendiculares á la recta $B\,P$, de modo que $a\ a'$ representa uno de estos planos y $b\ b'$ otro plano infinitamente próximo al anterior.

Tomemos una de estas zonas, la ya indicada, y lo que de ella digamos, podremos decir de otra cualquiera.

Descompongamos esta zona en cuadriláteros infinitamente pequeños $a\ b\ a''\ b''$, tomando para la división, por ejemplo, planos meridianos que pasen por el diámetro $A\,B$.

Si la densidad es uniforme y la representamos por μ, este cuadrilátero, cuya superficial podremos designar por $d\omega'$, contendrá una masa $\mu d\omega'$ y la potencial de dicho elemento para el punto P, siendo r la distancia aP, será

$$\frac{\mu\, d\,\omega'}{r}.$$

Basta sumar todas las expresiones análogas á la anterior en toda la superficie esférica, para tener la potencial de ésta respecto al punto P.

Llamando U á dicha potencial, tendremos

$$U = \int\int_S \frac{\mu\, d\,\omega'}{r}.$$

La integral es doble, como debe ser.

Una primera integración consistirá en sumar todos los términos de la integral correspondientes á la zona $a\ b\ b'\ a'$.

De este modo tendremos la potencial de la zona en el punto P.

La segunda integración consistirá en sumar las potenciales de todas las zonas en que hemos dividido la superficie esférica.

Todo esto no puede ser más elemental.

En la primera integración de las dos indicadas, la distan-

cia r queda constante, porque las distancias del punto P á los puntos medios de la zona son constantes; son, por decirlo así, generatrices de un cono de revolución. Luego la primera integral podemos obtenerla de este modo

$$\int \frac{\mu\, d\omega'}{r} = \frac{\mu}{r} \int d\omega'.$$

La integral de $d\omega'$ es la suma de todos los cruadriláteros $a\ b\ a''\ b''$, suma que constituye el área de la zona. Llamándola para abreviar $d\omega$, el resultado de la primera integración será

$$\frac{\mu}{r}\, d\omega,$$

advirtiendo que $d\omega'$ era un área infinitamente pequeña de segundo orden, por ejemplo, porque era el área del cuadrilátero elemental, y $d\omega$ es un infinitamente pequeño de primer orden, porque es el área de la zona.

Tendremos, pues,

$$U = \int \frac{\mu}{r}\, d\omega.$$

Y si para abreviar la escritura suponemos la densidad $\mu = 1$, lo cual poco importa, porque al final de los cálculos podemos establecer este factor constante, tendremos

$$U = \int \frac{d\omega}{r};$$

$d\omega$ hemos dicho que es el área de la zona, pero se sabe por geometría elemental, que el área de una zona $a\ b\ a'\ b'$ es igual al producto de la circunferencia de la esfera por la altura $c\ d$ de la zona. Es decir, que resultará, llamando ρ al radio de la esfera,

$$d\omega = 2\pi\rho \cdot \overline{cd}$$

y el valor de U tomará la forma

$$U = \int \frac{2\pi\rho \cdot cd}{r}.$$

Bajo esta integral aparecen dos variables: una es r, la otra es el elemento diferencial $c\ d$.

Como para la integración es preciso que no quede más que una variable, que sea la que determine la zona de que se trata, tomaremos para dicha variable el ángulo que forma $O\ a$ con la recta $O\ P$, ángulo que designaremos por θ.

Y, en efecto, el ángulo θ fija el punto a: dándole á θ el incremento infinitamente pequeño $d\theta$, queda determinado el punto b, y determinados los puntos a y b, queda determinada la zona y la distancia $c\ d$.

Además, una vez fijo el punto a queda determinada asimismo la recta r.

En una palabra: r y $c\ d$ son funciones de θ, y hay que eliminarlas de la integral, para que no aparezca bajo el signo de integración más que la variable independiente θ.

Además, resultarán en función de θ los límites de la integración, porque el radio $0A$ al pasar á la posición extrema $0B$, habrá recorrido una semicircunferencia π, luego los límites de la siguiente integración serán 0 y π.

Expresemos ahora $c\ d$ y r en función de θ.

Se tiene evidentemente

$$Oc = Oa \cdot \cos aOA$$

es decir,

$$Oc = \rho \cos \theta.$$

Y asimismo

$$Od = \rho \cos (\theta + d\theta).$$

Como suponemos que el radio $0A$ se mueve en el sentido

de la flecha, el ángulo $a\ 0\ A$ será positivo; de modo que será positiva $d\theta$, y para que á este valor positivo del incremento $d\theta$ corresponda un valor también positivo de la faja $ab\ a'b'$, consideraremos á $c\ d$ como incremento de la variable $A\ c$, y tendremos:

$$Ac = OA - Oc = \rho - \rho \cos \theta = \rho (1 - \cos \theta)$$

y asimismo

$$Ad = OA - Od = \rho (1 - \cos (\theta + d\theta))$$

de donde

$$cd = Ad - Ac = - \rho \cos (\theta + d\theta) + \rho \cos \theta$$

y por fin,

$$cd = \rho \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta.$$

Sustituyendo este valor en el de U, resultará

$$U = \int_0^\pi \frac{2\pi \rho^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta}{r}.$$

Sólo falta expresar r en función de θ; pero del triángulo $OP\,a$ se deduce, haciendo á $OP = l$,

$$r^2 = \rho^2 + l^2 - 2\rho\, l \cos \theta.$$

Y con esto podríamos terminar el problema, porque sustituyendo este valor de r en la integral, tendríamos

$$U = \int_0^\pi 2\pi \rho^2 \frac{\operatorname{sen} \theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho\, l \cos \theta}}$$

expresión que se integra sin dificultad de ningún género, porque se tiene

$$U = 2\pi \rho^2 \int_0^\pi (\rho^2 + l^2 - 2\rho\, l \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \cdot - d \cos$$

que entra en el tipo general $x^m dx$, haciendo

$$\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\theta = x.$$

Mr. Poincaré, en este problema verdaderamente elemental, sigue otro procedimiento, por lo menos tan sencillo como el anterior, que consiste en sustituir á la variable θ la variable r.

En efecto, diferenciando con relación á r y θ la ecuación

$$r^2 = \rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\theta$$

tendremos

$$r dr = + \rho l \operatorname{sen}\theta d\theta$$

y sustituyendo ρ sen $\theta d\theta$ en U, resulta:

$$U = \int_{PA}^{PB} 2\pi\rho \frac{rdr}{rl}$$

ó bien

$$U = \int_{PA}^{PB} \frac{2\pi\rho}{l} dr.$$

Como hemos cambiado de variable, tenemos que cambiar de límites, y como á $\theta = o$ y $\theta = \pi$ corresponde evidentemente, para r, PA y PB, estos son los que hemos expresado en la nueva integral.

Pero la figura da desde luego

$$PA = l - \rho, \qquad PB = l + \rho,$$

luego

$$U = \int_{l-\rho}^{l+\rho} \frac{2\pi\rho}{l} dr = \frac{2\pi\rho}{l} \int_{l-\rho}^{l+\rho} dr =$$

$$= \frac{2\pi\rho}{l} (r)_{l-\rho}^{l+\rho} = \frac{2\pi\rho}{l} (l + \rho - l + \rho),$$

Y por fin,

$$U = \frac{4\pi\rho^2}{l}.$$

Este será el valor de la potencial de la esfera como superficie ponderable en cualqnier punto P, definido por l, y en el caso en que la densidad sea igual á 1.

En el caso que la densidad sea μ, la potencial será evidentemente

$$U = \frac{4\pi\rho^2\mu}{l}.$$

Ahora bien, el numerador, que es el producto de la superficie de la esfera por la densidad, será evidentemente la masa de la hoja esférica ponderable, que consideramos, por la densidad μ, de suerte que será la masa de la superficie esférica, y llamándola M resulta

$$U = \frac{M}{l}.$$

Luego, en general, la potencial de una superficie esférica ponderable y homogénea para cualquier punto exterior, es igual á la masa dividida por la distancia del centro al punto, que es exactamente lo mismo *que si toda la masa ponderable se hubiera reconcentrado en el centro.*

En efecto, la potencial en P de un punto O de masa M, siendo la distancia $OP = l$, es como antes $\frac{M}{l}$.

***

Segundo caso.—Punto interior. Con igual facilidad se obtiene (fig. 60) la potencial de una capa esférica homogénea sobre un punto P del interior.

En efecto, los cálculos son idénticos á los que hemos desarrollado para el primer caso; lo único que varían son los límites PA y PB de la integración.

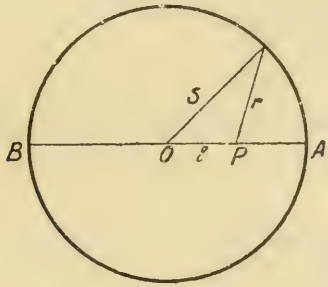


Figura 60.

La integral será ésta:

$$U = \frac{2\pi\rho}{l} \int_{\rho - l}^{\rho +} dr,$$

porque en la figura 60

$$PA = \rho - l, \qquad PB = \rho + l.$$

Ahora bien, efectuando la integración, resulta

$$U = \frac{2\pi\rho}{l} \left(r \right)_{\rho - l}^{\rho + l} = \frac{2\pi\rho}{l} (\rho + l - \rho + l)$$

y

$$U = 4\pi\rho.$$

Es decir, que la potencial en cualquier punto del interior tiene el mismo valor, que es el precedente, puesto que no depende de l.

Se obtiene una comprobación inmediata porque la poten-

cial en el centro, como todos los puntos de la esfera distan ρ de dicho centro, sería

$$\frac{4\pi\rho^2}{\rho} = 4\pi\rho$$

que es el valor precedente.

Tercer caso.—Si el punto está en la superficie, se observa que las dos fórmulas

$$U_e = \frac{4\pi\rho^2}{l} \quad \text{y} \quad U_i = 4\pi\rho,$$

dan el mismo resultado, porque haciendo $\rho = l$ en laprimera, resulta $U_e = 4\pi\rho$.

Este caso merecería estudiarse, pues parece que un elemento del integral es infinito, pero se observa que r desaparece del coeficiente diferencial.

***

Atracciones de una superficie esférica ponderable y homogénea para cualquier punto interior ó exterior.—Las atracciones ó pueden obtenerse directamente, y el problema es tan sencillo, que no ofrece dificultad de ningún género, ó pueden obtenerse tomando las derivadas de la potencial, que es lo que vamos á hacer.

Si la esfera ocupase una posición cualquiera en el espacio (fig. 61), la potencial que hemos obtenido para el punto P, cuyas coordenadas representaremos por x, y, z, siendo a, b, c las del centro O, sería,

$$U = \frac{M}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

y no habría más que diferenciar con relación á x, y, z.

Las componentes de la atracción de la superficie esférica sobre P, serían, por lo tanto, suponiendo $f = 1$,

$$X = \frac{dU}{dx} = \frac{d\dfrac{M}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}}{dx}$$

$$Y = \frac{dU}{dy} = \frac{d\dfrac{M}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}}{dy}$$

$$Z = \frac{dU}{dz} = \frac{d\dfrac{M}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}}{dz}$$

Son, pues, tres diferenciaciones que no ofrecen dificultad.

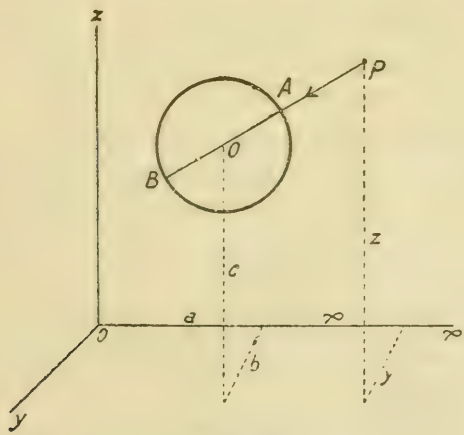


Figura 61.

Pero el caso de que se trata es tan sencillo, que todo esto puede simplificarse; porque la simetría de la figura demuestra que la atracción de la superficie esférica homogénea sobre el punto P sigue la dirección PO, de modo que si la

línea OP, suponemos que coincide con el eje de las x, en cuyo caso x estará representada por r, no habrá más que diferenciar la potencial $\frac{M}{r}$, por relación á r, y así obtendremos la única componente, que es la de la línea OP: las otras dos serían iguales á cero.

Resulta

$$\text{Atracción} = \frac{d\,\frac{M}{r}}{dr} = -\frac{M}{r^2};$$

lo cual es vidente, porque es la atracción de una masa M sobre un punto P en que suponemos una masa igual á la unidad y en que la distancia de ambos puntos es r.

Y no debe extrañarnos tampoco el signo —, porque si suponemos que OP es el eje de las x, la atracción irá de P á O sobre este eje, y deberá tener signo negativo.

Esto es respecto á la atracción en un punto exterior.

Veamos cuál es el valor de las componentes de esta atracción en un punto interior, tal como P (fig. 60).

En rigor, este problema ya lo hemos resuelto en las conferencias de otro curso, porque vimos que la acción de una capa esférica infinitamente estrecha de materia homogénea atractiva ó repulsiva era nula en el interior de la esfera, y ahora vemos que se comprueba este resultado.

Porque acabamos de demostrar, que en el interior la potencial es constante, y si la potencial es constante, sus derivadas son nulas.

Podemos hacer el resumen de estos resultados.

***

Sea AB (fig. 62) una capa esférica infinitamente estrecha, ó si se quiere, una superficie cargada de materia ponderable.

Consideremos un radio Or de esta esfera. Para cada

punto de este radio la potencial de la esfera tendrá un valor distinto, y esta serie de valores para el radio OA prolongado se repetirá, por razón de simetría, para todas las rectas que parten del centro de la esfera.

Lo que digamos, pues, de la recta OAr, queda dicho para todas las demás.

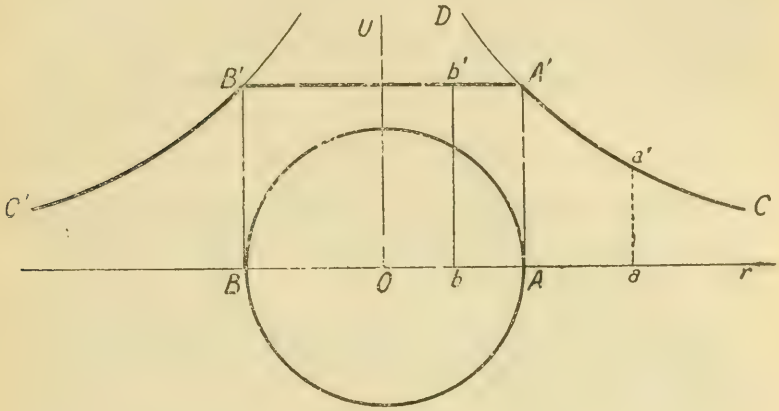


Figura 62.

Para un punto a del exterior, hemos visto que la potencial U está dada por la fórmula

$$U = \frac{M}{r}$$

Hagamos pasar por la recta Or un plano, que supondremos que es el de dicha figura 62, y en este plano consideremos dos ejes rectangulares. El uno Or que será el de las distancias del punto que se considere sobre dicho eje al centro de la esfera. El otro OU en que se medirán los valores de la potencial.

Por ejemplo: sobre $a\,a'$ tomaremos la potencial que corresponde á a. Sobre $b\,b'$ tomaremos la potencial que corresponde al punto interior b.

La ecuación que determina la potencial U de un punto exterior a, á saber $U = \frac{M}{r}$, nos da

$$U \cdot r = M$$

que será evidentemente la ecuación de la curva $A'\ C$ cuyas ordenadas $a\ a'$ representarán los valores de U correspondientes á los valores Oa de r.

Dicha ecuación podrá escribirse, pues, de este modo

$$aa' \times Oa = M.$$

Y esta es la ecuación de una hipérbola equilátera referida á sus asíntotas, siendo estas asíntotas los ejes de la r y de la U, y cuya constante es M.

Desde el punto A hasta el infinito positivo, la porción de la hipérbola $A'C$ determina la potencial para todos los puntos exteriores de la recta Or.

Y aquí veremos que, como debía ser, U se reduce á cero en el infinito.

La última ordenada útil de esta hipérbola es AA', que determina la potencial en A.

Como hemos visto, que siendo ρ el radio de la esfera y μ la densidad de la materia ponderable, la constante M de la ecuación de la hipérbola era $4\pi\rho^2\mu$, es evidente que la ordenada AA' se obtendrá haciendo $r = OA = \rho$ en la ecuación de dicha hipérbola; y tendremos para el punto A

$$U = AA' = \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi\mu\rho^2}{\rho} = 4\pi\mu\rho.$$

Mas para puntos comprendidos entre A y B ya no sirve la ecuación de la hipérbola; toda la rama $A'D$ no marca ya la potencial para las abscisas interiores, por ejemplo, para Ob.

Porque hemos demostrado, que la potencial en el interior

de la esfera es constante y que precisamente su valor es $4\pi\mu\rho$ que coincide con AA'.

La línea que en el interior de la esfera corresponde en la figura al diámetro AB y para el radio Or representa la potencial de los puntos b, será la recta $A'B'$, paralela á AB, y á la distancia de $4\pi\mu\rho$.

Así vemos, que dada esta representación geométrica, la potencial para todos los puntos de la recta Or, y lo mismo diríamos para todas las rectas que pasan por el centro O, es una línea quebrada y discontinua. Se compone de dos arcos de hipérbola equilátera $A'C$, $B'C'$ y de una recta $A'B'$ que los une, constituyéndose una línea compleja con dos puntos, A', B' en que coinciden las ordenadas, pero no coinciden las tangentes de las dos partes.

De estos casos, como dijimos en otra ocasión, se presentan muchos en Física Matemática.

Y esta discontinuidad no debe extrañarnos, *corresponde á una discontinuidad en los datos del problema*: una superficie esférica ponderable en el espacio vacío es una verdadera discontinuidad física.

De todas maneras, deben fijarse mis alumnos en que la representación geométrica, que acabamos de explicar, es puramente convencional y se refiere á una recta aislada Or.

En realidad, la potencial está representada, no por una curva, sino por una función de tres variables, que es, como hemos dicho ya muchas veces, y poniendo en evidencia en $U = \frac{M}{r}$ las tres variables independientes, x, y, z, la expresión:

$$U = \frac{M}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

como escribíamos al citar la figura 61.

Lo que hay es, que las funciones de cuatro variables, por ejemplo, $U(x, y, z)$, siendo las tres últimas independientes, no tienen para nosotros, quiero decir en el espacio de tres dimensiones, una representación que hable á los sentidos, como no sea por el procedimiento indirecto de *superficies con cuotas determinadas*, análogas á la representación en un plano de una superficie por líneas de nivel acotadas.

Este caso se presenta siempre que á un punto del espacio corresponde una cantidad numérica, como, por ejemplo, una temperatura en cada punto, una densidad, una carga magnética; en una palabra, un elemento físico *intensivo* sin dirección. Porque si la tuviere, vendríamos á parar á los vectores, y aun hay casos más complicados, que tengo el propósito de estudiar en alguna otra ocasión, si á ella llegamos.

Si aplastásemos con el pensamiento la línea $C' B' A' C$ reduciendo sus ordenadas hasta que se confundiese con la recta Or, pero llevando en cada punto un número que expresase el valor de la ordenada primitiva, é hiciéramos lo mismo para todas las demás rectas que pasan por O, estas curvas discontinuas aplastadas, por decirlo de este modo, sobre las rectas que les corresponden, pero conservándose en un espacio de cuatro dimensiones, nos darían la sensasión, si pudiéramos tenerla, de la potencial de la superficie esférica en todo el espacio.

Para concluir, observaremos, que hemos obtenido la potencial en el punto A de dos maneras: como límite de las potenciales de los puntos interiores y como límite de las potenciales de los puntos exteriores, y siempre hemos obtenido el mismo valor $4\pi\mu\rho$. Ambos límites coinciden.

Y es bien fácil, por lo demás, repitiendo razonamientos de la figura 59, hallar directamente este valor.

Porque *no es evidente* que, aunque ambos valores límites coincidan, hayan de coincidir con la potencial de la superficie esférica en un punto A de ella misma.

Si alguna vez estudiamos las *funciones discontinuas*, podremos aclarar este punto.

*
* *

Lo que hemos dicho para la potencial de una superficie esférica ponderable y homogénea, podemos repetir para las atracciones.

Sea E (fig. 63) una superficie esférica sobre la cual se ha distribuído una capa de materia ponderable cuya densidad se representa por μ.

Hemos demostrado, que la atracción en cualquier punto

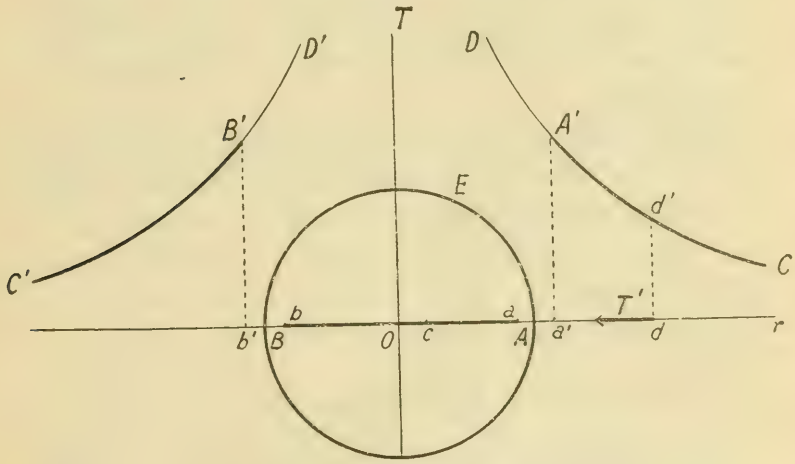


Figura 63.

interior de la esfera es nula, y que la atracción en un punto exterior, que diste del centro la magnitud r, será $\frac{M}{r}$, dado que el coeficiente f suponemos para abreviar que es *1;* claro es que si no lo fuera, la fórmula sería $f\frac{M}{r}$.

M representa la masa que puede considerarse reunida en el centro, y su valor es $4\pi\rho^2\mu$.

Haciendo pasar por una recta cualquiera Odr, que sea un radio prolongado, un plano que suponemos que coincide con el de la figura, podemos en este plano, como hemos hecho para las potenciales, obtener una línea cuyas ordenadas representen la atracción y cuyas abscisas sean la distancia del punto al centro.

Precisando aún más: OT será el eje de las atracciones, Or el eje de las distancias al centro, y la línea que buscamos, deberá dar por sus ordenadas, por ejemplo $d\,d'$, el valor de la atracción para el punto d.

Esta línea está ya perfectamente determinada: para el interior de la esfera será $a\,b$, coincidiendo con el eje de las r; sus ordenadas en cualquier punto c son nulas, y así debe ser, puesto que la atracción interior hemos demostrado que es también nula.

En el exterior, la línea de la atracción será la rama de curva $A'C$, cuya ecuación, según el valor que hemos hallado para la atracción T, es

$$T = f\frac{M}{r^2}$$

ó bien

$$T r^2 = f M = \text{constante.}$$

Esta relación entre T que es la ordenada, y r que es la abscisa, define una curva de marcha general análoga á la hipérbola.

De una hipérbola puede deducirse, en efecto, elevando al cuadrado las abscisas.

Pero no hemos de detenernos en estos pormenores.

Dicha curva $DA'C$ tiene por asíntota el eje de las r, de modo que T en el infinito llega descendiendo al valor cero.

Como debe ser, puesto que en el infinito la atracción T se anula.

De la curva definida por la ecuación anterior, y no tomando más que la parte de la derecha, sin contar, por el pronto, con la rama simétrica $B'C'$, podemos decir que no se aprovecha, para nuestro objeto, más que una parte: precisamente $A'C$. La prolongación $A'D$ que es asintótica del eje T, no tiene significación alguna en el problema que consideramos.

La línea de las atracciones para los diferentes puntos de la recta Or se compone de tres partes discontinuas, á saber: la rama $A'C$, la recta ab y la rama $B'C'$.

Podemos repetir todo lo que dijimos en la potencial respecto á la representación gráfica de las atracciones.

Es una representación convencional.

Las ordenadas de la curva, ó mejor dicho, de la línea discontinua, no tienen dirección en el espacio, son valores numéricos de algo intensivo, que corresponde á cada punto de la recta Or.

Sin embargo, este valor intensivo, este número, representa un vector, es decir, una magnitud con dirección, pero esta dirección no es la de la ordenada.

Más claro aún: tomemos el punto d del eje r. La ordenada dd' representa la intensidad de la atracción T' en d.

Esta atracción T' tiene la dirección y el sentido que marca la figura, y su intensidad es la que determina la ordenada dd'.

Así es que la atracción y la ordenada numéricamente son iguales

$$T' = d\,d'.$$

La curva que hemos representado no sirve más que para presentar ordenadas iguales á las atracciones para los puntos d.....; pero estas atracciones en su posición natural se confunden con la recta Or.

Otra diferencia debemos señalar entre este caso y el de la potencial, ó sea entre las figuras 63 y 62.

En el caso de la potencial (fig. 62), la línea representativa de las potenciales $C'B'A'C$ no presenta ninguna rotura ó discontinuidad de primer orden. La potencial interior y la exterior coinciden en los puntos A de la superficie y dan el mismo valor AA' para dicho punto A.

Verdad es que esta línea quebrada presenta una discontinuidad, que podemos llamar de segundo orden, y que se refiere á la derivada primera.

Así en el punto A' presenta un ángulo y tiene dos tangentes: la una, la recta $A'B'$ que es tangente de sí misma, y la otra, la tangente en A' á la rama $A'C$.

Y esto nos hace ya prever que la curva de las atracciones ha de presentar una discontinuidad por rotura, porque las derivadas en el punto A' para la recta $A'B'$ y para la curva $A'C$ tienen valores distintos. La primera es cero, la segunda es finita.

Y esto vemos precisamente en la figura 63.

Tomemos dos puntos a, a', infinitamente próximos al punto A de la superficie esférica: uno a interior, y otro a' exterior.

Para el primero la ordenada es cero y la atracción nula, como que salvo el valor f la atracción es la derivada de la recta $A'B'$ en la figura 62.

Para el punto A' la atracción es finita; es $a'A'$ cuyo valor numérico se obtiene, como se comprueba fácilmente, multiplicando la derivada en A de la figura 62 por f.

En efecto, hemos visto ya que en la figura 62

$$AA' = 4\pi\mu\rho.$$

Si queremos deducir la componente de la atracción paralela al radio, que en este caso es la atracción total, no tendremos más que diferenciar con relación á ρ y multiplicar por f, y así $a'A'$ en la figura 63 será

$$a'A' = f \cdot 4\pi\mu,$$

que es lo que se deduce de la fórmula general

$$T = f \frac{4 \pi \mu \rho^2}{r^2}$$

haciendo $r = OA = \rho$, puesto que el punto a' está infinitamente próximo al A.

Queda, en efecto,

$$T = f \cdot 4 \pi \mu$$

y

$$T = a' A'.$$

Pero lo que pasa en el punto A de la superficie esférica, es digno de estudio.

En la proximidad de este punto A conviene estudiar lo que sucede para los tres puntos a, A, a'. Primero, el mismo punto A; segundo, el punto a interior á medida que se aproxima á A; y tercero, el punto a' exterior á medida que se acerca también al punto A de la superficie esférica.

Si hubiera continuidad en la figura, estos tres puntos, al confundirse, deberían dar la misma atracción, y no es así; y es un ejemplo éste que nos demuestra lo delicadas que son estas cuestiones, y es uno de los casos en que la intuición modestamente debe ceder el paso á la lógica y á las demostraciones rigurosas del cálculo.

Y efectivamente, el punto a, al aproximarse indefinidamente al punto A, da un valor constante é igual á cero para la atracción; porque en todo punto interior la atracción es nula, por mucho que dicho punto se aproxime á la superficie de la esfera.

Siguiendo instintivamente la ley de continuidad, vendríamos á deducir que la atracción es nula en A.

Pero en vez de considerar el a, consideremos el punto a', para el cual la atracción está dada por la ordenada $a' A'$.

Y como la atracción en un punto exterior, por muy próximo que esté á la superficie esférica, está dada por la fórmula

$$T = f \frac{M}{(O\,a')^2}$$

ó bien poniendo por M su valor

$$T = f \frac{4\,\pi\,\rho^2\,\mu}{(O\,a')^2},$$

á medida que $O\,a'$ se aproxime á $OA = \rho$, el valor de la atracción se aproximará á

$$T = f \frac{4\,\pi\,\mu\,\rho^2}{\rho^2}$$

ó bien

$$T = f\,4\,\pi\,\mu.$$

Luego parece que éste será el valor de la atracción en el punto A.

Antes, cuando considerábamos al punto A como posición límite de a, la atracción en A parecía que era igual á cero.

Ahora, cuando consideramos al punto A como el límite del punto a', parece que la atracción tiene por valor

$$T = 4\,f\,\pi\,\mu.$$

¿Cuál de los dos es el verdadero?

Ninguno de los dos, porque corresponden al punto de rotura de la curva de atracciones. El uno corresponde á la recta Oa, el otro á la rama curvilínea $A'C$.

Y si ahora hacemos el cálculo directo de la atracción de la capa esférica sobre el punto A, obtendremos otro tercer valor.

Como el cálculo es sumamente sencillo, antes de concluir esta conferencia procuraremos resolver este tercer problema de la discontinuidad del punto A.

Sea $A\ a\ b\ B$ (fig. 64) la esfera de que se trata, ó si se quiere, la sección de dicha esfera por el plano de la figura, que es el del papel.

Llamaremos, como antes, ρ al radio de dicha superficie esférica. La consideramos cargada de materia ponderable,

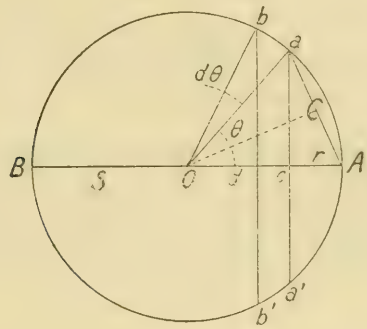


Figura 64.

en que la carga, por unidad de superficie, ó sea la densidad, la seguiremos representando por μ y nos proponemos hallar directamente la atracción de la expresada superficie esférica ponderable y homogénea sobre un punto cualquiera A de la misma.

La fuerza que deseamos calcular, en razón á la simetría de la figura, coincidirá con el diámetro $A\ B$ y su sentido, puesto que se trata de fuerzas atractivas, será hacia el interior: de A hacia O.

Pero esto importa poco para nuestro caso.

Consideraremos lo mismo que en la figura 59 en esta figura 64 dos planos $a\ a'$, $b\ b'$ perpendiculares al diámetro $A\ B$ y determinando una zona esférica infinitamente estrecha $a\ a'\ b'\ b$, en que todos los puntos estarán á la misma

distancia r (salvo errores infinitamente pequeños) del punto A.

Si un elemento de esta zona tiene la extensión $d\omega'$, su masa será $\mu d\omega'$, su atracción sobre A será (suponiendo $f = 1$)

$$\frac{\mu . d\omega'}{r^2}$$

y su componente, según $A\ O$, llamando α al ángulo $a\ A\ O$ tendrá el valor

$$\frac{\mu . d\omega'}{r^2} \cos \alpha.$$

Lo mismo podremos decir de otro elemento cualquiera de dicha zona esférica, y la suma de todas las componentes que corresponden á todos estos elementos, será evidentemente, puesto que r y α tienen el mismo valor para todos ellos,

$$\frac{\mu . \Sigma d\omega'}{r^2} \cos \alpha.$$

Es claro que $\Sigma d\omega'$ es la superficie total de la zona $aa'\ b'b$, cuyo valor sabemos, que es el producto de la circunferencia del radio ρ por la altura dc de dicha zona.

Tendremos, pues, que la componente total de la atracción producida por la zona sobre el punto A es

$$\frac{\mu \cdot 2\pi\rho \cdot cd}{r^2} \cos \alpha;$$

y la atracción total de la superficie esférica sobre el punto A, que será la suma de todas estas componentes, según $A\ O$, se obtendrá integrando la atracción de esta zona elemental desde el punto A hasta el punto B, que es integrar, tomando

á $\theta = a\ O\ A$ por variable independiente, desde cero á π.

Es decir:

$$\text{Atracción de la superficie esférica} = \int_0^{\pi} \frac{2\pi\rho\mu \cdot cd}{r^2} \cos\alpha.$$

Todo esto es repetir punto por punto, refiriéndolo á la atracción, lo que decíamos en la figura 59 respecto á la potencial; aunque lo mismo hubiéramos podido decir en dicha figura para el cálculo de la atracción sobre un punto exterior P, ó en la figura 60 para un punto interior.

De igual modo que entonces expresaremos $c\ d$ en función de θ, que es repetir aquel cálculo elemental, y así

$$Ad = OA - Od = \rho - \rho\cos(\theta + d\theta) = \rho(1 - \cos(\theta + d\theta),$$

$$Ac = OA - Oc = \rho - \rho\cos\theta = \rho(1 - \cos\theta),$$

$$Ad - Ac = cd = \rho(\cos\theta - \cos(\theta + d\theta), = \rho \operatorname{sen}\theta d\theta,$$

y por lo tanto:

$$\text{Atracción} = \int_0^{\pi} \frac{2\pi\rho^2\mu \operatorname{sen}\theta d\theta}{r^2} \cos\alpha,$$

que es una fórmula análoga á la que obtuvimos para la potencial, con estas diferencias: que allí entraba r en el denominador porque se trataba de una potencial, y aquí entra r^2 porque se trata de una fuerza, y aquí entra además $\cos\alpha$ porque hemos tenido que obtener las componentes de esta fuerza en la dirección de $A\ B$.

En la figura 64 se ve además, bajando la perpendicular $O\ C$á la recta $A\ a$, que

$$r = Aa = 2\,AC = 2\,OA\cos OAC = 2\,\rho\cos\alpha$$

y sustituyendo este valor de r en la fórmula de la atracción, resulta,

$$\text{Atracción} = \int_0^\pi \frac{2\pi\rho^2\,\mu\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}{4\,\rho^2\cos^2\alpha}\cos\alpha,$$

ó bien

$$\text{Atracción} = \int_0^\pi \frac{\pi\mu}{2}\,\frac{\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\cos\alpha}.$$

Pero en la misma figura se ve, que

$$\cos\alpha = \text{sen}\,AOC = \text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

y como se sabe que

$$\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},$$

tendremos,

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},$$

y sustituyendo este valor en la última integral, resultará:

$$\text{Atracción} = \int_0^\pi \frac{\pi\mu}{2}\,\frac{\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}$$

Pero

$$\text{sen}\,\theta\,d\theta = -d\cdot\cos\theta$$

luego

$$\text{Atracción} = -\int_0^\pi \frac{\pi\mu}{\sqrt{2}}\,\frac{d\cdot\cos\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}.$$

Si para efectuar la integración desde luego hacemos $\cos\theta = z$, en cuyo caso al límite cero corresponderá $z = 1$ y al límite π corresponderá $z = -1$, la última fórmula se convierte en esta sencillísima

$$\text{atracción} = -\int_{1}^{-1} \frac{\pi\mu}{\sqrt{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

O bien cambiando los límites y el signo y sacando la constante

$$\text{atracción} = \frac{\pi\mu}{\sqrt{2}} \int_{1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z}};$$

pero la cantidad que está bajo la integral es integrable inmediatamente, porque es la diferencial de $-\sqrt{1-z}$ con sólo introducir el factor 2 en el denominador. Luego tendremos por último,

$$\text{atracción} = \frac{2\pi\mu}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{1-z}\right)_{-1}^{+1},$$

que da,

$$\text{atracción} = \frac{2\pi\mu}{\sqrt{2}} \left(0 + \sqrt{2}\right)$$

$$\text{atracción} = 2\pi\mu.$$

En rigor, el signo debiera ser negativo, si hubiéramos considerado las componentes como negativas, ó sea introduciendo en vez del ángulo α el suplemento para contar los ángulos en el mismo sentido.

Pero esto importa poco, porque lo que aquí nos interesa es el valor numérico.

Y vemos que este valor numérico, ni es cero, como sería admitiendo la continuidad y buscando el límite del punto a, ni es tampoco $4\pi\mu$, como hemos obtenido buscando el límite de la ordenada $a'A'$ (fig. 63) cuando el punto a' se aproxima á A.

Es un valor distinto $2\pi\mu$.

Como si el punto A, y perdónesenos esta comparación, al

verse en el conflicto de elegir entre el limite que corresponde al punto a, que es cero, ó el límite que corresponde al punto a', que es $4\pi\mu$, tomara un término medio para no quedar mal con ninguno y se resolviera por el valor, que es un término medio,

$$\frac{0 + 4\pi\mu}{2} = 2\pi\mu.$$

Ni es este el único caso para estos problemas de la discontinuidad, en que el cálculo acude á tales componendas, y valga la palabra.

Así resulta comprobado lo que dijimos al principio: que para el punto A hay, por decirlo así, tres valores,

para límite de a.....	0
para límite de a'.....	$4\pi\mu$
para la atracción directa....	$2\pi\mu$.

***

Aquí podríamos concluir el estudio de las potenciales y atracciones de una superficie esférica ponderable y homogénea; pero hemos de agregar alguna aclaración más al último problema que hemos tratado.

Por más que los resultados del cálculo sean indiscutibles, y por más que sea, casi nos atreveríamos á decir que imposible, explicar intuitivamente ciertos hechos de las funciones discontinuas, porque en ellas se bordea en cierto modo el doble abismo de lo infinito y de lo infinitamente pequeño, aun así se puede salir al encuentro de ciertas dudas.

Porque el alumno no comprenderá bien cómo al aplicar la fórmula de la integración á la circunferencia, para determinar la atracción en A, y al aplicar la fórmula de la atrac-

ción al punto a', que es casi el mismo punto A, á medida que a' se aproxima á A; como repetimos, la integración, da lugar á dos resultados diferentes.

Observen, para vencer un tanto esta dificultad, lo que sucede en la figura 65, cuando se busca la atracción del punto a' y la atracción del punto a, á medida que estos puntos se aproximan á A.

En una palabra, lo que sucede en la proximidad de A para ambos casos.

Por muy pequeña sea $A\,a'$ siempre habrá un manojo

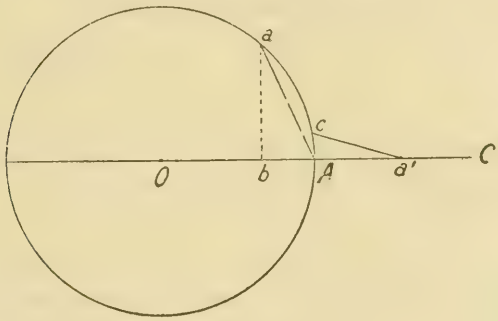


Figura 65.

de rectas $a'\,c$..... $a'\,a$..... $a'\,A$ que formarán ángulos infinitamente pequeños con $O\,C$.

Y así, al proyectar la atracción según $a\,a'$ sobre la recta $O\,C$, la componente casi será igual á la fuerza: ésta no disminuirá sino en infinitamente pequeños de orden superior.

En cambio, para el punto a, aunque $a\,A$ sea igual $a'\,A$ y el valor de la atracción el mismo, la proyección de la atracción según $A\,O$, ó sea $A\,b$, será infinitamente pequeña comparada con $A\,a$.

Claro es que esta no es una demostración, pero al menos indica el camino que podríamos seguir para penetrar más en el problema.

No para demostrar los resultados, que ya están demostra-

dos, sino para comprender cómo sucede lo que sucede, al calcular las integrales en ambos casos.

Y por ahora no seguiremos adelante, limitándonos á la observación que precede, que puede repetirse de una manera análoga y en rigor más sencillamente para el punto interior.

Resuelto el problema de la potencial y de la atracción para una superficie esférica ponderable y homogénea, todos los problemas relativos á potenciales y atracciones de masas esféricas ponderables homogéneas, ó compuestas de capas esféricas homogéneas, pueden resolverse con facilidad suma, como veremos en la conferencia inmediata.

II.— Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas.

Por José Echegaray.

Conferencia decimaoctava.

Señores:

Decíamos en la conferencia precedente, que íbamos á presentar unos cuantos ejemplos sobre potenciales y atracciones.

Ejemplos que sirvieran de ejercicio y de aplicación á las teorías expuestas en este curso, y que al mismo tiempo nos preparasen el terreno, por decirlo así, para los problemas generales de la electroestática y aun para otros problemas de la Física Matemática en general.

Consideramos como primer ejemplo, por ser el más sencillo, el de sólidos definidos por superficies esféricas, y estudiamos las potenciales y las atracciones de una superficie esférica, cargada de materia ponderable homogenea, determinando las fórmulas de la potencial y de la atracción de dicha masa superficial para un punto exterior, para un punto interior y para un punto situado sobre la misma superficie esférica.

A lo dicho nada tenemos que agregar, sino que este caso da la solución inmediata en los problemas, que ahora vamos á estudiar.

***

Potencial y atracción de una capa esférica, de espesor infinitamente pequeño y conteniendo materia ponderable homogénea, es decir, de igual densidad en todos los puntos. Sea (fig. 66) AaB una capa esférica de materia ponderable y homogénea, ó sea de densidad constante, que llamaremos μ, y de espesor infinitamente pequeño ε.

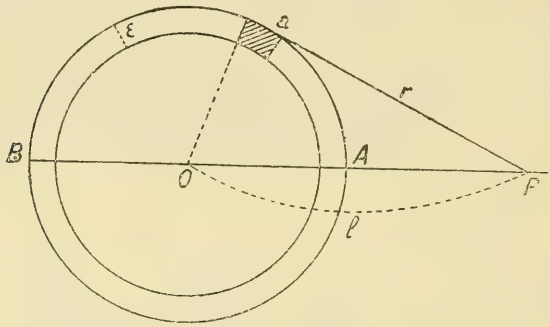


Figura 66.

Emplearemos las mismas notaciones que en la conferencia anterior.

Llamaremos, pues:

ρ al radio de la esfera;

l á la distancia del centro á un punto exterior P;

r á la distancia de este punto exterior P á un punto cualquiera a de la capa esférica.

Y, como antes hemos dicho, μ á la densidad por unidad de volumen y ε al espesor infinitamente pequeño de la capa.

Tenemos que resolver para esta capa esférica los mismos problemas, que para la superficie ponderable de la última conferencia. Es decir, determinar la potencial y la atracción para un punto exterior P, para un punto interior y para un punto de la capa misma.

La solución es la de siempre.

En rigor, atracciones y potenciales se determinan por los

mismos procedimientos y por las mismas fórmulas generales en todos los casos.

Si aparecen dificultades, casi podemos decir, que no son del problema mecánico, que dada la hipótesis newtoniana plantea desde luego sus ecuaciones propias, sino del análisis matemático, que no siempre sabrá integrar las integrales que se presenten y que á veces se encontrará con integrales infinitas, reales ó aparentes.

Así, en este caso, propongámonos determinar la

Potencial de la capa en el punto P.— Dividamos la capa en elementos, por ejemplo, el elemento a, que puede definirse geométricamente de este modo. Por ejemplo: Un sólido infinitamente pequeño, terminado por un cilindo infinitamente pequeño también de generatrices normales á las superficies interior y exterior que limitan la capa y por las dos áreas que en estas dos superficies determina.

Siendo ε la altura del cilindro y llamando $d\omega$ á una de estas áreas, el volumen de a será $\varepsilon d\omega$ y la masa comprendida en este volumen $\mu \varepsilon d\omega$.

Lo mismo podríamos decir de otro cualquier volumen elemental, y la potencial en P se obtendrá como siempre, dividiendo cada elemento de masa por su distancia al punto P y sumando, ó de otro modo dicho, integrando para toda la capa esférica.

Así, llamando según eostumbre, U á la potencial, tendremos

$$U = \int_E \frac{\mu \varepsilon d\omega}{r}.$$

El subíndice E significa que la integral ha de extenderse á toda la esfera.

Ahora bien; esta expresión tiene exactamente la misma forma que la que nos sirvió, en la conferencia precedente, para determinar la potencial sobre un punto interior ó exterior de

una superficie esférica ponderable, sin más diferencia que ésta; la constante μ de aquella formula es en ésta $\varepsilon\mu$.

Es, por lo tanto, inútil repetir dichos cálculos, y podemos desde luego establecer estos dos teoremas:

1.° La potencial de la capa esférica de radio ρ y de espesor ε respecto á un punto *exterior P*, distante del centro la longitud l, es la misma que si toda la masa estuviese reconcentrada en el centro. Así, llamando M á la masa de la capa homogénea, tendremos

$$\text{potencial} = \frac{M}{l}$$

y como

$$M = 4\pi\rho^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu,$$

también podremos escribir,

$$\text{potencial} = \frac{4\pi\rho^2\varepsilon\mu}{l}.$$

2.° La potencial en un punto *interior*, siendo las mismas las notaciones, será una constante; luego bastará obtener la potencial para el centro, ya que es igual para todos los puntos interiores, y tendremos

$$\text{potencial} = \frac{M}{\rho}$$

ó bien

$$\text{potencial} = \frac{4\pi\rho^2\mu}{\rho} = 4\pi\rho\varepsilon\mu$$

que es una constante.

*
* *

Respecto á las atracciones, teniendo las potenciales y sabiendo además, que por razón de simetría la fuerza ha de

seguir la dirección del radio que pasa por el punto en cuestión, estableceremos estos otros dos teoremas.

3.° La atracción de la capa esférica sobre un punto *exterior*, es la misma que si toda ella estuviera reconcentrada en el centro. Así

$$\text{atracción} = f\frac{M}{l^2}$$

y sustituyendo el valor de M, es decir, de la masa total de la capa, que siempre suponemos homogénea,

$$\text{atracción} = f\frac{4\pi\rho^2\varepsilon\mu}{l^2}.$$

4.° La atracción sobre un punto *interior* evidentemente es nula, puesto que la potencial es una constante $4\pi\rho\varepsilon\mu$; de modo que

$$\text{atracción} = o.$$

***

Calculemos ahora las potenciales y las atracciones para una capa esférica; pero no de espesor muy pequeño, sino de espesor finito y compuesta de capas esféricas homogéneas.

Sea el sólido comprendido entre dos esferas AB, $A'B'$ (figura 67), cuyos radios representaremos por ρ y ρ':

$$OA = \rho, \quad OA' = \rho'.$$

Tendremos que resolver, como antes, cuatro problemas:

1.° *Potencial de la capa esférica de espesor finito sobre un punto exterior P.*

Dividamos la capa total en capas infinitamente estrechas $a\ b$.

Hemos demostrado al principio de esta conferencia, que la potencial de una capa infinitamente delgada *a b* para el punto exterior *P*, es la misma que si toda la capa estuviera reconcentrada en el centro *O* de la esfera. Y como lo mismo podemos decir para las demás capas, resulta que la potencial para el punto *P*, puede obtenerse reconcentrando toda la masa *M* de la capa dada en el centro.

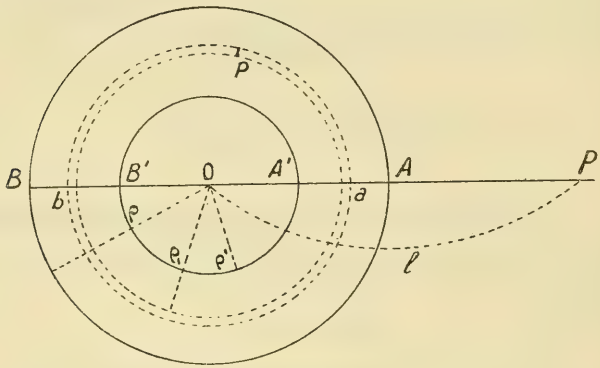


Figura 67.

La potencial será, pues,

$$\text{potencial} = \frac{M}{l}.$$

Fácilmente se calcula el valor de *M*, suponiendo que la densidad es la misma para cada capa esférica, que es la hipótesis establecida.

En efecto; llamando ρ_1 al radio variable de las diferentes capas en que hemos dividido la principal, y llamando μ, que será una función de ρ_1, á la densidad de dicha capa, resulta evidentemente

$$M = \int_{\rho'}^{\rho} 4\pi\rho_1^2 \cdot \mu \cdot d\rho_1$$

expresión que como μ (ρ_1) es función de ρ_1 podrá integrarse, puesto que no contendrá más que una variable ρ_1.

En el caso de que toda la capa fuera homogénea, en cuyo caso μ sería constante, tendríamos

$$M = 4\pi\mu \int_{\rho'}^{\rho} \rho_1^2 \, d\rho_1 = 4\pi\mu \left(\frac{\rho^3 - \rho'^3}{3} \right)$$

y el valor de la potencial sería para este caso particular

$$\text{potencial} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\rho^3 - \frac{4}{3}\pi\rho'^3 \right)}{l} \mu \qquad [1]$$

que reproduce la regla general. Se obtiene la potencial sobre el punto P reconcentrando toda la masa en el centro y dividiendo por l.

2.° *Potencial en un punto interior.*—La potencial para cada capa, si estuviese aislada, sería la misma para todos los puntos del interior, y quien dice para todos los puntos, dice para una parte de ellos; luego la potencial de la capa elemental $a\,b$ será la misma para todos los puntos del interior de la esfera menor $A'B'$; por lo tanto, basta determinar esta potencial para el centro.

Pero la masa de la capa infinitamente delgada $a\,b$, hemos visto que es $4a\rho_1^2 d\rho_1 \mu$, luego su potencial en θ será

$$\frac{4\pi\rho_1^2 d\rho_1 \cdot \mu}{\rho_1} = 4\pi\rho_1 \, d\rho_1 \cdot \mu;$$

y como esto mismo puede decirse de todas las demás capas en que dividamos la capa esférica dada, la potencial resultante será la integral de la expresión precedente entre la esfera menor y la esfera mayor, es decir, entre ρ' y ρ.

En resumen,

$$\text{potencial en cualquier punto del interior} = \int_{\rho'}^{\rho} 4\pi\rho_1 \, d\rho_1 \cdot \mu.$$

Como μ es una función de ρ_1, la integral precedente podrá efectuarse; y como una vez efectuada sólo dependerá de ρ y ρ', que son constantes, resulta que dicha potencial es una constante también.

En el caso en que toda la capa esférica fuera homogénea, μ sería una constante, que podría salir fuera de la integral y tendríamos

$$\text{potencial interior} = 4\pi\mu \int_{\rho'}^{\rho} \rho_1 \, d\rho_1 = 2\pi\mu (\rho^2 - \rho'^2).$$

3.° Tenemos un caso más que considerar, *que es aquel*

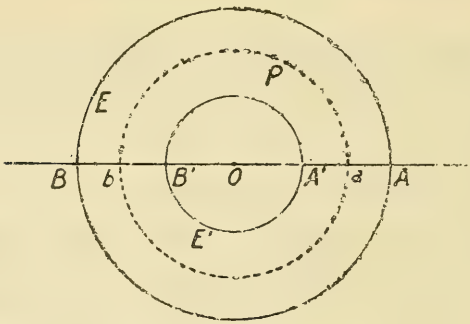


Figura 68.

en que queramos calcular la potencial de un punto P tomado en el interior de la capa.

Tampoco este caso presenta dificultad de ningún género.

Hagamos pasar por el punto P (fig. 68) una esfera $P\,a\,b$ de radio ρ_1, y cuyo centro sea también O.

Esta esfera dividirá á la capa esférica de espesor $A\,A'$ en dos capas: la una, E de espesor $A\,a$; la otra E' de espesor $A'a$.

El punto P puede considerarse como punto exterior de la capa E' y como punto interior de la capa E, y estos problemas ya los hemos resuelto, de modo que el problema principal queda resuelto también.

En efecto; la potencial de la capa E' sobre el punto P es su masa dividida por ia distancia OP, que es ρ_1.

Luego

$$\text{potencial de } E' = \frac{\text{masa} E^1}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\rho_1^3 - \frac{4}{3}\pi\rho'^3\right)}{\rho_1}\mu =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\mu\left(\frac{\rho_1^3 - \rho'^3}{\rho_1}\right).$$

Por otra parte, el punto P puede considerarse como interior á la capa E; luego aplicando la fórmula antes obtenída, y suponiendo para más sencillez que la densidad es constante, tendremos

$$\text{potencial } E = 2\pi\mu\,(\rho^2 - \rho_1^2).$$

La suma de las dos potenciales de E y E', será la potencial de la capa total sobre el punto interior P.

Tendremos, por lo tanto, en la figura 68

$$\text{potencial en } P = \frac{4}{3}\pi\mu\frac{\rho_1^3 - \rho'^3}{\rho_1} + 2\pi\mu\,(\rho^2 - \rho_1^2)$$

ó bien

$$\text{potencial en } P = 2\pi\mu\left(\rho^2 - \frac{1}{3}\rho_1^2 - \frac{2}{3}\frac{\rho'^3}{\rho_1}\right).$$

De las tres fórmulas que hemos deducido para la potencial en un punto exterior, en el interior de la capa de espesor finito y en un punto cualquiera de su masa, se deducen inmediatamente las fórmulas de la potencial para la esfera maciza. Basta hacer $\rho' = o$, con lo cual desaparece el hueco esférico de la figura 68.

Una advertencia conviene hacer antes de pasar adelante.

En la hipótesis que hemos admitido para el último cálculo, al dividir la capa esférica en dos por la esfera abP, lo cual

nos ha permitido considerar á P como interior á la capa E y exterior á la capa E', dicha hipótesis es legítima, porque, en vez de una sola esfera ab, podemos considerar dos infinitamente próximas y que comprendan al punto P. Como su espesor puede aproximarse á cero tanto como se quiera, si suprimimos la masa contenida en esta capa ideal é infinitamente estrecha no alteraremos las condiciones del problema, pues como el espesor tiende hacia cero, tiende también hacia cero el factor $\varepsilon\mu$ de la figura 66, y hemos visto que la potencial en este caso tiende hacia cero, lo mismo que la atracción, y se anula cuando se anula dicho factor.

Por regla general, en este caso de masas continuas, de una capa infinitamente estrecha siempre puede prescindirse; porque este caso difiere esencialmente del de una superficie, para la cual la masa por unidad de superficie era finita y aquí sustituye á μ el factor $\varepsilon\mu$, que se reduce á cero cuando $\varepsilon = o$.

Tendremos, según lo dicho para la esfera maciza, haciendo $\rho' = o$, las tres formulas siguientes:

$$\text{potencial para un punto exterior} = \frac{4}{3}\pi\frac{\rho^3\mu}{l}$$

$$\text{potencial para un punto de la masa} = 2\pi\mu\left(\rho^2 - \frac{1}{3}\rho_1^2\right)$$

$$\text{potencial en el centro} = 2\pi\mu\rho^2.$$

*
* *

Las atracciones para una capa esférica se obtienen inmediatamente, diferenciando la potencial con relación á l, porque sabemos que en razón á la simetría la atracción ha de seguir la dirección del radio; luego tomando el radio que pase por el punto dado como eje de las x, diferenciar con relación á l es lo mismo que diferenciar con relación á x, y las componentes con relación á los otros dos ejes de antemano se sabe que son cero.

1.° Supongamos *que el punto es exterior;* tendremos que diferenciar con relación á l la potencial de la fórmula [1]

$$U = \frac{4}{3}\pi\left(\rho^3 - \rho'^3\right)\mu\frac{1}{l}$$

y resultará

$$\frac{dU}{dl} = -\frac{4}{3}\pi\left(\rho^3 - \rho'^3\right)\mu\frac{1}{l^2}$$

que multiplicada por f expresa la atracción en el punto exterior P, á la distancia l del centro, de una masa igual á la de la capa esférica reconcentrada en dicho centro.

El signo — es correcto, porque indica que la dirección de la fuerza es contraria á la dirección positiva del eje de las x, que aquí es el eje de las l.

2.° Atracción en un *punto interior* del hueco esférico. Tendremos evidentemente que diferenciar

$$U = 2\pi\mu(\rho^2 - \rho'^2).$$

Pero todas las cantidades del segundo miembro son constantes, porque lo son μ, ρ y ρ', en las que no entra l, que es la que determina el punto; luego la derivada es nula y es nula la atracción; lo cual es evidente, porque todo punto del hueco esférico es punto interior de todas las esferas en que puede descomponerse la capa, y la atracción de cada una de ellas es nula.

Casi es inútil advertir que en todos estos problemas, para simplificar, suponemos la masa completamente homogénea. Es decir, que suponemos $\mu =$ constante.

De no ser así, habría que efectuar varias integraciones, como hacíamos al principio.

3.° El cálculo de la *atracción para un punto P* (fig. 69) de la masa, que constituye la capa esférica de espesor finito, se obtiene diferenciando la potencial correspondiente con

relación á ρ_1, que es la distancia al centro del punto P, y que sustituye en esta fórmula á la magnitud l.

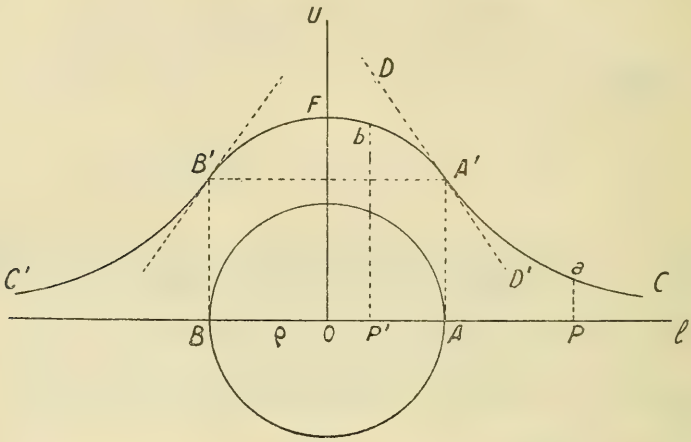


Figura 69.

La potencial es, como antes hemos visto,

$$U = 2\pi\mu\left(\rho^2 - \frac{1}{3}\rho_1^2 - \frac{2}{3}\frac{\rho'^3}{\rho_1}\right)$$

diferenciando con relación á ρ_1,

$$\frac{dU}{d\rho_1} = -\frac{4}{3}\pi\mu\rho_1 + \frac{4}{3}\pi\mu\rho'^3\frac{1}{\rho_1^2}.$$

***

Para obtener las atracciones en el caso de la esfera maciza no habrá más que igualar á cero el radio $\rho' = OA'$ en las fórmulas anteriores, y tendremos:

Atracción de la esfera maciza en un punto extertor. $-\frac{4}{3}\pi\rho^3\mu\frac{1}{l^2}$

— — en el centro..... o

En la masa de la esfera. . . . . $-\frac{4}{3}\pi\mu\rho_1$

Si por conformarnos con la notación general, representamos en la última formula la distancia del punto P al centro, no por ρ_1, sino por l, la fórmula será $-\frac{4}{3}\pi\mu l$.

Ya hemos dicho que el signo — en estas fórmulas se explica porque la dirección de la fuerza es hacia el centro; pero conociendo para todos los casos la dirección, lo que nos importa es el valor numérico, que está expresado por las fórmulas precedentes prescindiendo del signo.

*
* *

Es fácil ahora, para todos estos problemas, hacer un estudio análogo al que hicimos para la superficie esférica y obtener una representación gráfica de las potenciales y de las atracciones para el caso de la capa esférica homogénea de espesor finito y para el caso de la esfera llena.

Puesto que, por razón de simetría, la distribución de potenciales y atracciones es la misma en todas las líneas que pasan por el centro, podemos fijarnos en una sola y por ella hacer pasar un plano, y en este plano tomar por eje de potenciales ó atracciones una recta que parta del centro de la esfera y sea perpendicular al radio que se hubiera escogido.

Este radio prolongado será el eje en que se midan las distancias del punto al centro, es decir, una serie de puntos para los cuales se desea determinar la potencial ó la atracción, y las ordenadas paralelas á la otra recta representarán las potenciales ó las atracciones.

La línea definida por estas abscisas y estas ordenadas podrá ser la representación gráfica de las potenciales ó de las atracciones y marcará de una manera sensible la continuidad ó la discontinuidad de unas y otras en todo el espa-

cio, puesto que en todas las líneas que pasen por el centro la distribución es la misma.

Como este análisis no ofrece dificultad de ningún género nos limitaremos á considerar un solo caso, el más sencillo, el de la esfera llena.

Empecemos, pues, por las potenciales.

1.° Sea (fig. 65) $A\,B$ una esfera maciza, y para simplificar aún más el problema, supongamos que la materia que la forma tiene una densidad constante μ.

Representaremos, como siempre, el radio de la esfera por ρ.

Las tres fórmulas de la potencial hemos dicho que son:

Para un punto exterior..... $\dfrac{\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3}{l}$

Para un punto en la masa..... $2\pi\mu\left(\rho^2 - \frac{1}{3}l^2\right)$

Llamando U á la potencial para los puntos exteriores, como, por ejemplo, para P, la ecuación que determina los valores de U en función de l, será

$$U = \frac{\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3}{l}$$

ó llamando para abreviar M al numerador, que es la masa de la esfera,

$$U = \frac{M}{l},$$

ecuación que da para cada valor de $l = OP$ el valor correspondiente de la potencial $Pa = U$, y así se obtiene la curva A' á C, que representa la ley de las potenciales para puntos exteriores.

Dicha ecuación, que también puede escribirse

$$Ul = M,$$

si U y l son las variables, y M es una constante, representa una hipérbola equilátera referida á sus asíntotas, que serán los ejes de l y de U.

Vemos que á medida que el punto C se aleja, la ordenada es más y más pequeña, y en el infinito será nula, como debía ser.

Pero de esta hipérbola equilátera no podemos aprovechar más que la rama $A'C$ y la simétrica $B'C'$.

El último punto utilizable es el A', que corresponde al punto A del diámetro, que corresponde á su vez al caso en que P se confunde con A, y lo mismo decimos de B y B'. En todo el diámetro AB ya no sirve la rama $A'D$, porque la fórmula de la potencial es otra.

Para puntos interiores, tales como P', es decir, cuando se tiene $Op' = l$, la fórmula de la potencial es la segunda, debemos escribir

$$U = 2\pi\mu\left(\xi^2 - \frac{1}{3}l^2\right).$$

Esta fórmula es la que da la potencial para cualquier punto interior P'.

Si representamos dicha curva por $A'FB'$, para el punto P' la potencial será Pb.

Desde luego se observa que dicha ecuación es una parábola que vuelve su concavidad hacia la parte inferior.

Se observa también, y por anticipado así se representa en la figura, que la rama de hipérbola $A'C$ de la potencial exterior y el arco de parábola $A'FB'$, que indica la potencial interior, pasan por el mismo punto A' y esto puede repetirse por razón de simetría para el punto B'.

La comprobación es inmediata.

La ecuación de la hipérbola

$$U = \frac{\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3}{l}$$

para la abscisa $OA = \rho$, da para la ordenada AA

$$AA' = U = \frac{\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3}{\rho} = \frac{4}{3}\pi\mu\rho^2$$

y la ecuación de la parábola $A'FB'$ para la misma abscisa, $OA = \rho$, sustituyendo en

$$U = 2\pi\mu\left(\rho^2 - \frac{1}{3}l^2\right)$$

el valor $l = \rho$, da á su vez

$$AA' = U = 2\pi\mu\left(\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^2\right) = \frac{4}{3}\pi\mu\rho^2$$

que es el valor ya obtenido en la hipérbola.

Coinciden, pues, las dos curvas en A' y B'.

La potencial de la esfera llena, es, por lo tanto, una línea continua $CA'FB'C'$.

No hay, pues, punto de discontinuidad ó rotura.

Pero la discontinuidad existe, como en todos estos problemas, porque la línea que representa gráficamente la potencial, está compuesta de líneas de naturaleza distinta, puesto que se compone de arcos de hipérbola equilátera y de un arco de parábola, de los cuales no se toma más que una parte.

Ni sirve el arco $A'D$ de la hipérbola para el interior de la esfera, ni sirve el arco $A'D'$ de parábola para el exterior.

Y estas discontinuidades no deben extrañarnos: la discontinuidad está en los datos del problema. El espacio exterior,

vacío. Y del vacío se pasa bruscamente á la esfera, que está rellena de materia ponderable.

***

Pasemos ahora á hacer un análisis análogo para las atracciones.

2.° Repitamos la misma esfera AB (fig. 70). Siempre suponemos el radio igual á ρ y siempre suponemos, para simplificar, que la densidad μ es constante.

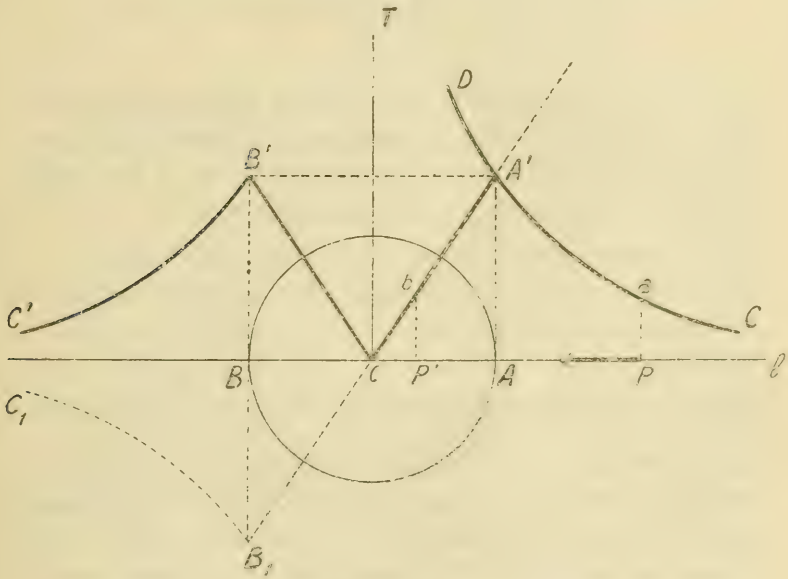


Figura 70.

Para buscar la representación gráfica, veremos lo que pasa en un radio prolongado $A\,O$, que será, como antes, el eje de las l: distancias de cualquier punto P al centro de la esfera.

Por $O\,l$ haremos pasar un plano que supondremos que es

el de la figura, y la OT, trazada en este plano perpendicular á Ol, será el eje de las atracciones.

Las fórmulas, que para las atracciones hemos obtenido en una esfera maciza y homogénea, hemos visto que son, haciendo $f=1$ .....

$$\text{Atracción} = T = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3\mu}{l^2} \text{ para un punto exterior.}$$

$$\text{Atracción} = T = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho'^3\mu}{l^2} \text{ para un punto interior.}$$

Para un punto exterior P la fórmula primera da el valor de la atracción $T=Pa$, y construyendo la curva $A'C$ (figura 70), en que las abscisas son las distancias l y las ordenadas son las atracciones T, su ecuación será:

$$T = \frac{M}{l^2} \quad \text{ó bien} \quad Tl^2 = M,$$

para la cual la constante M tiene el valor $M = \frac{4}{3}\pi\rho^3\mu$, dependientes del radio de la esfera y de su densidad. Tendremos en dicha curva $A'C$ y en su rama simétrica $B'C'$ la representación gráfica de las atracciones en el espacio exterior de la esfera para una recta CC' y para todas las que pasen por O.

Pero repetimos aquí lo que hemos dicho para la potencial: De esta curva, que afecta la marcha general de una hipérbola, que tiene por asíntotas el eje de las T y de las l, y cuya ordenada se anula en el infinito, sólo podremos aprovechar y sólo representa la atracción el arco $A'C$ y su simétrico. La prolongación AD ya no representa el valor de la atracción en el diámetro AB.

Para este diámetro tenemos que emplear la segunda fórmula de las dos anteriores,

$$T = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho'^3\mu}{l^2}.$$

Pero como el radio ρ' es precisamente la distancia OP' del punto P' interior, al centro de la esfera, dicha fórmula se convierte en esta otra, haciendo $\rho' = l$,

$$T = \frac{\frac{4}{3}\pi l^3\mu}{l^2} = \frac{4}{3}\pi\mu \cdot l$$

que es lineal en T y en l, y que representa, por la tanto una línea recta que pasa por el origen y en que la constante es $\frac{4}{3}\pi\mu$.

Observemos, que esta recta pasa evidentemente por A', punto correspondiente á A en la curva que representa la atracción exterior. Para ponerlo en evidencia basta hacer $l = OA = \rho$ en la ecuación de la curva $A'C$, y en la ecuación de la recta que acabamos de hallar, y ver que ambas ecuaciones dan la misma ordenada AA'.

En efecto, haciendo $l = \rho$ en

$$T = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\mu\rho^3}{l^2},$$

tendremos

$$T = \frac{\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3}{\rho^2} = \frac{4}{3}\pi\mu\rho = AA'.$$

Y haciendo esta misma sustitución en la línea que repre-

senta la atracción para los puntos del diámetro AB, ó si se quiere del radio OA, resultará

$$T = \frac{4}{3} \pi \mu \cdot l$$

y para $l = OA = \rho$

$$T = \frac{4}{3} \pi \mu . \rho$$

que es precisamente el valor AA', antes obtenido.

Así, pues, la línea representativa de las atracciones para el radio OA será la recta OA'. Todo punto P' del interior estará sometido á una atracción igual á $P'b$.

Claro es, que para la parte de la izquierda, la representación gráfica de las atracciones se compondrá también del arco $B'C'$, simétrico de $A'C$ y de la recta $B'O$, simétrica de la recta OA'.

Esto teniendo sólo en cuenta los valores numéricos de las atracciones. Si se tienen en cuenta la dirección de cada una, ó sea su signo, es claro que deberemos invertir la figura en OB_1C_1.

Pero esto importa poco para nuestro objeto, y en rigor mejor dijéramos, que la figura que debe invertirse, es la $OA'C$, porque estas atracciones son las negativas, es decir, las que se dirigen en sentido contrario del eje positivo de las l como se ve en P.

De todas maneras, al pasar del espacio exterior al interior de la esfera, no hay rotura en la línea $OA'C$ que representa las atracciones; pero hay discontinuidad en este sentido: que no es *una sola ecuación* la que representa la línea $OA'C$ de las atracciones, sino *dos porciones* de dos líneas distintas, uniéndose en C.

Sobre estos casos extraños de continuidad en el fenómeno (extraños hasta cierto punto) y de discontinuidad en las lí-

neas ó superficies representativas, trataremos más detenidamente al explicar la fórmula de Fourier y otras análogas.

El que las líneas OA', $A'C$ se unan sin rotura en A', podía ya preverse en la figura 69 al estudiar la línea representativa de la potencial.

En efecto, puede decirse que las ordenadas de la figura 70 son proporcionales á las derivadas de la figura 69.

La ecuación de la curva $A'C$ (fig. 69) era

$$U = \frac{\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3}{l}$$

su derivada con relación á l es

$$\frac{dU}{dc} = -\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3\frac{1}{l^2}$$

y el valor de esta derivada para el punto A', se obtendrá haciendo en el valor anterior $l = OA = \rho$ y tendremos

$$\frac{dU}{dc} = -\frac{4}{3}\pi\mu\rho^3\frac{1}{\rho^2} = -\frac{4}{3}\pi\mu\rho$$

Diferenciando asimismo por relación á l la ecuación de la curva $B'FA'$, que es

$$U = 2\pi\mu\left(\rho^2 - \frac{1}{3}l^2\right),$$

hallaremos

$$\frac{dU}{dl} = -\frac{4}{3}\pi\mu l$$

y haciendo $l = \rho$,

$$\frac{dU}{dl} = -\frac{4}{3}\pi\mu\rho,$$

derivada para el punto A' que es igual al anterior.

En suma, las curvas $B'FA'$ y $A'C$ de la figura 69, son tangentes en A', luego darán la misma ordenada AA' en la figura 70 para la línea representativa de la atracción.

Lo que hay es que las segundas derivadas ya no serán iguales.

Esta discusión, que es sencillísima, elemental pudiéramos decir, puede generalizarse para el caso, no ya de la esfera maciza, sino para varias capas esféricas, homogéneas y concéntricas.

***

Dando por terminado el problema de la esfera, que hemos discutido ampliamente, pasemos á otro ejemplo de la teoría de las potenciales y atracciones, que es mucho más difícil. A saber: el de las potenciales y atracciones de un elipsoide macizo y homogéneo.

Más difícil, decimos, no como problema de Física Matemática, que bajo este concepto está ya resuelto por completo, y es tan sencillo como otro cualquiera de la misma clase, porque todos ellos están comprendidos en la misma fórmula general.

Para la potencial, sabemos que se tiene

$$U = \iiint \frac{\mu\, d\tau}{r},$$

siendo μ la densidad, $d\tau$ una diferencial de volumen del cuerpo, por ejemplo, del elipsoide, y r la distancia del centro de $d\tau$ al punto para el que se quiere calcular la potencial.

Esto respecto á la función potencial: respecto á la fuerza

de atracción sobre una masa 1, conocida U, las tres componentes de la atracción, serán

$$X = f\frac{dU}{dx}$$

$$Y = f\frac{dU}{dy}$$

$$Z = f\frac{dU}{dz}.$$

Por eso decíamos que el problema ya estaba resuelto.

Las dificultades aparecen, cuando termina el problema de Física Matemática y empieza el problema de cálculo integral. Es decir, cuando tenemos que efectuar la integral triple anterior, que representa el valor de U.

Se trata, pues, de un problema de Matemáticas puras, al cual se le pueden aplicar los procedimientos generales de integración; pero que es un problema difícil y de importancia cuando se buscan soluciones relativamente sencillas, rápidas y elegantes; que también en los problemas matemáticos cabe, y en alto grado, la armonía y la belleza.

Hay demostraciones matemáticas, perfectamente lógicas, que dominan á la inteligencia y á ella se imponen, y á cuyo final puede agregarse, con pleno derecho, la fórmula de muchos clásicos: *Que es lo que se quería demostrar:* en francés, C. Q. F. D.

Convencen, pero se siente uno convencido de mala gana; porque en estos casos á que nos referimos, la demostración es larga, complicada y hasta enmarañada. Es un caos perfectamente lógico, pero un caos en que no se ha hecho la luz.

En cambio, hay otras teorías y otras demostraciones, en que á la verdad y á su proceso lógico acompaña una luz que la ilumina: la demostración tiene formas estéticas, que la hacen agradable y simpática.

Si se me permite una comparación, un tanto atrevida,

diré, que aquellas primeras demostraciones son como personas muy honradas, pero de mal carácter, y que con toda su honradez resultan inaguantables.

Pues hay demostraciones que con toda su verdad y toda su lógica son inaguantables también.

En cambio, hay teorías, procedimientos lógicos, demostraciones de teoremas, que á la vez que convencen seducen y agradan. Son como personas que, además de ser buenas, son tratables.

Y perdónesenos esta digresión, que alguna vez hemos de hacer aplicación de ella.

Volviendo al ejemplo anunciado, á saber: el cálculo de la potencial y de la atracción de un elipsoide homogéneo, diremos, que es problema que ha ocupado la atención de numerosos sabios.

Para no acumular citas y referencias, citemos tan solo los trabajos de Chasles; los teoremas de Ivory y de Mac-Laurin, y sobre todo el capítulo V de la obra de Emile Mathieu, titulada *Théorie du potentiel;* y casi sería falta de respeto no citar á los principiantes la ya vieja y siempre venerable Mecánica de Poisson.

Como nuestro objeto no es escribir un tratado de Mecánica, por más que la Mecánica forme parte, como ya hemos dicho muchas veces, de la Física Matemática; sino dar algunos ejemplos sobre la teoría de la potencial y de las atracciones que hemos expuesto en este curso; y principalmente demostrar fórmulas de que hemos de hacer uso más adelante, y entre ellas se encuentran las que determinan las atracciones de los elipsoides, como citamos en la primera conferencia de este curso, nos limitaremos á una demostración muy rápida, y muy elegante pudiéramos decir, que es la dada por Dirichlet en el *Journal, de Crelle,* y que cita y explica M. Appell, en su gran *Tratado de Mecánica,* á que tantas veces hemos necesitado acudir.

La demostración es bastante sencilla, y la sencillez es ya

un elemento de la elegancia, pero es una demostración extraña; porque, como veremos en la conferencia próxima, no ataca de frente el problema.

No busca directamente la potencial de un elipsoide homogéneo y macizo, sino que determina una función que *à posteriori* demuestra que es una potencial.

Pero todo esto ya lo desarrollaremos en la conferencia inmediata, pues para los principiantes la demostración de Dirichlet requiere una explicación aclaratoria.

De lo contrario, dando la demostración escueta, los alumnos comprenderán los cálculos y las transformaciones, que por otra parte son bien sencillos; pero dudo que la mayor parte de ellos penetren, de primera intención, en la esencia de la demostración de que se trata.

Por eso mis aclaraciones han de ser bastante minuciosas; inútiles de todo punto para los matemáticos de profesión, pero necesarias para la enseñanza, y por lo tanto para muchos alumnos, que emprenden el estudio de la Física Matemática, sin preparación suficientemente amplia de las Matemáticas puras.

Por fin, diremos, que la demostración, que vamos á desarrollar el día próximo, á mi entender no tiene más que un inconveniente, y es que pertenece á lo que antes se llamaba demostraciones sintéticas.

Y eran aquellas en que desaparecía el procedimiento de investigación, el análisis que había conducido á cierto resultado, el proceso, en suma, del pensamiento lógico, para llegar á determinadas conclusiones.

Así el lector acompañaba al matemático en su trabajo de investigación.

El segundo método, el que hemos llamado método sintético, procede en forma dogmática.

Afirma un teorema, sin decir cómo se ha llegado á él. Después da la demostración, y al fin escribe la fórmula consagrada: *Que es lo que nos proponíamos demostrar.*

Cuando el problema es relativamente sencillo, cuando brota espontáneamente de todo el trabajo anterior, esto no tiene inconvenientes, porque muchos de estos teoremas son, por decirlo así, intuitivos, sólo que á la intuición se agrega la demostración lógica.

Pero hay otros casos, y la demostración de Dirichlet es uno de ellos, en que las fórmulas que constituyen el teorema que ha de demostrarse, son tales, que no adivina fácilmente ningún alumno, como se le han podido ocurrir al insigne maestro.

Y aunque sobre esta materia aún podríamos agregar otras reflexiones, todo lo que nos resta por decir ha de quedar para la conferencia próxima.

XLVI.—Conferencia sobre Física Matemática. Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia decimanovena.

SEÑORES:

El objeto de esta conferencia, como anunciamos en la anterior, es la determinación de la función potencial de un elipsoide macizo y homogéneo, cuya densidad representaremos por μ; para un punto cualquiera del espacio, ya exterior, ya interior, ya sobre la misma superficie del elipsoide, y, además, sus atracciones en estos diferentes puntos.

Ya dijimos, que el método, que íbamos á escoger para determinar la potencial, era el dado por Dirichlet, que es relativamente sencillo y que tiene carácter sintético.

Lo expone en su obra de Mecánica Mr. Appell; pero nosotros, para facilitar su estudio á nuestros alumnos, haremos algunas aclaraciones y ampliaciones. Así lo exige, como hemos manifestado en ocasiones diversas, el carácter elemental de estas conferencias. Elemental por la forma y por el deseo de propagar la alta ciencia en España, pero sin renunciar, en manera alguna, á la exposición de las teorías más elevadas.

Antes de entrar en el problema principal de esta conferencia, he de recordar algunos puntos de los más sencillos de la Geometría analítica; recuerdo, sin embargo, que creo

absolutamente necesario para la claridad de la exposición.

A veces, el no tener presente cosas muy sencillas, hace ininteligibles ó poco claras ciertas teorías de la ciencia matemática y de la ciencia aplicada.

Sea ABC (fig. 71) el elipsoide macizo y homogéneo de densidad μ que vamos á considerar.

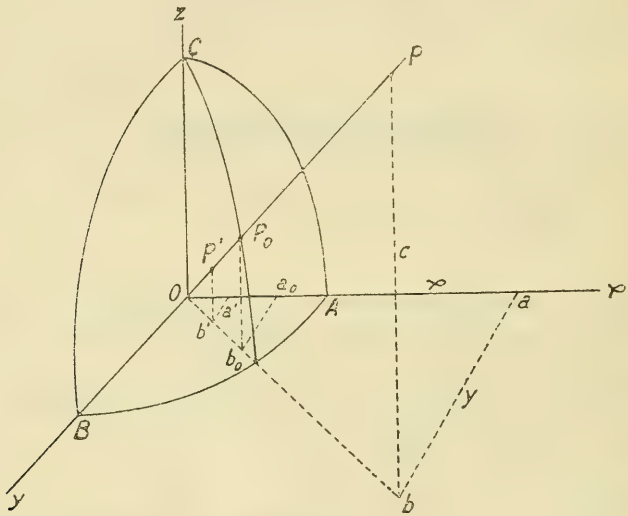


Figura 71.

Hemos representado en la figura tan sólo la octava parte del elipsoide, la que corresponde al triedro $oxyz$, formado por los ejes positivos, que coinciden en dirección con los tres semi-ejes del elipsoide;

$$OA = a,\ OB = b,\ OC = c.$$

La ecuación de la superficie del elipsoide referida á sus ejes será, como se sabe por geometría analítica,

$$\frac{x^2_o}{a^2} + \frac{y^2_o}{b^2} + \frac{z^2_o}{c^2} - 1 = o.$$

Representamos por x_o, y_o, z_o, las tres coordenadas de cualquier punto P_o de la superficie del elipsoide en cuestión: haciéndolas variar de modo que satisfagan á la ecuación precedente, pueden recorrer todos los puntos de la superficie.

Tomemos ahora un punto P, exterior al elipsoide, cuyas coordenadas representaremos por x, y, z. Y se sabe que si en vez de x_o, y_o, z_o, se sustituyen en el primer miembro de la ecuación del elipsoide x, y, z, este primer miembro tomará un valor *positivo*, es decir, que se tendrá

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 > o.$$

En efecto, si unimos el punto P con el centro del elipsoide, y suponemos que la recta OP corta á la superficie del elipsoide en P_o, y representamos las coordenadas del punto P_o, que son Oa_o, $a_o b_o$, $b_o P_o$, según la notación ordinaria, por x_o, y_o, z_o, se ve evidentemente en la figura, que se tiene

$$x_o < x, \quad y_o < y, \quad z_o < z.$$

Luego, cuando en la ecuación del elipsoide

$$\frac{x^2_o}{a^2} + \frac{y^2_o}{b^2} + \frac{z^2_o}{c^2} - 1 = o$$

hemos puesto, en vez de x_o, y_o, z_o, cantidades mayores x, y, z, los tres primeros términos habrán aumentado evidentemente, y además conservarán el signo positivo, por tratarse de cuadrados; luego si su conjunto valía 1, la nueva expresión

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

valdrá más de 1; y el primer miembro, que era cero, será

ahora una cantidad positiva. Resulta evidentemente, como anunciábamos,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 > o$$

siempre que el punto determinado por x, y, z, está fuera del elipsoide.

Del mismo modo podríamos demostrar, que si el punto P′ está dentro del elipsoide, y representamos por x', y', z', sus coordenadas, la expresión que resulta de sustituir estas coordenadas, en vez de x_o, y_o, z_o, en el primer miembro de la ecuación del elipsoide, será una cantidad negativa; así

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 < o.$$

En efecto, tracemos la recta $O P'$ que supondremos que corta en P_o al elipsoide.

Se tiene evidentemente por una intuición inmediata, á la cual, por otra parte, se le puede dar rigor lógico, que $O a'$ es menor que $O a_o$, y $a' b'$ es menor que $a_o b_o$, y que $P' b'$ es menor que $P_o b_o$; es decir,

$$x' < x_o, \quad y' < y_o, \quad z' < z_o.$$

De aquí resulta, que si en el primer miembro de la ecuación del elipsoide, en vez de x_o, y_o, z_o, se sustituyen cantidades menores, x', y', z', los tres primeros términos, que son cantidades positivas porque son cuadrados, disminuirán; y si antes su conjunto era igual á 1, ahora será menor numéricamente y el resultado total será una cantidad negativa; es decir,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 < o$$

que es lo que habíamos enunciado.

Y también podemos demostrar la reciproca de ambas proporciones. Es decir, que si las coordenadas de un punto, sustituídas en el primer miembro de la ecuación del elipsoide, dan un resultado positivo, el punto es exterior; porque si fuera interior, daría un resultado negativo en virtud de la proposición segunda, y si estuviera sobre el elipsoide el resultado sería nulo.

Y así mismo, si las coordenadas de un punto, sustituídas en el primer miembro de la ecuación del elipsoide, dan resultado negativo, el punto es interior, porque si fuera exterior, en virtud de la proposición primera, hubiera dado un resultado positivo.

En suma; las dos desigualdades y la ecuación del elipsoide caracterizan la posición de todo punto de coordenadas x, y, z.

Si sustituídas á x_o, y_o, z_o anulan la ecuación, el punto está sobre la superficie del elipsoide; si dan un resultado potivo, está fuera; si dan un resultado negativo, está dentro.

*
* *

Todo esto, como antes decíamos, es excesivamente elemental; los alumnos lo saben desde que empiezan á estudiar geometría analítica, y parece que es ir demasiado lejos en estas minuciosidades, que me complazco, al parecer, en desarrollar inútilmente.

Y sin embargo, yo creo que para la *enseñanza* esta minuciosidad es absolutamente necesaria, y que sin ella la demostración de Dirichlet, que es sencilla, elegante y rigurosa, resulta vaga, inconexa y para algunos alumnos absolutamente incomprensible, á pesar de estar desarrollada por tan eminente maestro como el que antes citamos.

Lo que hay es que con un inciso se suple lo que echamos

de menos, y en vez del inciso nosotros hemos empleado dos páginas.

Ya justificaremos en el curso de esta conferencia ó de la siguiente estas ampliaciones y aclaraciones, según prometimos.

Y antes de empezar la demostración, agreguemos algo así como un *lema* á las dos proposiciones precedentes.

Sea la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=o,$$

en la que consideramos á x, y, z, a, b, c como *cantidades conocidas*. Son datos de un problema, y en cambio consideramos á u como la incógníta de la ecuación precedente.

Dicha ecuación es en rigor una ecuación de tercer grado en u que puede ponerse bajo esta forma, quitando denominadores:

$$x^2(b^2+u)(c^2+u)+y^2(a^2+u)(c^2+u)+z^2(a^2+u)(b^2+u)-$$
$$-(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)=o$$

y que pudiera ordenarse con relación á u de esta manera

$$u^3+Mu^2+Nu+P=o.$$

Pero nos conviene para nuestro objeto la forma primitiva.

Bajo la última forma, los coeficientes M, N, P, serían funciones racionales y enteras de a, b, c, x, y, z.

Si suponiendo fijas estas cantidades, consideramos á u como variable, el primer miembro de la ecuación primera, ya no será en general cero, sino que tomará un valor Y que dependerá del valor de u, y la ecuación

$$Y=\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{z^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1 \qquad [Y]$$

será la ecuación de una curva $A\,C$ (fig. 72), en que las variables serán Y y u.

Los puntos en que esta curva corte al eje de las u, determinarán con las raices de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=o,$$

en que siempre a, b, c, x, y, z se consideran como las cons-

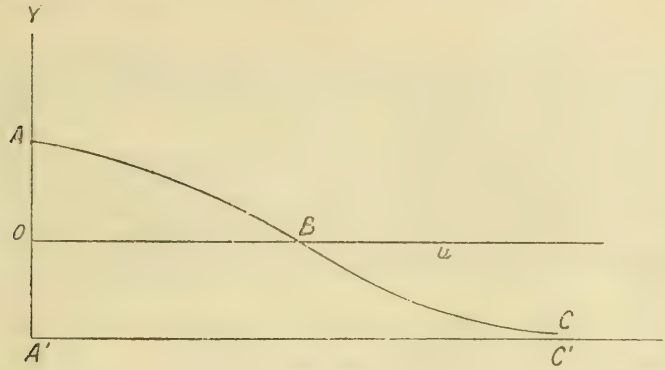


Figura 72.

tantes de dicha ecuación. Esto es evidente, porque en estos puntos se tiene $Y=o$.

Así, por ejemplo, si la curva definida por la ecuación [Y] fuese $A\,B\,C$, el punto B correspondería á una raíz de la ecuación anterior.

Para nuestro objeto sólo nos interesa conocer las raices positivas, es decir, los valores positivos de u que reducen Y á cero.

Si en la ecuación [Y] hacemos $u=o$, tendremos la ordenada $O\,A$ del punto en que la curva corta al eje de las Y.

Representando esta ordenada por Y_o, será, pues,

$$O\,A=Y_o=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$$

Pero si consideramos en nuestro problema, el cálculo de la potencial del elipsoide para un punto exterior (x, y, z) al mismo, siendo las coordenadas de este punto exterior x, y, z, es evidente, según explicamos al principio, que el valor Y_0 será positivo, y esto es lo que hemos representado en la figura.

Si á partir de cero hacemos crecer á u, como los denominadores

$$a^2 + u, \quad b^2 + u, \quad c^2 + u$$

rán creciendo, los quebrados y su suma disminuirá, y la curva irá descendiendo constantemente hacia el eje de la u, según indica la rama AB.

Cuando u haya crecido hasta OB, es decir, hasta convertirse en una de las raices de la ecuación ya indicada, Y se reducirá á cero, y en este punto la curva cortará al eje de las u.

Si la u sigue creciendo, seguirán creciendo los tres denominadores y seguirá disminuyendo la suma

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u},$$

que como ya en el punto B era igual numéricamente á 1, pasará á ser inferior, y siendo menor esta cantidad positiva que 1, el valor de Y será negativa, como indica la figura en la rama BC.

Por fin, creciendo u sin límite, los tres términos en cuestión tenderán hacia cero, puesto que los denominadores tienden hacia infinito y la ordenada Y se reducirá á -1.

De manera que tomando sobre el eje de las Y, $OA' = 1$, y trazando la recta AC' paralela al eje de las u, esta recta será una asíntota de la curva ABC que representa la relación entre Y y u.

De aqui resulta que la ecuación [Y] no tiene más que una raíz real posítiva, que es la representada en la figura por OB; y tiene una raíz, porque Y pasa de $+ oA$ á $- 1$.

La curva ABC y la longitud OB para un mismo elipsoide, es decir, para los mismos valores de a, b, c, dependerán de x, y, z, que son constantes de la ecuación entre las variables Y, u.

Así, para cada punto del espacio exterior al elipsoide, ó sea para cada sistema de valores x, y, z, tendremos una curva ABC distinta y un valor distintinto para la raíz $u = OB$.

En rigor, pudiéramos hacer consideraciones análogas para los puntos interiores del elipsoide, y esto en cierto modo daría forma más artística á la demostración de Dirichlet, pero esto no es necesario para la demostración, y como no queremos alterarla, sino hacerla más comprensible á los alumnos, nos limitaremos á lo expuesto repitiendo lo dicho:

A cada punto exterior corresponde una curva y una raíz u.

***

Hemos dicho ya, que el mètodo de Dirichlet no es en cierto modo un método directo. No se plantea la integral general de la potencial del sólido, que en este caso es un elipsoide macizo, sino que se establecen, desde l iego, por el método sintético, dos funciones que satisfacen *á las propiedades generales de toda potencial newtoniana.*

Recordarán mis alumnos que en otras conferencias de este curso hemos dicho:

Las funciones potenciales cumplen con tres condiciones:

1.ª Toda función potencial U es finita, así como sus derivadas primeras y segundas en todo el espacio.

2.ª Se anula en el infinito.

3.ª En la parte exterior de las masas atrayentes satisface

á la ecuación de Laplace $\Delta U = o$, y en el interior á la ecuación de Poisson $\Delta U = -4\pi\rho$.

Y *reciprocamente:* toda función U_1 que satisface á estas tres condiciones, es una potencial. Es decir, que puede considerarse como engendrada por diferentes masas, para cada una de las que se toma la integral de sus elementos divididos por su distancia al punto del espacio respecto al cual se quiere determinar el valor de la potencial.

Y este es precisamente el método que vamos á seguir, como antes hemos indicado; ó de otro modo: vamos á establecer, como Dirichlet, dos funciones de x, y, z; y vamos á demostrar que satisfacen á dichas tres condiciones respecto al espacio encerrado por una superficie elipsoidal y al espacio exterior, aplicando el teorema que hemos recordado hace un instante.

Sin embargo, y perdónesenos este escrúpulo, que creemos necesario, en las tres condiciones establecidas para definir la superficie potencial, algunos autores omiten ó dan por supuesta una particularidad ó condición, que nosotros consideramos indispensable, como indicaremos más adelante. Y es ésta:

En la condición 1.ª hemos dicho, que para que una función U sea función potencial, es preciso que sea finita en todo el espacio, además de serlo sus derivadas primeras y segundas.

Y esto no basta; es preciso decir que sea finita y *bien determinada,* y por lo tanto, única.

Ya explicaremos la razón de insistir en este punto.

Y ahora, antes de desarrollar el método de demostración de Dirichlet, insistamos en explicar el procedimiento lógico en que se funda.

Sea un cuerpo cualquiera C (fig. 73) relleno de materia ponderable de densidad constante ρ, y supongamos que se quiere determinar su potencial por este método indirecto, que vamos á aplicar luego al elipsoide.

Este cuerpo C limitado por una superficie S, divide al es-

pacio en dos partes, que según el uso moderno, llamaremos *dominios*.

El espacio interior ó *dominio interior* D_i y el espacio exterior ó *dominio exterior* D_e.

Ahora, supongamos que por un medio cualquiera, acaso

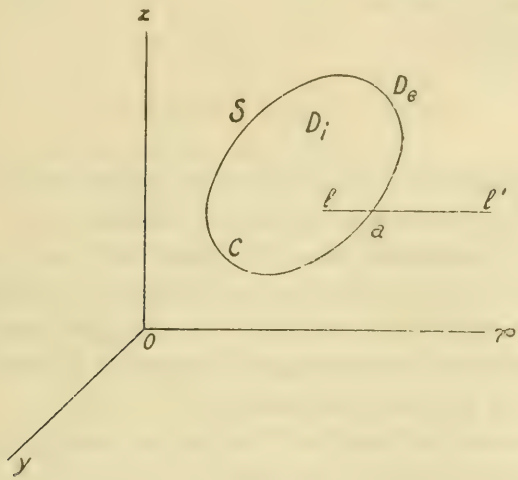


Figura 73.

por tanteos, acaso por intuición ó buscando quizás analogías, se encuentra una función de

$$x, y, z, \quad \text{á saber} \quad U_e\,(x, y, z)$$

para el dominio exterior D_e, que sea continua, finita y bien determinada, así como sus derivadas primeras y segundas, y que además satisfaga á la ecuación de Laplace $\Delta\, U_e = o$.

Supongamos que así mismo, y por un método ó procedimiento que tampoco especificamos, se encuentra otra función de x, y, z en el domidio interior, función que designaremos por $U_i\,(x, y, z)$, y que en dicho dominio sea á su vez continua, finita y bien determinada, así como sus derivadas

primeras y segundas, satisfaciendo, no á la ecuación de Laplace, sino á la ecuación de Poisson $\Delta U_i = -4\pi\rho$.

Supongamos, por último, y esta es condición indispensable, que sobre la superficie S, que separa el espacio exterior del interior, ó sea *ambos dominios*, las dos funciones coinciden en valor para todos los puntos de dicha superficie; es decir, que para valores x, y, z de la superficie límite S, se tiene

$$[U_e(x, y, z)]_s = [U_i(x, y, z)]_s$$

en que el subíndice S indica que los valores de x, y, z se refieren únicamente á la superficie en cuestión.

Pues si se verifican estas tres condiciones podemos asegurar, que hemos encontrado la potencial para el cuerpo C, relleno de materia ponderable, con la densidad constante ρ.

Esto resulta del teorema que demostramos en otra conferencia y que en esta hemos recordado.

Teorema según el cual podemos afirmar, que si $U(x, y, z)$ representa sintéticamente el conjunto de las dos funciones U_i, U_e, esta función U será una potencial. Será la potencial de la masa encerrada en C.

Y podemos establecer, por lo tanto, que

$$U(x, y, z) \text{ símbolo del conjunto } \begin{cases} U_i(x, y, z) \\ U_e(x, y, z) \end{cases}$$

es la potencial del cuerpo C, terminado por la superficie S en todo el espacio, tanto por el dominio exterior, al cual se aplica la función U_e, como para el dominio interior, al cual se aplica la función U_i.

Todo esto no es más que recordar el teorema ya demostrado, por el cual las condiciones que allí indicamos y que hemos repetido ahora, no sólo son necesarias para toda función potencial, sino que *son suficientes*, y por eso las funcio-

nes U_e, U_i que cumplen con ellas, constituyen por su conjunto una potencial.

Pero no estarán de más algunas observaciones.

*
* *

En primer lugar, las dos primeras condiciones no bastan; es preciso que U_e y U_i coincidan y queden *soldadas*, si se me permite emplear esta palabra, en todos los puntos de la superficie S, que limita el cuerpo C.

Esto hemos visto, que sucede en el ejemplo de la esfera, y esto es absolutamente necesario, porque de no ser así, el teorema en que nos fundamos no sería riguroso.

Decíamos en aquella demostración, $U_1 - U$ es finita, y debíamos agregar: es bien determinada, porque si no, para cada punto de la superficie S tendríamos dos valores; porque la U_1 los tendría y daría en cierto modo un salto en cada punto de la superficie S, si en ella U_e no coincidiese con U_i, con lo cual la uniformidad de $U_1 - U$ caería en defecto á lo largo de toda la superficie S.

Más claro aún.

Tracemos la recta ll' que corta en a á la superficie S. En cada punto de la recta ll' la potencial y las funciones U_e, U tendrán ciertos valores.

Tracemos (fig. 74) dos ejes ll', U: el ll' es la recta de la figura 73.

Tomemos paralelamente á U y para cada punto de ll' los valores de U, U_e, U_i, y resultarán las curvas de la figura.

El punto a corresponde á la superficie S.

El valor de la potencial U para a es único.

Si no coincidiesen las ordenadas ac, ac' de U_i, U_e, sería imposible que coincidiese el conjunto de U_i, U_e con U.

Otra segunda advertencia: de la función U_e sólo aprovechamos la parte que corresponde al dominio exterior; no la

prolongamos para valores x, y, z del dominio interior. Lo mismo hacíamos en el ejemplo de la esfera.

En cambio, de la función U_i sólo aprovechamos los valores que corresponden á sistemas de x, y, z de puntos interiores; de los exteriores no hacemos uso ninguno.

Y aquí resulta que la potencial U está compuesta de dos funciones esencialmente distintas; mejor dicho, de dos pe-

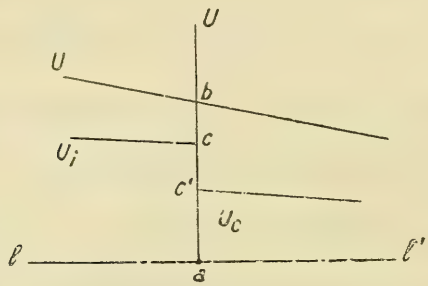


Figura 74.

dazos de funciones U_i, U_e, soldadas y unidas en todos los puntos de S.

Y ya llamaba la atención de mis alumnos sobre esta circunstancia: la ley de un parámetro físico, si le damos este nombre á la potencial, resulta que está expresado por el conjunto de *pedazos de varias funciones*, es decir, que contiene cierto fondo de discontinuidad matemática; y esto no debe extrañarnos, agregábamos en la conferencia anterior. Porque esta discontinuidad matemática responde, en cierto modo, á una discontinuidad física: Un cuerpo relleno de materia en un dominio del espacio, y alrededor el espacio vacío, determina, si esto es posíble, una discontinuidad física.

Por lo demás, estas discontinuidades matemáticas, démosles este nombre, en la ciencia pura se presentan, puesto que existen funciones discontinuas y ejemplo fecundísimo de tales discontinuidades son las series de Fourier.

Por lo demás, y particularmente en este problema, acaso ocurre preguntar: ¿Esa función potencial $U(x, y, z)$, que hemos dicho, que expresa el conjunto de U_e y U_i, es pura abstracción; es una función meramente verbal, si esta denominación es permitida; es tan sólo símbolo de un conjunto de funciones, ó tiene una representación analítica propia?

Evidentemente la tiene y es ésta: la de la potencial de un volumen bajo forma de integral

$$\iiint_{vol} \frac{\rho\, da_1\, db_1\, dc_1}{r}$$

en que a_1, b_1, c_1 son las coordenadas de un punto de la masa; fórmula que así se aplica al espacio interior, como al exterior y que realmente comprende las dos funciones U_e U_i.

Quizás todo esto dependa de la naturaleza íntima de los algoritmos matemáticos.

El matemático puede crear símbolos relativos á la cantidad, al enlace y dependencia de las cantidades, unas respecto á otras, á las combinaciones y al orden; pero *una vez creado el algoritmo*, ó si se quiere el sistema de símbolos, ya éste tiene, si se nos permite la expresión, su vida propia é independiente de la voluntad de su creador.

Cuando el matemático creó el símbolo $\sqrt{}$ no pensó en las imaginarias y á su tiempo las imaginarias se le presentaron en el cálculo.

Apuntamos de paso estas ideas en las cuales no podemos detenernos.

Y vengamos, por fin, al cálculo de la potencial del elipsoide homogéneo, por el método de Dirichlet, método que hubiéramos podido condensar en un par de páginas, suficientes para la demostración lógica; pero á mi modo de ver insuficientes para la enseñanza, al menos para la enseñanza en España.

De todas maneras, téngase en cuenta que no explicamos

lecciones, *damos conferencias*, y nuestra libertad, y nuestro derecho á las digresiones tienen un campo amplísimo, que en la enseñanza dogmática y disciplinada no tendrían.

*
* *

En forma dogmática precisamente se establece el método de Dirichlet:

Teorema.—Si se tiene un elipsoide relleno de materia homogénea, cuya densidad sea ρ y cuyos semiejes sean a, b, c, puede afirmarse que:

1.° La potencial de dicho elipsoide para un punto P exterior, definido por las coordenadas x, y, z, será la siguiente, en que u es la raíz positiva de

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=o,$$

á saber: $U_e(x, y, z) = \pi abc\rho$

$$\int_u^\infty \left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

2.° La potencial del elipsoide, cuando el punto P' es interior al mismo, se expresa de este modo:

$$U_i(x, y, z) = \pi abc\rho$$
$$\int_o^\infty \left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

siendo para ambos casos

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda).$$

Demostración.—Empecemos por la potencial en puntos del exterior, es decir, por U_e.

En primer lugar, es evidente que la expresión U_e es una función de x, y, z, coordenadas del punto P, para el cual deseamos buscar la potencial.

Porque, en efecto, efectuando la integración del segundo miembro, que es el valor de U_e, habrá que tomar los límites de la integral indefinida; de modo que si representamos esta integral por

$$F(x, y, z, \lambda),$$

en que no ponemos en evidencia las demás constantes, tendremos:

$$U_e(x, y, z) = \pi abc\rho\,[F(x, y, z, \lambda]_u^\infty =$$
$$= \pi abc\rho\,[F(x,y,z,\infty) - F(x, y, z, u)]$$

y como u en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = o$$

es evidentemente una función de x, y, z, y este valor positivo u, que consideramos, de estas cantidades depende, s se expresa por

$$u = \psi(x, y, z),$$

el valor de U_e será

$$U_e(x, y, z) = \pi abc\rho\,[F(x, y, z, \infty) -$$
$$- F(x, y, z), \psi(x, y, z)]:$$

donde se ve que, en efecto, el segundo miembro es una función de x, y, z, y de las constantes del elipsoide.

Podemos demostrar, que U_e es una cantidad finita en todo el espacio exterior al elipsoíde, que es una de las condiciones que ha de cumplir para formar parte de la potencial.

Para ello discurriremos de este modo:

Si aumentando el valor absoluto de la integral, aun así resulta una cantidad finita, también lo sería antes de dicho aumento.

Pero podemos aumentar todos los elementos de la integral, haciendo todos los términos positivos y disminuyendo todos los denominadores, para lo cual suprimiremos a^2, b^2, c^2.

Con lo cual la integral se reduce á

$$\int_u^\infty \left(1+\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3}}$$

ó bien,

$$\int_u^\infty \left(1+\frac{x^2+y^2+z^2}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}}=\int_u^\infty \left(\frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2+z^2)\,d\lambda}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)$$

Ambos términos pueden integrarse, porque son

$$\lambda^{-\frac{3}{2}}\,d\lambda+(x^2+y^2+z^2)\,\lambda^{-\frac{5}{2}}\,d\lambda;$$

y la integral indefinida será

$$-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}(x^2+y^2+z^2);$$

y la integral definida será asimismo:

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}(x^2+y^2+z^2)\right]_u^\infty=+\frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{u^3}}(x^2+y^2+z^2)$$

cantidad finita, puesto que u lo es.

Puede afirmarse, además, que dicha integral es continua, porque su derivada, con relación á λ, que es la expresión que multiplica á $d\lambda$, jamás entre los límites u é ∞, ni se hace infinita, ni es discontinua.

Por último, respecto á este primer punto, U_e en el infinito se reduce á cero.

Porque, en efecto, cuanto más lejano este el punto x, y, z, que se tome, es decir, cuanto más grandes sean x, y, z, el valor de U_e más se aproximará á cero. Veamos cómo.

En efecto, cuando en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{b^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=o$$

$x, y, z,$ crecen sin límite, el valor positivo de u tiene que crecer sin límite también, porque si no el primer miembro no podría ser igual á cero; luego en el valor de U_e, el límite inferior u también será ∞ ó tenderá hacia ∞, de modo que deberemos escribir para puntos del infinito,

$$(U_e)_\infty=\pi abc\rho\int_\infty^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda}},$$

en que ponemos en el primer miembro el subíndice ∞ para expresar que buscamos el valor de U_e para puntos que se encuentren á una distancia infinita.

Si en el segundo miembro efectuamos las operaciones indicadas antes, aumentando todos los valores absolutos de los elementos de la integral, tendremos que esta integral es inferior en valor absoluto á

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}(x^2+y^2+z^2)\right]_\infty^\infty=-\frac{2}{\sqrt{\infty}}+\frac{2}{\sqrt{\infty}}-$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\infty}}-\frac{1}{\sqrt{\infty}}\right)(x^2+y^2+z^2)$$

cantidad que evidentemente es igual á cero para todos los valores crecientes de x, y, z: compárense en efecto x^2, y^2, z^2, con $\sqrt{u^3}$ para $u = \infty$.

Parece á primera vista que aun esto último es inútil porque si los dos límites de la integral son iguales la integral es nula; pero la conclusión en general no sería legítima porque no se trata de límites finitos, sino de límites infinitos y no puede escribirse $\int_{\infty}^{\infty} = o$, como se escribe $\int_{a}^{a} = o$, siendo a finita, sin una discusión especial.

Aun para nuestro caso, debería agregar algo á lo dicho; pero es imposible que me engolfe en nuevas digresiones. No lo permite el tiempo, ni la índole especial de la asignatura.

Veamos ahora si la función U_e tiene primeras derivadas finitas y bien determinadas.

Para ello diferenciemos el valor de U_e con relación á x, y es claro que lo mismo podremos hacer respecto á y, z.

Para efectuar esta diferenciación ha de observarse, que el límite inferior u es variable, porque depende de x, toda vez que la raíz positiva u es función de x, y, z. Deberemos, pues, aplicar el método explicado en la conferencia VI para este caso.

Es decir, que deberemos diferenciar bajo el signo integral con relación á x; y deberemos restar el término que corresponde al límite inferior, término que se obtendrá, según la regla que dimos en aquella conferencia, sustituyendo en el coeficiente diferencial, que está bajo el signo integral, u en vez de λ, y multiplicando por la derivada de u con relación á x.

Advertiremos además, que en este caso puede diferenciarse bajo el signo integral porque las dirivadas que se obtengan con relación á x son finitas y contínuas.

Con estas explicaciones la derivada de U_e con relación á x se obtiene inmediatamente; y por de contado, en el parén-

tesis que está bajo la integral, no hay más que un término con x, que es $\frac{x^2}{a^2+\lambda}$. Tendremos, pues, efectuando las operaciones indicadas

$$\frac{dU_e}{dx} = -2\pi abc\rho \int_u^\infty \frac{x}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}\, d\lambda -$$

$$-\pi abc\rho \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right) \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \frac{du}{dx}.$$

Es evidente que el paréntesis del último término es nulo, porque u es precisamente la raíz de

$$1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} = 0$$

y como los otros factores

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \cdot \frac{du}{dx}$$

son evidentemente cantidades finitas, toda la última parte de la derivada obtenida se anula y sólo queda

$$\frac{dU_e}{dx} = -2\pi abc\rho \int_u^\infty \frac{x}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

Esta es, pues, la derivada de la función U_e con relación á x.

Demostraremos que esta integral es finita, siguiendo un procedimiento análogo al que ya hemos empleado para U_e.

En efecto, la integral es esta:

$$\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)c^2+\lambda)}}$$

habiendo sacado fuera de la integral x, que es una constante para la integración.

Todos los elementos de la integral aumentarán, si en todos ellos disminuimos los denominadores suprimiendo a^2, b^2, c^2, y quedará

$$\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda^3}} = \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{5}{2}}} = \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\right]_u^\infty = o + \frac{2}{3}\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$

que es una cantidad finita.

Del mismo modo obtendremos las otras dos derivadas primeras, y en resumen podemos escribir

$$\frac{dU_e}{dx} = -2\pi abc\rho \cdot x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$\frac{dU_e}{dy} = -2\pi abc\rho \cdot y \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$\frac{dU_e}{dz} = -2\pi abc\rho \cdot z \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

Estas tres derivadas primeras son finitas contínuas y bien determinadas. Verdad es que contienen un radical; pero como este radical nunca se reduce á cero, la función es siempre uniforme en la extensión en que se integra.

Pasemos ahora á las derivadas segundas y obtendremos $\frac{d^2U_e}{dx^2}$. Todo lo que de esta vamos á exponer, puede repetirse de las otras dos relativas á y y á z.

Tenemos, pues, que derivar, con relación á x, el primer coeficiente diferencial

$$\frac{dU_e}{dx} = -2\pi abc\rho x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

problema análogo al que ya hemos resuelto. Se compondrá, pues, la derivada segunda de dos partes.

En la primera, considerando á u como constante, la diferencial con relación á x será evidentemente

$$-2\pi abc\rho \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

La segunda parte se obtendrá sustituyendo en el coeficiente diferencial

$$\frac{x}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

en vez de λ la cantidad u, y multiplicando por $\frac{du}{dx}$, todo ello con el signo —. Es decir,

$$-\frac{x}{(a^2+u)\sqrt{\varphi(u)}}\frac{du}{dx}.$$

Tendremos, pues, reuniendo estas dos partes

$$\frac{d^2U_e}{dx^2}=2\pi abc\rho\left[-\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}+\frac{x}{a^2+u}\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\frac{du}{dx}\right]$$

y análogamente,

$$\frac{d^2U_e}{dy^2}=2\pi abc\rho\left[-\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}+\frac{y}{b^2+u}\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\frac{du}{dy}\right]$$

$$\frac{d^2U_e}{dz^2}=2\pi abc\delta\left[-\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}+\frac{z}{c^2+u}\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\frac{du}{dz}\right]$$

Estos tres coeficientes diferenciales de segundo orden, son, lo mismo que la función U_e y que sus primeras deriva-

das, funciones finitas de x, y, z, y además funciones bien determinadas, lo cual se demuestra fácilmente.

Respecto á la integral no habría más que repetir la demostración que ya hemos dado, y en cuanto al último término de cualquiera de las tres derivadas segundas, la demostración también es muy sencilla.

Tomemos, por ejemplo,

$$\frac{x}{a^2+u}\,\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\,\frac{du}{dx},$$

en que ya sabemos que u representa la raíz de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=o$$

considerando á a, b, c, x, y, z, como las constantes de esta ecuación.

Para ver el punto indicado con toda claridad, basta obtener $\frac{du}{dx}$, deducida de la ecuación precedente, suponiendo, como es natural, y y z constantes. Y tendremos diferenciándola con relación á u, x,

$$\frac{(a^2+u)\cdot 2x-x^2\,\frac{du}{dx}}{(a^2+u)^2}-\frac{y^2\,\frac{du}{dx}}{(b^2+u)^2}-\frac{z^2\,\frac{du}{dx}}{(c^2+u)^2}=o$$

de donde

$$\frac{du}{dx}=\frac{2x}{a^2+u}\,\frac{1}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}}$$

y sustituyendo esta expresión en el término, que queremos demostrar que es finito, tendremos,

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\,\frac{x}{a^2+u}\times\frac{2x}{a^2+u}\,\frac{1}{\dfrac{x^2}{(a^2+u)}+\dfrac{y^2}{(b^2+u)^2}+\dfrac{z^2}{(c^2+u^2)}}$$

ó bien,

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}\,\frac{2x^2}{(a^2+u)^2}\,\frac{1}{\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2}+\dfrac{y^2}{(b^2+u)^2}+\dfrac{z^2}{(c^2+u)^2}}$$

Esta expresión no puede ser infinita para valores finitos de x, y, z, u porque nunca los denominadores se reducen á cero.

Sólo podría caber la duda de lo que sean en el caso de $u=\infty$ y entonces se reduce la expresión á

$$\frac{2}{\sqrt{(a^2+\infty)(b^2+\infty)(c^2+\infty)}}\,\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}\left(\dfrac{a^2+u}{b^2+u}\right)^2+\dfrac{z^2}{x^2}\left(\dfrac{a^2+u}{e^2+u}\right)^2}$$

que para $u=\infty$ tiende evidentemente á cero porque el primer factor

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+\infty)(b^2+\infty)(c^2+\infty)}}$$

tiende á cero, y el segundo se reduce á

$$\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{z^2}{x^2}}.$$

Pero este tiende á una cantidad finita si los dos últimos términos del denominador son cantidades finitas para los valores

de x, y, z ó tiende á cero si alguna de las relaciones $\frac{y}{x}, \frac{y}{x}$ tiende á infinito.

***

Sólo nos falta demostrar que estos tres coeficientes diferenciales satisface á la ecuación de Laplace.

Sumando los tres valores obtenidos para

$$\frac{d^2 U_e}{dx^2}, \frac{d^2 U_e}{dy^2}, \frac{d^2 U_e}{dz^2}$$

tendremos

$$\Delta U = 2\pi abc\rho \left[-\int_u^\infty \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^3+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \left(\frac{x}{a^2+u} \frac{du}{dz} + \frac{y}{b^2+u} \frac{du}{dy} + \frac{z}{c^2+u} \frac{du}{dz} \right) \right]$$

Examinemos, separadamente, las dos partes del segundo miembro, empezando por la integral. Para ello consideremos la integral indefinida.

$$\int \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Podemos escribirla de este modo

$$\int \frac{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) + (a^2+\lambda)(e^2+\lambda) + (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} d\lambda;$$

pero el numerador es evidentemente la diferencial con relación á λ de la cantidad que está bajo el radical, es decir,

$$\int \frac{d\,[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]}{[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{\frac{3}{2}}};$$

ó más sencillamente,

$$\int \frac{d\varphi(\lambda)}{[\varphi(\lambda)]^{\frac{3}{2}}} = \int [\varphi(\lambda)]^{-\frac{3}{2}} d\varphi(\lambda) = \frac{[\varphi(\lambda)]^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

Y formando la integral definida.

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right]_u^\infty = \left(o + \frac{2}{\sqrt{\varphi(u)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\varphi(u)}}.$$

Sustituyendo en ΔU_e, obtendremos

$$\Delta U_e = 2\pi abc\rho$$

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{\varphi(u)}} + \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\left(\frac{x}{a^2+u}\frac{du}{dx} + \frac{y}{b^2+u}\frac{du}{dy} + \frac{z}{a^2+u}\frac{du}{dz}\right)\right]$$

y sacando $\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}$ factor común

$$\Delta U_e = \frac{2\pi abc\rho}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

$$\left[\frac{x}{a^2+u}\frac{du}{dx} + \frac{y}{b^2+u}\frac{du}{dy} + \frac{z}{c^2+u}\frac{du}{dz} - 2\right].$$

Para ver si el segundo miembro es *cero,* calculemos los tres primeros términos, substituyendo en ellos los valores de

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dx}.$$

Hemos visto que el valor de $\frac{du}{dx}$ era

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{a^2+u} \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}}$$

Análogamente hallaríamos

$$\frac{du}{dy} = \frac{2y}{b^2 + u} \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}}$$

y

$$\frac{du}{dz} = \frac{2z}{c^2 + u} \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(b^2+u)^2}}$$

Con lo cual el valor

$$\frac{x}{a^2 + u} \frac{du}{dx} + \frac{y}{b^2 + u} \frac{du}{dy} + \frac{z}{c^2 + u} \frac{du}{dz}$$

que entra en la expresión ΔU_e se convierte en

$$\left[\frac{2x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{2y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{2z^2}{(c^2+u)^2}\right] \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}}$$

y suprimiendo el factor común

$$\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}$$

queda tan sólo 2.

Y se tiene por fin

$$\Delta U_e = 2\pi abe\rho(2 - 2) = o.$$

Resulta, por lo tanto, que la función U_e cumple con todas las condiciones necesarias para poder ser la potencial del elipsoide en cualquier punto del espacio exterior.

Porque U_e hemos visto que es finita en dicho espacio y bien determinada.

Sus tres derivadas primeras

$$\frac{d\,U_e}{dx},\ \frac{d\,U_e}{dy},\ \frac{d\,U_e}{dz}$$

también lo son en dicho dominio.

También las derivadas segundas

$$\frac{d^2 U_e}{dx^2},\ \frac{d^2 U_e}{dy^2},\ \frac{d^2 U_e}{dz^2}$$

son finitas, y son bien determinadas en el espacio exterior al elipsoide.

Y, por fin, la suma de estas tres derivadas segundas es cero; de suerte que en todo el espacio exterior la función U_e satisface á la ecuación de Laplace

$$\Delta\, U_e = o.$$

Ahora debemos hacer un estudio análogo para U_i.

*
* *

Hemos dicho, que se suponía que para un punto P' interior al elipsoide, la potencial era

$$U = \pi abc\rho \int_o^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Podemos demostrar, en primer lugar, que una vez efectuada la integración, el segundo miembro es una función de x, y, z, y la demostración es aún más sencilla que para U_e, porque aquí los límites son o é ∞, de suerte que efectuada la integración hay que sustituir, en vez de λ estas dos cantidades, y la integral definida no contendrá más que x, y, z.

Demostremos ahora que U_i es una cantidad finita, y aquí

á la inversa de lo que acabámos de decir, la demostración no es tan sencilla como para U_e.

Y, en efecto; si aplicásemos aquella demostración, llegaríamos á este resultado: que U_i es menor que la cantidad

$$\frac{2}{\sqrt{u}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{u^3}}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Pero en aquella demostración el resultado que precede era finito, porque lo era u límite inferior de la integral.

Y en este caso $u = o$ y la forma de la expresión es ∞, de suerte que lógicamente no puede decirse que U_i sea una cantidad finita, porque no hemos demostrado que sea inferior á una cantidad finita determinada.

Será preciso que recurramos á un artificio, que por otra parte nos parece sumamente sencillo.

Descompondremos la integral en otras dos: una desde o á u_o, siendo u_o una cantidad finita cualquiera, y la otra parte desde u_o á ∞.

Es decir, suprimiendo todo lo que está bajo el signo integral para abreviar la escritura

$$\int_o^\infty = \int_o^{u_o} + \int_{u_o}^\infty.$$

La segunda integral es evidentemente finita, porque se le puede aplicar la fórmula que acabamos de citar hace un momento, con sólo substituir en vez de u el valor u_o.

Luego si probamos que la primera integral es también finita, como la suma de dos cantidades finitas lo es también, habremos demostrado lo que nos proponíamos.

Consideremos, pues, la integral

$$\int_o^{u_o} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

Haciendo positivos todos los términos, aumenta la integral, y suprimiendo λ en los dominadores, éstos disminuyen y los quebrados aumentan, de suerte que la integral anterior será menor que la cantidad

$$\int_o^{u_o}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{d\lambda}{abc}$$

que vendrá á ser lo que en el lenguaje modernísimo se llama una *mayorante,* y valga la palabra por extraña que sea.

Sacando fuera de la integral todos los valores constantes, vendremos á parar á este resultado:

$$\frac{1}{abc}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\int_o^{ho} d\lambda=\frac{1}{abc}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\lambda\right)_o^{u_o}=\frac{1}{abc}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)u_o$$

cantidad evidentemente finita, porque lo es u_o y lo son $x, y; z,$ puesto que se trata de puntos interiores al elipsoíde.

Queda, pues, demostrado que U_i es una cantidad finita.

Obtengamos ahora sus derivadas primeras, por ejemplo, $\frac{d\,U_i}{d\,x}$, para lo cual, como en este caso los límites son constantes, basta diferenciar bajo el signo integral; es decir, que en

$$U_i=\pi abc\rho\int_o^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

basta diferenciar bajo la integral

$$1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}$$

y tendremos

$$\frac{d\,U_i}{dx} = -2\pi abc\rho x \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

Del mismo modo obtendremos las otras dos derivadas primeras

$$\frac{d\,U_i}{dy} = -2\pi abc\rho y \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$\frac{d\,U_i}{dz} = -2\pi abc\rho z \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

Que estas derivadas son finitas se demostraría sin dificultad por los métodos que ya hemos indicado; es decir, dividiendo la integral en dos partes y demostrando que son finitas ambas.

Para la que se integra entre u_o é ∞, aumentaríamos todos los terminos, suprimiendo a^2, b^2, c^2 en los denominadores, y como al integrar λ entraría en el donominador daría un un valor finito para u_o y un valor o para ∞.

Para la integral entre o y u_o aumentaríamos todos los elementos diferenciales suprimiendo λ, que es positivo en los denominadores, y quedaría una cantidad finita multiplicada por la integrad de $d\lambda$ entre o y u_o, que es cantidad finita también.

Queda, pues, demostrado, que las tres derivadas primeras son finitas.

Pasemos á las derivadas segundas, que se obtienen fácilmente, puesto que la integral no contiene ni x, ni y, ni z, y estas variables entran fuera como factor.

Así, de

$$\frac{d\,U_i}{dx} = -2\pi abc\rho x \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

deduciremos

$$\frac{d^2 U_i}{dx^2} = -2\pi a b c \rho \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

y del mismo modo

$$\frac{d^2 U_i}{dy^2} = -2\pi a b c \rho \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$\frac{d^2 U_i}{dz^2} = -2\pi a b c \rho \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

y sumando

$$\frac{d^2 U_i}{dx^2} + \frac{d^2 U_i}{dy^2} + \frac{d^2 U_i}{dz^2} = -2\pi a b c \rho$$

$$\int_o^\infty \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Como las derivadas segundas se expresan por el producto de cantidades constantes y de integrales que acabamos de demostrar que son finitas y bien determinadas, podremos afirmar lo mismo de las tres derivadas segundas en cuestión.

Para ver si U_i satisface ó no á la ecuación de Laplace, tenemos que calcular el valor del segundo miembro y ver si se reduce ó no á cero.

Pero esta integral, como integral indefinida, ya la estudiamos en esta misma conferencia, y vimos que su valor era

$$-\frac{2}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

sólo falta que le apliquemos los límites o é ∞, y resultará

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right]_o^\infty = \left[-\frac{2}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\right]_o^\infty = \frac{2}{abc}$$

resulta, pues,

$$\frac{d^2 U_i}{dx^2} + \frac{d^2 U_i}{dy^2} + \frac{d^2 U_i}{dz^2} = -2\pi abc\rho \times \frac{2}{abc} = -4\pi\rho$$

Luego la función U_i satisface, no á la ecuación de Laplace, pero sí á la ecuación de Poisson.

$$\Delta U_i = -4\pi\rho.$$

Vemos, por lo tanto, que U_i cumple con las condiciones exigidas para que represente la potencial interior del elipsoide.

U_i es finita y bien determinada dentro del elipsoide, y también lo son, en el mismo dominio, sus derivadas primeras y segundas.

Por último, U_i satisface á la ecuación de Poisson.

Así deducimos que el conjunto de las dos funciones U_e y U_i, la primera para el espacio exterior, la segunda para el espacio interior; este conjunto, repetimos, representa una función U de x, y, z, que es la potencíal del elipsoide en todo el espacio.

Pero todavía la demostración no está completa, algo falta y muy esencial, tan esencial, que sin esta condición la demostración es de todo punto deficiente, como procuraremos poner en claro en la conferencia inmediata.

IV.—Fototropia y fotoluminescencia.

(Continuación.)

ESTUDIO PRELIMINAR POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

Una observación queda por hacer, y se refiere á la temperatura del horno empleado, que era de continuo el horizontal, sistema Flechter, con gran llama lateral de gas y entrada de suficiente aire, en el mismo mechero; tiene capacidad para cinco crisoles, pero aun con tiro bastante y perfecto y combustión total, no se ha conseguido nunca la repartición uniforme del calor en el interior del horno, y pueden señalarse diferentes regiones, siendo la menos caliente la más alejada del mechero. Sólo al cabo de algunas horas se consigue una igualdad relativa, y esto influye bastante en la sensibilidad de los sulfuros para la luz y en la intensidad de su fosforescencia; también influye, en cierta medida, en su fototropía, permitiendo establecer una primera regla, la cual habrá de ser confirmada con ulteriores experimentos, que liga el cambio de color y la temperatura á que han sido formados los cuerpos de ella susceptibles con mayores ó menores facilidades, que en ello hay muchos grados.

Jamás ha ocurrido, en los actuales experimentos, que haya resultado fototrópico ninguno de los sulfuros formados en las regiones de menor temperatura del horno; muy al contrario de ello, parece ser condición de tal fenómeno que los cuerpos capaces de presentarlo hayan de formarse donde es mayor el calor y más sostenido, y esto constituye un primer dato general del que es menester partir para ulteriores investigaciones. Y debe notarse, al propio tiempo, cómo no

es la mayor temperatura la indispensable para lograr el óptimo de la sensibilidad respecto de la luz y de la intensidad de la luminescencia, y se prueba en el hecho de haberlas obtenido en su grado máximo en el sulfuro de calcio, que en la serie de los cinco preparados para los nuevos experimentos se ha formado en el crisol más alejado del foco de calor; su luminescencia es de magnífico color verde, de gran intensidad y duración y ejerce oficios de materia activa un miligramo de sulfato de cinc diluído en cien gramos de carbonato de calcio puro. No se altera el blanquísimo color de la masa, sometiéndola durante mucho tiempo á intensa y directa iluminación.

Varias veces había experimentado con diversos sulfuros fotoluminescentes, en los cuales los disolventes no eran sulfuros de calcio, sin haber observado en uno sólo el menor cambio del color general de su masa, blanco más ó menos agrisado, y la atención convertíase siempre á inquirir variaciones de coloración, mientras la masa, apenas extraída de los crisoles, es sometida á aquellas leves oxidaciones en contacto del aire, cuya eficacia, respecto de la fotoluminescencia, tengo de antiguo demostrada. En la ocasión actual he sido más afortunado, porque obtuve sulfuros de estroncio muy fototrópicos, y al propio tiempo bastante sensibles á la luz y luminescentes con intensidad media y coloraciones verdosas y violadas bastante claras. Procedían de las regiones más calientes del horno, y así demuéstrase la necesidad de una temperatura extremada para su formación, y el caso es análogo en tal respecto al de los sulfuros de calcio, cuyos cuerpos conservan, al cabo de catorce años, los primeros estudiados, sin disminuir nada de intensidad, la condición de cambiar de color en cuanto son sometidos á las acciones de la luz directa.

Logrados, en la manera que es dicha, dos sulfuros fototrópicos con distinto disolvente, ya puede conjeturarse cómo la propiedad examinada tiene cierta generalidad y no es pri-

vativa de aquellas disoluciones sólidas luminescentes en las que es diluyente el sulfuro de calcio de determinada procedencia; y ya en el terreno de las hipótesis podría aventurarse el admitir, siquiera de modo provisional y con todas las reservas necesarias que, en rigor, la naturaleza del disolvente no influye en la fototropia de los sulfuros fotoluminescentes de ella dotados, conforme tampoco influyen los métodos de obtención y goza de cierta independencia de la propia fosforescencia, conforme ha quedado bien demostrado en experimentos anteriores (*). Ahora resalta más la generalidad del hecho en cuanto es notado en dos disoluciones sólidas, si análogas en cuanto á su constitución y modo de formarlas, bien diferentes mirando al disolvente, aunque existen no pocas semejanzas en todos los órdenes entre el calcio y el estroncio y sus compuestos respectivos. Hay, por lo menos, dos clases de sistemas fototrópicos que son disoluciones sólidas, en extremo diluídas, de una materia activa ó fosforógeno, en los cuales hacen oficios de disolventes los sulfuros de calcio y de estroncio y se han formado ó constituído á temperatura muy elevada, como se dijo antes.

Ya cabe precisar más todavía las propiedades de estos síntomas fototrópicos y decir que los hasta el presente estudiados son siempre de color blanco, á lo sumo ligeramente agrisado, cuando se miran con luz difusa y no intensa; pues el cambio de color es manifiesto en el momento de recibir fuerte iluminación directa. Significa el hecho que los disolventes han de ser diáfanos para la luz y no absorberla en modo alguno; antes bien, deben reflejarla lo más posible y más adelante ha de verse como así lo piden las mismas condiciones del fenómeno fototrópico, de naturaleza reversible, casi ins-

---

(*) Véase mi trabajo: CHANGEMENTS DE LA COULEUR DU SULFURE DE CALCIUM SOUS L'ACTION DE LA LUMIÉRE.—*Archives des Scien. Physiques et Naturelles.*—IVéme. periode. XXV, pág. 15. Géneve, 1908.

tantáneo y dependiente, en mucha parte, de la naturaleza de las radiaciones luminosas excitadoras.

Más importante es, en mi entender, el papel del fosforógeno ó materia activa. Cinco distintos han sido empleados en las tres series de cuerpos fosforescentes últimamente obtenidos, y eran sencillas combinaciones cloruradas de los metales manganeso, bismuto, antimonio, cobre y cinc, los cuales producen muy variados efectos de fotoluminescencia, que no he de examinar en este momento, con variables intensidades. Para poder compararlos mejor, sobre partir de iguales primeras materias (carbonatos puros y en absoluto exentos de hierro) emplearlos en las mismas cantidades (50 gramos de cada vez) y formarlos de la propia manera (acción de la flor de azufre sobre los dichos carbonatos), las proporciones de los fosforógenos referidos fueron también iguales, y de tal suerte, que cada sistema contenía un miligramo del metal correspondiente por 100 gramos de la primera materia. Sometidas las mezclas, en iguales condiciones de tiempo, á las acciones del calor, se recogieron, luego de enfriados los crisoles, masas blancas, apenas agrisadas las que contenían bismuto, antimonio y cobre, todas impresionables por la luz en mayor ó menor grado y fosforescentes con intensidad y duración variables; pero no todas fototrópicas, pues la condición de cambiar de color la tienen sólo aquellas diluciones sólidas en las cuales es materia activa ó fosforógeno el manganeso, de cuyo metal parece ser cualidad privativa.

Acerca de ello tengo observados dos hechos curiosos que conviene puntualizar. Refiérese el primero á un sulfuro de estroncio con manganeso por materia activa; es muy blanco y pulverulento, está obtenido en la región más caliente del horno, habiendo sostenido la temperatura del rojo vivo durante seis horas consecutivas; impresionable por la luz, pero no muy sensible, necesita 1′30″ para excitarse y dar luego en la obscuridad fosforescencia de color amarillo de oro

de intensidad y duración medias; cambia pronto de color y adquiere á la luz viva, sin insolación, color rosáceo con marcados tonos violáceos, no muy fuerte, y lo pierde en seguida para recobrar el primitivo en cuanto pasa de la iluminación fuerte y directa á la luz difusa poco intensa; pero conserva la cualidad de cambiar de color en cuanto aumenta la intensidad luminosa de las radiaciones excitadoras.

No es menor el interés del segundo. Trátase de un sulfuro de calcio obtenido en idénticas condiciones del anterior, y con el manganeso por fosforógeno; es muy blanco, menos pulverulento que el de estroncio; impresiónalo la luz con solo 45″ de iluminación directa é intensa, sin someterlo á los rayos solares, para dar luego en la obscuridad fuerte y brillante luminescencia de color violeta muy claro, que va disminuyendo hasta anularse al cabo de 15′. Este sulfuro es fototrópico en sumo grado; apenas sometido á las acciones de enérgica y directa iluminación, mas no al sol, tórnase de acentuado color rojizo violáceo, que desaparece, recobrando la primitiva blancura, muy luego de ser restituído á la luz difusa. De los otros sulfuros fotoluminescentes de las series del calcio y del estroncio, para otros intentos que ya se dirán, con todo cuidado obtenidos y cuyo fosforógeno no es el manganeso, puede asegurarse que ninguno de ellos es fototrópico. A la vista de tales resultados, se procedió á examinar los antiguos sulfuros de calcio que lo eran en diferentes grados; vióse que, á pesar de los años transcurridos conservaban, sin estar aminorada, la propiedad de cambiar de color apenas reciben las acciones de la luz, y ensayados convenientemente, se demostró en todos ellos, sin excepción alguna, la presencia del manganeso, procedente sin duda de la cal viva ó de los carbonatos de calcio, de variado origen utilizados, como primera materia en los experimentos primordiales.

*
* *

Bastan los hechos relatados, unidos á las observaciones anteriormente publicadas, para establecer las condiciones del fenómeno de la fototropia tal como lo presentan los sulfuros metálicos donde hasta el presente ha sido estudiado. Se advierte, en primer término, su generalidad, y como no es privativo del sulfuro de calcio, en cuanto también fué notado, con bien marcados caracteres, en el de estroncio, y no por accidente de un sólo ejemplar, sino cuantas veces ha sido preparada, en idénticas condiciones, la mezcla fotoluminescentes, y el fenómeno reviste las asignadas desde el principio como características suyas, en particular la de reversibilidad total y completa.

Otra condición interesante es la de ser á la contínua blancos, ó si acaso ligeramente agrisados, los sulfuros fototrópicos, lo cual significa que no han de absorber de un modo sensible las radiaciones luminosas. Por otra parte, deben ser obtenidos á muy elevada temperatura durante bastantes horas sostenida, como si el calor rojo vivo fuera invertido en trabajos especiales de disociación molecular y en transmitir, con sus energías, determinadas actividades á los elementos aislados y libertados de toda combinación. En vista de los hechos observados no parece decisiva en el fenómeno la particular naturaleza del diluyente, en cuanto ni en la intensidad, ni en la manera de producirse hay diferencia de ninguna clase, ya lo forme el sulfuro de calcio ó lo constituya el sulfuro de estroncio. No es lo mismo tocante al fosforógeno, y en tal respecto parece la fototropia privativa del manganeso para semejantes oficios empleado, y ello puede relacionarse con la influencia de este metal en acciones químicas de diversos órdenes; recuérdese, si no, su intervención en las peculiares de las oxidasas y en general sus propiedades de catalizador, que llegan hasta determinar el mejor desarrollo de algunos microrganismos. Y no huelga asimismo traer á cuento la riqueza de sus combinaciones oxigenadas, su variabilidad y las múltiples ocasiones de su desdoblamiento

para generar luego distintos modos de agrupaciones moleculares de variadas clases; tratándose de compuestos de manganeso las fotolisis y las fotocatalisis, ambas reversibles, tienen fácil explicación, atendiendo á su propia naturaleza y á la facilidad de sus cambios químicos.

Conviene notar que, en el caso presente, es la fototropia un cambio superficial y las coloraciones rojizas y violadas no pasan de la capa externa en inmediato contacto de la luz, y no hay aquella autoexcitación señalada en mis estudios acerca de la fosforescencia de los sulfuros alcalinoterrosos y el retorno al primitivo color blanco se efectúa en el mismo punto de aminorar la intensidad de la iluminación ó si es muy difusa. Tiene esto último, en cuanto á la manera de producirse, ciertas analogías y semejanzas con el caso más general y conocido de la fluorescencia.

Probé los efectos de los rayos catódicos sobre los sulfuros fototrópicos, y gracias á la amabilidad de mis queridos amigos los Sres. Hauser y del Campo, y con su cariñosa ayuda pude realizar algunos experimentos tocante á este interesantísimo particular. Fué en todos ellos manifiesto el cambio de color, más ó menos acentuado, según los casos; pero nunca tan intenso como empleando la fuerte iluminación directa. En cambio, observé magníficos efectos de luminescencia, no duraderos en cuanto cesaban al cesar la acción de aquellas radiaciones, lo cual hace pensar que se trata aquí también de casos particulares de fluorescencia y no de verdadera fotoluminescencia; de todas suertes era preciso consignar el hecho de las acciones fototrópicas de los rayos catódicos. Resta sólo examinar las de los rayos ultravioleta para completar la parte de mi trabajo referente á los excitadores de los cambios de color de los sulfuros alcalino terrosos que he preparado, y entonces será el momento de dar cuenta, con todos sus pormenores, de los experimentos realizados y de aducir pruebas para una teoría de los fenómenos observados.

Dejando su descripción en suspenso, pues en el presente estudio sólo van consignados los preliminares de más extenso trabajo, cuya mayor parte ha de ocuparla el relato de los hechos, séame permitido terminar estableciendo los principios de una hipótesis, en mi entender bastante racional y no desprovista de fundamento. Su punto de partida es la propia constitución de los sistemas fotoluminescentes; compónense cuantos fueron objeto de mis investigaciones de un sulfuro metálico, de bario, estroncio ó calcio, en cuya masa, adrede impurificada por levísimas proporciones de cloruro y carbonato de sodio, se ha difundido la materia activa ó fosforógeno, que es casi siempre un compuesto de metal pesado, en cantidad que no pasa nunca de algunos milígramos por ciento; mas no basta la mezcla íntima de las materias dichas; es absolutamente preciso que la difusión de la substancia activa en la masa de sulfuro se lleve á cabo en el momento de formarse éste, y á elevada temperatura largo tiempo sostenida. Así son los cuerpos fosforescentes disoluciones sólidas muy diluídas.

Quizá atendiendo á las relaciones de las respectivas masas del diluyente y del fosforógeno sea aplicable á ellas la general doctrina de las soluciones diluídas, en cuyo caso es perfectamente admisible que la materia activa se halle disociada, lo cual está justificado, entre otras razones, por la intervención del calor en la formación de los sistemas sensibles á la luz, y su misma excitabilidad pudiera ser debida á la actividad adquirida por los elementos disociados del fosforógeno, cuyas partículas, con sus cargas eléctricas correspondientes, hállanse poseídas de especialísimas movilidades. Ya en el terreno de las conjeturas, asimilando nuestros sistemas á las soluciones diluídas, que en rigor no son verdaderas soluciones, se puede admitir que, para los efectos de la fototropia cuando menos que á la continua son provocados por las radiaciones de menor longitud de onda, el fosforógeno actúa como si estuviera iontizado, respondiendo

á cierto estado de equilibrio el color blanco de la masa, inalterable en un ambiente luminoso pobre de rayos ultravioleta.

Expuesto el sistema á una iluminación intensa, rica de ellos, dotados, conforme es bien sabido, de gran poder químico, éste se manifiesta, tornando los elementos del fosforógeno al estado molecular sólo en los puntos donde incidan; pues no son penetrantes, y de ahí el cambio superficial del color, únicamente posible si la materia activa es el manganeso y no otro metal, á consecuencia de la facilidad de transformación de sus compuestos, demostrada muy en particular en el caso de los fermentos oxidantes. Mas el nuevo cambio sólo subsiste mientras actúan las energías provocadoras, y al cesar sus acciones, recobra el sistema el estado primitivo y las coloraciones desaparecen al punto. Por eso he calificado de reversibles las fototropias observadas en los sulfuros alcalino-terrosso fotoluminescentes, cuyo fosforógeno lo constituye un compuesto de manganeso, y la conjetura, esbozada con todas las reservas precisas, ha de ser considerada, no como hipótesis definitiva y cerrada, sino á modo de punto de partida para una teoría que ha menester del apoyo de muchos experimentos y prolongadas investigaciones.

Madrid-Mayo 1912.

V. — Constitución, análisis y preparación, con riqueza dada en SO_3, del ácido sulfúrico fumante.

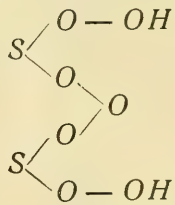
Por José Prats Aymerich.

I

Preliminares

Al combinarse el anhídrido sulfúrico con el agua ó con el ácido sulfúrico, puede dar lugar á varios compuestos, perfectamente definidos y determinados, unos y otros de constitución no bien fijada aun. Así, al combinarse el agua con cantidades crecientes de anhídrido sulfúrico, se originan los diversos hidratos de ácido sulfúrico, trihidratado, dihidratado y monohidratado ó ácido sulfúrico de fórmula SO_4H_2, que contiene 81,6326 % de SO_3. Pero el anhídrido sulfúrico se disuelve, ó mejor, se combina con el ácido SO_4H_2 en proporciones diversas, originando una especie química bien definida, que es el *ácido disulfúrico* ó *pirosulfúrico*, resultando de la combinación de dos moléculas de anhídrido con una de agua:

$$SO_3 + SO_4H_2 = S_2O_7H_2$$
$$2\,SO_3 + H_2O = S_2O_7H_2$$



y el *ácido sulfúrico fumante*, que es en definitiva una combinación del SO_3 con cantidades variables de SO_4H_2.

Como se ve, pues, el ácido disulfúrico ó pirosulfúrico, llamado también *ácido sulfúrico de Nordhausen*, no es más que un caso particular del ácido sulfúrico fumante: en éste, la cantidad de anhídrido sulfúrico total varía de 81,6323 % (ácido puro SO_4H_2) á 100 % (anhídrido puro SO_3); en el

disulfúrico la cantidad de SO_3 total es de 89,8875 %, según se deduce de la regla de tres:

$$178 : 160 = 100 : x; \qquad x = 89{,}8876\ \%.$$

El ácido de Nordhausen, llamado así porque en esta localidad fué donde se preparó por primera vez, se obtenía en la fábrica de J. D. Stark por calcinación del sulfato ferroso previamente peroxidado; para ello se exponían los esquistos piritosos al aire libre en grandes montones, con canales interiores para que pudiese circular el aire y oxidar la pirita con ayuda del agua, con la que se regaban frecuentemente. La calcinación efectúa la descomposición del modo siguiente:

$$(SO_4)_3 Fe_2 = Fe_2 O_3 + 3\, SO_3.$$

cuyo SO_3, recogido en SO_4H_2, produce el ácido fumante, mientras que el sulfato ferroso daría solamente parte de SO_3 con producción de SO_2.

$$2\, SO_4 Fe = Fe_2 O_3 + SO_2 + SO_3$$

La industria del ácido de Nordhausen ha perdido actualmente toda su importancia desde el descubrimiento del procedimiento por contacto; pero, en cambio, es cada día mayor la producción del ácido sulfúrico fumante en general, que alcanza hoy la cifra de más de 100.000 toneladas anuales, cantidad no despreciable al lado de la de 4,5 millones de toneladas, que es la producción mundial anual del ácido sulfúrico comercial.

Un aumento tan considerable en la producción reconoce como causa el incremento creciente cada día de las aplicaciones de dicho ácido, y como quiera que la técnica del mismo es delicada, que su empleo requiere ciertas precauciones, varios cálculos y casi siempre análisis, y que los procedimientos empleados son largos y tortuosos ó peligrosos, el autor ha realizado varios trabajos para lograr mayor sencillez en su manejo, así como para fijar su constitución.

En esta Memoria, por lo tanto, no se hará una Monografía completa del ácido sulfúrico fumante, sino un estudio del mismo en cuanto se refiera á la constitución y manera de manejarle en los laboratorios. Adviértase que cuanto se consigna en este trabajo es absolutamente original de su autor, excepción hecha de algunos datos numéricos, de los cuales se citará el origen (autor y obra ó revista). No es, pues, de extrañar que no se mencionen los métodos de contacto para la obtención del ácido fumante, que pueden verse en multitud de obras modernas (*), ni sus aplicaciones á la sulfonación, que pueden estudiarse en las obras especiales y en las patentes (**).

II

Propiedades

Solamente citaremos aquellas propiedades que interesen á nuestro intento, comenzando por las tablas de Gnehm (***) acerca de la riqueza en SO_3 y SO_4H_2 del ácido sulfúrico fumante, de las cuales hemos construído y estudiado unos interesantes gráficos. Luego mentaremos las tablas de Knietsch de los puntos de fusión y de las densidades (****), con las cuales hemos construído los gráficos que nos han de servir en el capítulo siguiente para fijar la constitución del ácido fumante, y, por último, la tabla de los puntos de ebullición, que también allí citaremos.

Las demás propiedades pueden encontrarse en la *Chemische Industrie* (1902, 106), donde R. Knietsch da unas tablas acerca de los calores específicos, calores de disolución, presión del vapor, resistencia eléctrica, velocidad de salida, etc.

(*) O. Dammer: 1910, *Technologie der Neuzeit,* t. I, p. 182.—H. Moissan: 1904, *Chimie minérale,* I, 435.—C. Chabrié: 1905, *Chimie appliquée,* I, 183. —J. Prats.— *Química industrial inorgánica.*

(**) H. Wichelhaus: 1911, *Sulfurieren, alkalischmelzen, esterifizieren,* 43.—Winther: 1909, *Patente der organische Chemie,* I y II.

(***) R. Gnehm: 1902, *Taschenbuch für die Farberei und Farbenfabrikation.*

(****) H. Wichelhaus: 1911, *Sulfurieren, alkalischmelze,* etc.

Tablas de la riqueza del ácido sulfúrico fumante en SO_3 y en SO_4H_2.

Anhidrido sulfúrico total %	Ácido sulfúrico %	Anhidrido sulfúrico libre %	Anhidrido sulfúrico total %	Ácido sulfúrico %	Anhidrido sulfúrico libre %
81,6326	100	0	89,7142	56	44
81,8163	99	1	89,8979	55	45
82,0000	98	2	90,0816	54	46
82,1836	97	3	90,2653	53	47
82,3674	96	4	90,4489	52	48
82,5510	95	5	90,6326	51	49
82,7346	94	6	90,8163	50	50
82,9183	93	7	91,0000	49	51
83,1020	92	8	91,1836	48	52
83,2857	91	9	91,3673	47	53
83,4693	90	10	91,5510	46	54
83,6530	89	11	91,7346	45	55
83,8367	88	12	91,9183	44	56
84,0204	87	13	92,1020	43	57
84,2040	86	14	92,2856	42	58
84,3877	85	15	92,4093	41	59
84,5714	84	16	92,6530	40	60
84,7551	83	17	92,8367	39	61
84,9387	82	18	93,0204	38	62
85,1224	81	19	93,2040	37	63
85,3061	80	20	93,3877	36	64
85,4897	79	21	93,5714	35	65
85,6734	78	22	93,7551	34	66
85,8571	77	23	93,9387	33	67
86,0408	76	24	94,1224	32	68
86,2244	75	25	94,3061	31	69
86,4081	74	26	94,4897	30	70
86,5918	73	27	94,6734	29	71
86,7755	72	28	94,8571	28	72
86,9591	71	29	95,0408	27	73
87,1428	70	30	95,2244	26	74
87,3265	69	31	95,4081	25	75
87,5102	68	32	95,5918	24	76
87,6938	67	33	95,7755	23	77
87,8775	66	34	95,9591	22	78
88,0612	65	35	96,1428	21	79
88,2448	64	36	96,3265	20	80
88,4285	63	37	96,5102	19	81
88,6122	62	38	96,6958	18	82
88,7959	61	39	96,8775	17	83
88,9795	60	40	97,0612	16	84
89,1632	59	41	97,2448	15	85
89,3469	58	42	97,4285	14	86
89,5306	57	43	97,6122	13	87

Anhídrido sulfúrico total %	Ácido sulfúrico %	Anhídrido sulfúrico libre %	Anhídrido sulfúrico total %	Ácido sulfúrico %	Anhídrido sulfúrico libre %
97,7959	12	88	99,0816	5	95
97,9795	11	89	99,2653	4	96
98,1632	10	90	99,4489	3	97
98,3469	9	91	99,6326	2	98
98,5306	8	92	99,8163	1	99
98,7142	7	93	1.00,0000	0	100
98,8979	6	94			

Gráfico de las tablas anteriores.—Tomando, como indica la figura 1.ª, el eje de abscisas proporcional á la cantidad de SO_3 libre % y las ordenadas proporcionales á la cantidad

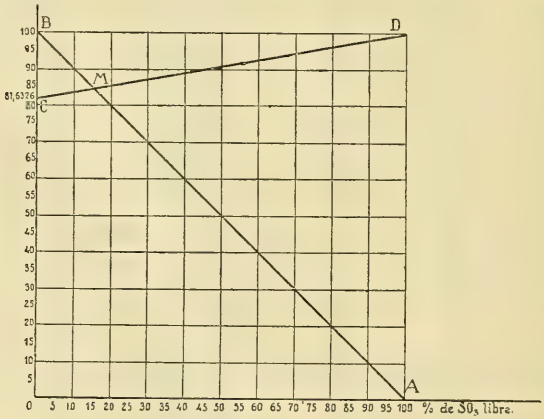


Figura I.ª

de SO_4H_2, la línea AB representará los valores del ácido fumante en SO_4H_2, en función de la cantidad de SO_3 libre. Esta línea ha de ser necesariamente una recta, puesto que representando por x los valores de SO_3 libre y por y los de SO_4H_2, la ecuación

$$y = 100 - x$$

representa una recta, cuyas coordenadas en el origen son:

$$\begin{cases} y = 100 \\ x = 100, \end{cases}$$

que forma, con el eje de abscisas, un ángulo dado por la ecuación

$$\operatorname{tg} \alpha = -1; \qquad \alpha = 45^\circ.$$

Pero si se toman las mismas abscisas y las ordenadas proporcionales á la cantidad correspondiente de SO_3 % total, se obtiene la línea CD que ha de ser también una recta. En efecto,

$$(SO_3 \text{ total}) = (SO_3 \text{ del } SO_4H_2) + (SO_3 \text{ libre})$$

$$y = \frac{40}{49}\, y + x = \frac{40}{49}\,(100 - x) + x$$

$$y = \frac{9}{49}\, x + \frac{4000}{49}$$

ecuación evidentemente de una recta, cuyas coordenadas en el origen son:

$$\begin{cases} y = \dfrac{4000}{49} = 81{,}6326 \\ x = -\dfrac{4000}{9} = -444{,}44 \end{cases}$$

El ángulo que forma esa recta CD con el eje de las x es:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{9}{49}; \qquad \alpha' = 10^\circ\, 24'\, 29''.$$

Las dos rectas AB y CD se cortan en el punto M, cuyas coordenadas, deducidas de las ecuaciones

$$\begin{cases} y = 100 - x \\ y = \dfrac{9}{49}\, x + \dfrac{4000}{49} \end{cases}$$

serán:

$$M \begin{cases} x = 15{,}517 \\ y = 84{,}483 \end{cases}$$

lo cual indica que para 15,5 % de SO_3 libre las cantidades de SO_4H_2 % y SO_3 total % son iguales á 84,5.

El ángulo de las dos rectas AB y CD será evidentemente igual á la suma

$$\alpha + \alpha' = 45^\circ + 10^\circ\, 24'\, 29'' = 55^\circ\, 24'\, 29''$$

Por el cálculo se halla:

$$\operatorname{tg} AMD = \frac{1 + \frac{9}{49}}{1 - \frac{9}{49}} = \frac{58}{40} = \frac{29}{20};\ AMD = 55^\circ 24' 30''.$$

Tabla de los puntos de fusión del ácido sulfúrico fumante.

SO_3 % libre.	Punto de fusión en grados centígrados.	SO_3 % libre.	Punto de fusión en grados centígrados.
0	+ 10,0	55	+ 18,4
5	+ 3,5	60	+ 0,7
10	— 4,8	65	+ 0,8
15	— 11,2	70	+ 0,9
20	— 11,0	75	+ 17,2
25	— 0,6	80	+ 22,0
30	+ 15,2	85	+ 33,0 ... + 27
35	+ 26,0	90	+ 34,0 ... + 27,7
40	+ 33,8	95	+ 36,0 ... + 26
45	+ 34,8	100	+ 40,0 ... + 17,7
50	+ 28,5		

Los números 27, 27,7, 26, 17,7 colocados además en los puntos correspondientes á los ácidos fumantes de 85, 90, 95 y 100 % respectivamente, indican los puntos de fusión del ácido recién obtenido, y probablemente el cambio de punto de fusión después de algún tiempo es debido á una polimerización de aquél.

Gráfico de la tabla anterior.—Es el representado en la figura 2.ª, tomando las abscisas proporcionales á las canti-

dades de SO_3 libre % y las ordenadas proporcionales á las temperaturas de fusión. La curva presenta dos mínimos, á

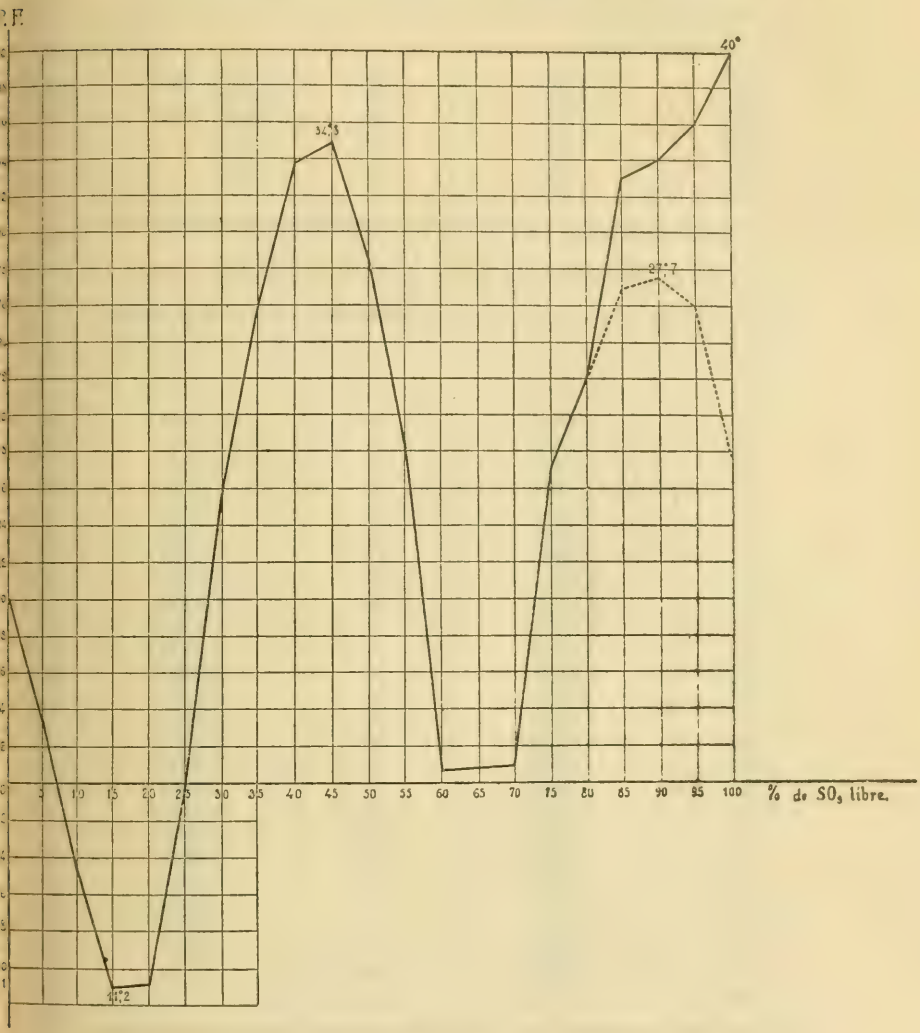


Figura 2.ª

— 11°,2 (15 % de SO_3 libre) y á + 0°,7 (60 % de SO_3 libre), y dos máximos, á 34°,8 (45 % de SO_3 libre) y á 27°,7 (90 % de SO_3 libre).

Tabla de la densidad del ácido sulfúrico fumante á 15° C.

SO_3 libre %	Densidad á 15° C.	SO_3 libre %	Densidad á 15° C.
0	1,850	60	2,020 *(máximo)*
10	1,888	70	2,018
20	1,920	80	2,008
30	1,957	90	1,990
40	1,979	100	1,984
50	2,009		

Tabla de la densidad del ácido sulfúrico fumante á 35° C.

SO_3 libre %	Densidad.	SO_3 libre %	Densidad.
0	1,8186	52	1,9749
2	1,8270	54	1,9760
4	1,8360	56	1,9772
6	1,8425	58	1,9754
8	1,8498	60	1,9738
10	1,8565	62	1,9709
12	1,8627	64	1,9672
14	1,8692	66	1,9636
16	1,8756	68	1,9600
18	1,8830	70	1,9564
20	1,8919	72	1,9502
22	1,9020	74	1,9442
24	1,9092	76	1,9379
26	1,9158	78	1,9315
28	1,9220	80	1,9251
30	1,9280	82	1,9183
32	1,9338	84	1,9115
34	1,9405	86	1,9046
36	1,9474	88	1,8980
38	1,9534	90	1,8888
40	1,9584	92	1,8800
42	1,9612	94	1,8712
44	1,9643	96	1,8605
46	1,9672	98	1,8488
48	1,9702	100	1,7370
50	1,9733		

Gráficos de las dos tablas anteriores.— Van representados en la figura 3.ª y en ella se ven los dos máximos: 2,020 (á 15° C. para 60 % de SO_3 libre) y 1,9772 (á 35° C. para 56 % de SO_3 libre). Estos dos máximos se corresponden

probablemente, pues la diferencia de 4 % en SO_3 libre será debida á la alteración que la elevación de temperatura produce en la estructura molecular del ácido fumante.

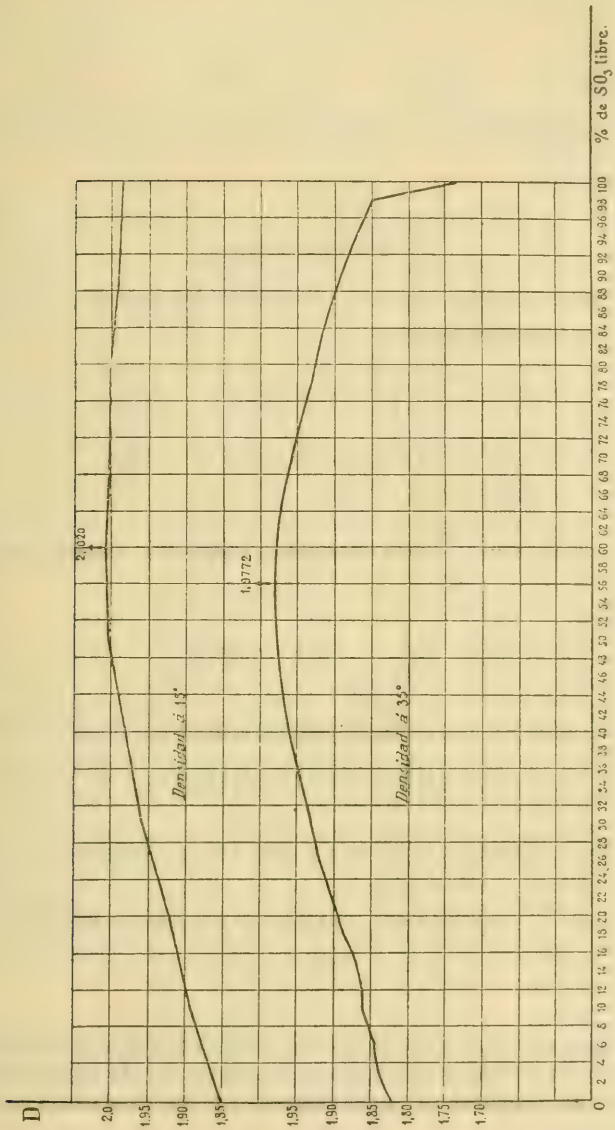


Figura 3.ª

Tabla de los puntos de ebullición del ácido sulfúrico fumante (según Knietsch).

SO_3 % libre.	P. E. en grados C.	SO_3 % libre.	P. E. en grados C.
3,64	212	42,84	92
9,63	170	63,20	60
26,23	125	97,2	43

III

Constitución.

El ácido sulfúrico fumante, ú *Oleum* (*) de los alemanes, tiene por fórmula general

$$nSO_3 + mH_2O \qquad (1)$$

ó

$$SO_3 + \frac{m}{n} H_2O \qquad (2)$$

de tal modo, que $\frac{m}{n}$ sea siempre positivo y menor que 1, esto es:

$$\frac{m}{n} \begin{matrix} < 1 \\ > 0 \end{matrix} \quad \text{ó} \quad m \begin{matrix} < n \\ > 0 \end{matrix}.$$

En el caso de ser $m = n$, las fórmulas (1) y (2) se convierten en la del ácido sulfúrico ordinario; si $m = \frac{n}{2}$ ó $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, tenemos la fórmula del ácido disulfúrico; y si $n = \infty$ ó $\frac{m}{n} = 0$, quedan reducidas á la del anhídrido sulfúrico.

(*) Los alemanes conocen el ácido sulfúrico fumante con el nombre genérico de *Oleum*, derivado seguramente del de *oleum vitrioli* con que se designara el ácido sulfúrico por los alquimistas *(aceite de vitriolo)*.

También se podría representar la fórmula general del ácido fumante por

$$aSO_3 + bSO_4H_2 \qquad (3)$$

de tal modo, que a y b tengan siempre valores reales y positivos diferentes de cero y de infinito.

Aceptada cualquiera de las dos fórmulas anteriores (2) ó (3), conviene discutir si en el ácido sulfúrico fumante se halla libre ó combinado el SO_3 excedente de la combinación con el agua para formar SO_4H_2, esto es, si el ácido sulfúrico fumante es una disolución de SO_3 en SO_4H_2, ó bien si es una combinación compleja de SO_3 con un número menor que el suyo de moléculas de agua.

En los tratados de Química, tanto generales como especiales, se llama anhídrido sulfúrico libre, ó SO_3 libre, al anhídrido sulfúrico no combinado equimolecularmente con el agua. Supongamos, por ejemplo, un ácido fumante que contenga 86,22 % de SO_3 y 13,78 % de agua; el agua formará SO_4H_2 con el SO_3, necesitando de éste la cantidad deducida de la siguiente proporción:

$$18 : 80 = 13{,}78 : x; \qquad x = 61{,}24,$$

cuyos 61,24 de SO_3 + 13,78 de agua dan 75,02 % de SO_4H_2; y los 86,22 de SO_3 total — 61,24 de SO_3 combinado, dan 25 % de SO_3 llamado libre, esto es, que no se combina con el agua para formar precisamente SO_4H_2.

Así, pues, el anhídrido sulfúrico *total* que contiene un ácido fumante se considera siempre dividido, para los efectos de su constitución, en SO_3 combinado y en SO_3 libre. Representando por S_t la cantidad de anhídrido total, por S_c la cantidad del combinado y por S_l la cantidad del libre

$$S_t = S_c + S_l \qquad (4)$$

y como si a es la cantidad de agua

$$S_c = \frac{40}{9} \cdot a,$$

en virtud de la proporción

$$\frac{18}{80} = \frac{a}{S_c},$$

se verificará:

$$S_l = S_t = \frac{40}{9} \cdot a \qquad (5)$$

cantidad de

$$SO_4H_2 = S_c + a = \frac{40}{9} a + a = \frac{49}{9} \cdot a \qquad (6)$$

cuyas dos ecuaciones (5) y (6) sumadas nos dan la composición del ácido fumante:

$$S_l + SO_4H_2 = S_t + a \qquad (7)$$

No crèe, sin embargo, el autor de estas líneas que en el ácido sulfúrico fumante esté el SO_3 precisamente combinado con el H_2O para formar con ella SO_4H_2 y para disolverse en éste el resto no combinable con el agua, esto es, que *el ácido sulfúrico fumante no es una disolución del* SO_3 *en* SO_4H_2, por las razones siguientes:

1.ª Examinando la tabla y la curva de los puntos de fusión que se consignan en el capítulo anterior, se observa que la curva no es creciente ó decreciente de un modo continuo, en función de las cantidades de SO_3 libre, como sucedería si el ácido fumante fuese una disolución de SO_3 en SO_4H_2 (pues la aparición de puntos singulares indicaría la existencia de criohidratos), sino que presenta determinados máximos, á 34°,8 (45 °/₀ de SO_3 libre) y á 27°,7 (90 °/₀ de SO_3 libre), y mínimos, á — 11°,2 (15 °/₀ de SO_3 libre) y á + 0°,7 (60 °/₀ de SO_3 libre). La curva demuestra que, por lo menos, hay determinadas combinaciones correspondientes á los puntos máximos y mínimos señalados.

2.ª Las tablas y curvas de las densidades á 15° y á 35°, que se detallan también en el capítulo anterior, son una prueba palmaria de nuestro aserto, pues en el caso de tra-

tarse de una verdadera disolución es evidente que aumentaría la densidad con la cantidad de substancia disuelta; y en la curva de las densidades á 15° se observa un máximo de 2,020 (correspondiente á 60 % de SO_3 libre), mientras en la curva de las densidades á 35° el máximo corresponde al valor 1,9772 (con 56 % de SO_3 libre) (*).

3.ª Admitida por todos los químicos la existencia del ácido disulfúrico ó pirosulfúrico, $S_2O_7H_2$, nos encontraríamos de admitir la teoría de la disolución, con el contrasentido de que el ácido fumante con menos de 89,8876 % de SO_3 total, ó de 44,943 % de SO_3 libre (percentajes correspondientes al ácido disulfúrico), sería una disolución hasta tener 89,8876 % de SO_3; al llegar á ese percentaje sería una combinación, y pasando de él, el SO_3 antes combinado en forma de $S_2O_7H_2$ volvería á estar disuelto en el SO_4H_2, cosa á todas luces inverosímil. Pues bien, si se admite la combinación de dos moléculas de SO_3 con una de H_2O, ¿qué inconveniente hay en admitir mayor complejidad molecular con los mismos componentes?

4.ª La gran energía de combinación del SO_3 con el agua y con el SO_4H_2 hace imposible la existencia de esa disolución, pues al echar SO_3 en SO_4H_2, aunque sea en pequeña cantidan, siempre se combinará aquél con éste ó con parte de éste. Pruébalo claramente el desprendimiento calorífico considerable que en este caso se produce.

Hipótesis acerca de la constitución del ácido sulfúrico fumante.—Descartada en absoluto la hipótesis de la disolu-

---

(*) Si se examina la tabla de Knietsch correspondiente á los puntos de ebullición, parece suministrar un contraargumento á lo que venimos afirmando, puesto que los puntos de ebullición del ácido sulfúrico fumante van disminuyendo sin interrupción, desde 212° C (3,64 % de SO_3 libre) á 43° C (97,2 % de SO_3 libre); pero téngase en cuenta que las combinaciones del SO_3 con el SO_4H_2 son muy inestables por poca elevación de temperatura que sufran, y así no es de extrañar que á ese cambio térmico corresponda una disociación que convierta la combinación en una mezcla ó en una disolución.

ción del SO_3 en SO_4H_2, hay que admitir la de la combinación bajo la fórmula (2)

$$SO_3 + \frac{m}{n} H_2O$$

y por ende buscar los valores de m y n que satisfagan á la condición

$$\frac{m}{n} \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}.$$

Examinemos, ante todo, los datos experimentales que en forma gráfica reunen las curvas de los puntos de fusión y de las densidades, y notemos que los puntos más notables (máximos y mínimos) corresponden á los percentajes en SO_3 libre de 15, 45, 60 y 90 (*), mereciendo mención especial los puntos correspondientes á 20, 40, 70, 75, 80 y 85 °/₀ de SO_3 libre.

Como quiera que 18 partes en peso de agua se combinan con 80 de SO_3, resulta de la siguiente relación:

H_2O	18 p.	18,3674
SO_3	80 p.	81,6326
	98 p.	100,0000

y por ser $\frac{81,63}{18,37} = 4,44$, que una parte de agua se combina con 4,44 en peso de SO_3 en la combinación equimolecular. y, por lo tanto, el cociente del percentaje en SO_3 total por el agua total dará, dividido por 4,44, el número de moléculas de SO_3 que se combinan con una de agua, ó sea el valor de n en la fórmula (2), supuesto $m = 1$:

$$\frac{S_t}{a} : 4,44 = n' \qquad (8)$$

(*) El máximo de 56 °/₀ en la curva de las densidades á 35° C. puede equivaler, como ya se ha dicho, al de 60 °/₀ en la de 15° C.

de la cual se deduce $\frac{m}{n}$, puesto que

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n'}.$$

Aplicando la fórmula (8) á los anteriores valores de $S\,O_3$ libre, tenemos:

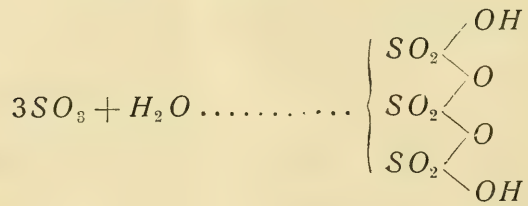
S_l	S_t	a	$\frac{S_t}{a}$	$n' = \frac{S_t}{a} : 4{,}44$	$\frac{m}{n} = \frac{1}{n'}$
15	84,3877	15,6123	5,41	1,2	$\frac{5}{6}$
45	89,8979	10,1021	8,90	2	$\frac{1}{2}$
60	92,6530	7,3470	12,61	2,83	$\frac{1}{3}$ aproximadamente.
90	98,1632	1,8368	53,35	12	$\frac{1}{12}$
....	.....	.....	.....	....	....
20	85,3061	14,6939	5,81	1,3	$\frac{10}{13}$
40	88,9795	11,0205	8,07	1,8	$\frac{5}{9}$
70	94,4897	5,5103	17,15	3,8	$\frac{1}{4}$ aproximadamente.
75	95,4081	4'5919	20,79	4,7	$\frac{1}{5}$ aproximadamente.
80	96,3265	3,6735	26,25	6	$\frac{1}{6}$
85	97,2448	3,7552	35,30	8	$\frac{1}{8}$

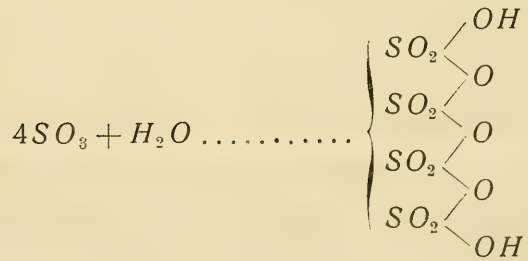
De manera que, según los anteriores cálculos, las fórmulas del ácido sulfúrico fumante, variables con la riqueza en SO_3, serán aproximadamente las siguientes:

Con 15 % de SO_3 libre.....	$6SO_3 + 5H_2O$
» 40 » de » »	$9SO_3 + 5H_2O$
» 45 » de » »	$2SO_3 + H_2O$
» 60 » de » »	$3SO_3 + H_2O$
» 70 » de » »	$4SO_3 + H_2O$
» 75 » de » »	$5SO_3 + H_2O$
» 80 » de » »	$6SO_3 + H_2O$
» 85 » de » »	$8SO_3 + H_2O$
» 90 » de » »	$12SO_3 + H_2O$

No hay que decir que las pequeñas diferencias advertidas pueden ser debidas á errores de observación, así como también á falta de pureza; pero nótese como precisamente los puntos notables de las curvas precitadas corresponden á composiciones sencillas y definidas del ácido fumante. La composición de los ácidos de riqueza intermedia debe ser intermedio también entre las citadas.

En cuanto á la concatenación atómica en las diferentes moléculas citadas se puede explicar fácilmente, cuando en ellas no interviene más que una molécula de agua, tal como indican los siguientes esquemas:





$$nSO_3 + H_2O \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} SO_2 \begin{cases} OH \\ O \end{cases} \\ SO_2 \begin{cases} \\ \end{cases} \\ \vdots \\ SO_2 \begin{cases} \\ O \end{cases} \\ SO_2 \begin{cases} \\ OH \end{cases} \end{array} \right.$$

Pero si el número de moléculas de agua es mayor hay que echar mano de la tetravalencia del oxígeno, para explicar la constitución de la molécula (cosa que quizás no ocurra) tal como indica el siguiente esquema:

$$6SO_3 + 5H_2O \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} SO_2 \begin{cases} OH \\ O < \begin{cases} OH \\ H \end{cases} \end{cases} \\ SO_2 \begin{cases} \\ O < \begin{cases} OH \\ H \end{cases} \end{cases} \\ SO_2 \begin{cases} \\ O \end{cases} \\ SO_2 \begin{cases} \\ O < \begin{cases} H \\ OH \end{cases} \end{cases} \\ SO_2 \begin{cases} \\ O < \begin{cases} H \\ OH \end{cases} \end{cases} \\ SO_2 \begin{cases} \\ OH \end{cases} \end{array} \right.$$

Parece, pues, lo más probable que los compuestos definidos á que nos referimos corresponden á la fórmula general

$$nSO_3 + H_2O \qquad (9)$$

y abona esta creencia el que precisamente son puntos notables de las curvas de los puntos de fusión y de las densidades los representativos de los ácidos fumantes que corresponden á la composición centesimal de aquéllos en que n vale 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 12.

IV

Análisis (*).

Siendo tan variada la composición del ácido sulfúrico fumante hay que acudir constantemente al análisis para determinarla y más si se tiene en cuenta que aun para un ácido fumante de riqueza conocida en SO_3 % libre varía ésta con el tiempo por la inevitable absorción que del vapor ácueo atmosférico efectúa dada su grande higroscopicidad.

Como quiera, además, que en los trabajos de sulfonación hay que preparar ácidos fumantes de muy diversos percentajes en SO_3 libre, partiendo de ácidos fumantes más concentrados y del ácido sulfúrico ordinario concentrado de 66° *Be'*, precisa realizar el análisis de unos y otros cuando se trata de obtener productos puros.

De ahí, pues, que sea muy frecuente efectuar en los laboratorios y en las fábricas el análisis de los ácidos sulfúricos fumantes para determinar el SO_3 % total y el SO_3 % combinado, ó sea el SO_3 libre y el SO_4H_2. También se determina la cantidad de SO_2 cuando se trata de un análisis delicado por las razones que luego se dirán.

Los procedimientos más seguidos hoy día son los de Lunge-Rey (*), de Treadwell (**) y de Vernon (***). Todos ellos se fundan en la volumetría del SO_3 con la solución de sosa normal y sólo difieren en el procedimiento empleado para tomar el ácido sulfúrico fumante y pesarle.

(*) Acerca de lo consignado en este capítulo, el autor ha presentado una nota en el «Congreso internacional de Química aplicada de Nueva York» con el título: «Sur l'analyse die l'Oleum». Esta comunicación ha sido aprobada y publicada íntegra.

(**) Vademecum de *Lunge*, pág. 192.

(***) *Treadwell.* — Analytische Chemie, II, 406.

(****) *Chemiker-Zeitung*, 1910, pág. 792.

Vernon utiliza, además, las fórmulas siguientes:

$$\begin{cases} SO_3\ \%\ \text{total} = \dfrac{800{,}7\,.\,b\,.\,f}{a\,.\,G\,.} = X \\[2ex] SO_3\ \%\ \text{libre} = X\,.\,\dfrac{80{,}07\,(100 - X)}{18{,}016} \end{cases}$$

en las cuales representan:

b = número de c.c. de solución de $NaOH$ $^1/_5$ · norm.
a = peso del ácido fumante analizado.
G = número de c.c. del ácido analizado.
f = factor de la lejía de $NaOH$.

Aparte de todos estos procedimientos que dan muy buenos resultados, especialmente el de Vernon, y que no se detallan por citar ya los lugares en que se describen, el autor emplea la marcha siguiente que es rápida y menos expuesta á error que la de Lunge-Rey.

El ácido sulfúrico fumante se conserva en frascos con tapón esmerilado ó en bombonas. Cuando es sólido hay que comenzar por fundirle, para lo cual basta colocar el frasco que le contiene en el bañomaría ó en la estufa á un calor tibio. Una vez líquido, no conviene trasvasarle (sobre todo si es muy concentrado, ó rico en SO_3 libre) del modo ordinario por la gran cantidad de humos que produce, los cuales molestan al operador, y además porque á causa de su avidez para el agua se hidrata grandemente y disminuye, por ende, su percentaje en SO_3 libre. Por eso el mejor método para trasvasar el ácido fumante consiste en tapar el frasco ó bombona M, tal como indica la figura 4.ª, con un tapón atravesado por dos tubos a y b, de los cuales uno llegue al fondo del frasco y el otro solamente hasta la parte inferior del tapón y provistos ambos de sendas llaves de vidrio r y s; enlazando el tubo a con otro lleno de trocitos de potasa cáustica é inyectando por éste una corriente de aire (ya sea enlazando con la máquina soplante, si en el laboratorio se

dispone de corriente de aire, ó bien con una pera de goma ó soplando sencillamente con la boca) saldrá el ácido por *b*; este tubo *b* va introducido en la vasija en la que se desee recoger el ácido fumante.

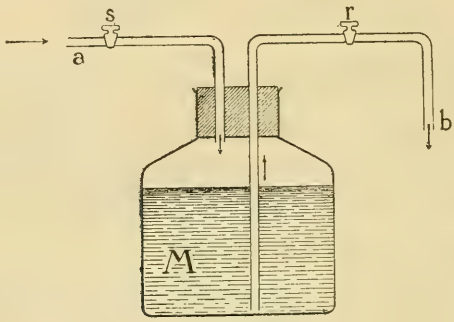


Figura 4.ª

Se toman ahora de 6 á 10 g. del ácido fumante en un tubo capilar que lleve una ampolla de vidrio, calentando ésta primero y enfriándola luego al introducirla en el ácido. La ampolla, previamente pesada, se cierra á la lámpara, y pesada después, da, por diferencia, el peso del ácido recogido que se va á analizar. Introdúcese ahora la ampollita en un frasco con tapón esmerilado que contenga algo menos de un litro de agua destilada, se agita para que se rompa la ampolla y se continúa agitando hasta la completa absorción de los vapores que se forman. Se lleva el volumen exactamente á un litro y se procede á las volumetrías:

1.ª Se toman 250 c.c. y se valoran con una solución normal (ó más diluída) de sosa cáustica, $NaOH$, empleando el anaranjado de metilo como indicador.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ c.c. } NaOH \text{ normal} = 0{,}040 \text{ g. } NaOH = \\ \quad = {}^1/_2 \text{ mol. } SO_3 = 0{,}040 \text{ g. } SO_3 \\ \quad = 1 \text{ mol. } SO_2 = 0{,}064 \text{ g. } SO_2 \end{array}\right\}$$

de manera que, como la cantidad de $NaOH$ gastada se ha invertido en neutralizar SO_3 y SO_2, hay que determinar

de nuevo éste aisladamente para tener el primero por diferencia. Para ello se procede á la volumetría

2.ª Se toman otros 250 c.c. y se valoran con una solución decinormal de iodo:

1 c.c. sol. decinormal de $I_2 = 0{,}0032$ g. de SO_2

$$0{,}0032 = \frac{1}{20} \cdot 0{,}064.$$

Sea ahora:

$a =$ número de c.c. de la sol. de $NaOH$ normal consumidos en la primera volumetría.

$b =$ número de c.c. de la sol. decinormal de I_2 consumidos en la segunda volumetría.

$s =$ peso del ácido fumante que contenía la ampollita ó sea $\frac{S}{4}$ en cada 250 c.c.

Del valor de a hay que restarle la $NaOH$ consumida para neutralizar el SO_2, cuyo valor da b.

$$\text{Cantidad de } SO_2 = 0{,}0032 \cdot b = \frac{1}{20} \cdot 0{,}064\, b \cdot$$

y como 0,064 SO_2 equivalen á 0,040 SO_3, ó sea 1 c.c. de sol. de $NaOH$ normal.

$$\text{Cantidad } SO_3 = 0{,}040 \cdot a - \frac{1}{20}\, 0{,}040 \cdot b$$

$$= 0{,}040 \left(a - \frac{b}{20}\right)$$

Estas cantidades se refieren al peso $\frac{S}{4}$; para el peso 100 serán:

$$\frac{s}{4} : 0{,}04 \left(a - \frac{b}{20}\right) = 100 : r$$

$$\frac{s}{4} : 0{,}0032 \cdot b = 100 : t$$

$$\left\{\begin{array}{l} SO_3 \text{ total } \% = r = \dfrac{4\left(a - \dfrac{b}{20}\right)}{\dfrac{s}{4}} = \dfrac{4\,(20 \cdot a - b)}{5s} \\[2ex] SO_2 \text{ total } \% = t = \dfrac{0{,}32 \cdot b}{\dfrac{s}{4}} = \dfrac{1{,}28 \cdot b}{s} \\[2ex] H_2O \text{ total } \% = u = 100 - (r + t) = 100 - \dfrac{80 \cdot a + 2{,}4 \cdot b}{5s} \end{array}\right.$$

Mas como quiera que 80 de SO_3 se combinan con 18 de agua, ó 1 de agua con $\frac{80}{18} = 4{,}44$ de SO_3, multiplicando la cantidad de agua por 4,44 tendremos el SO_3 que forma SO_4H_2, ó SO_3 combinado, y el resto de SO_3 será SO_3 libre.

Cantidad de SO_3 combinado $= 4{,}44\,u = \frac{40}{9}\,u$.

La composición definitiva del ácido fumante en SO_3 libre % y SO_4H_2 %, que es la forma en que generalmente se da, será:

$$\left\{\begin{array}{l} SO_4H_2\ \% = u + 4{,}44\,u = 5{,}44\,u = \dfrac{49}{9}\left(100 - \dfrac{80 \cdot a + 2{,}4 \cdot b}{5s}\right. \\[2ex] SO_3\ \% \text{ libre} = r - 4{,}44\,u = r - \dfrac{40}{9}\,u = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{196 \cdot a + 3b}{s} - 1000\right. \\[2ex] SO_2\ \% \text{ libre} = t \qquad\qquad = \dfrac{1{,}28 \cdot b}{s} \end{array}\right.$$

Estas fórmulas son de aplicación más fácil que las de Vernon y en ellas se tiene en cuenta la cantidad de SO_2 %, lo cual da mucha mayor exactitud á los análisis.

Como comprobación debe verificarse, y en efecto se verifica:

$$SO_4H_2\ \% + SO_3\ \%\ \text{libre} + SO_2\ \% =$$
$$= \frac{49}{9}\left(100 - \frac{80 \cdot a + 2{,}4 \cdot b}{5S}\right)$$
$$+ \frac{4}{9}\left(\frac{196\,a + 3\,b}{s} - 1000\right) + \frac{1{,}28 \cdot b}{s} = 100.$$

Si $b = o$ las fórmulas anteriores se simplifican notablemente:

$$\begin{cases} SO_4H_2\ \% = \dfrac{49}{9}\left(100 - \dfrac{16\,a}{s}\right) \\ SO_3\ \%\ \text{libre} = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{196 \cdot a}{s} - 1000\right) \end{cases}$$

cuya suma es también igual á *100*.

V

Fórmulas para la obtención de un ácido fumante de riqueza dada.

En las fábricas y laboratorios donde se utiliza el ácido sulfúrico fumante no se tienen frascos ó bombonas de ácido de todas las concentraciones ó riquezas en SO_3 % libre, desde 1 % á 100 %, sino que ordinariamente se tiene ácido fumante de 25 ó 30, de 40, de 60 y de 80 % de SO_3 libre. De manera que, cuando se necesita un ácido fumante de otra concentración, hay que calcular las cantidades que deben mezclarse de ácido sulfúrico ordinario y de un ácido fumante de riqueza conocida, superior á la que se pide, para lograr obtener el producto deseado.

La fórmula única que hasta hace poco se había empleado con este objeto es la del Dr. R. Gnehm (*):

(*) *Chemiker-Kalender* von Dr. Rudolph Biedermann, 1911, página 220. — *Sulfurieren, alkalischmelze*, etc. von Dr. H. Wichelhaus, 1911, pág. 59.

$$X = 100 \cdot \frac{b - a}{a - c}$$

en la cual representan:

X = cantidad de ácido sulfúrico concentrado que hay que añadir á 100 partes de ácido fumante dado.

a = cantidad de anhídrido total SO_3 contenido en 100 partes del ácido por preparar.

b = cantidad de SO_3 total contenida en 100 partes del ácido fumante dado.

c = cantidad de SO_3 en el ácido sulfúrico concentrado dado.

Los números a y b se hallan en las tablas de Gnehm que hemos dado al comenzar el cap. II y el número c es el producto de $\frac{40}{49} = 0{,}816$ por el percentaje en SO_4H_2.

No se puede negar la sencillez de la fórmula del ilustre Presidente de la Escuela politécnica federal de Zurich, pero cualquiera que, como el autor de este trabajo, haya tenido que utilizarla con frecuencia, habrá seguramente tropezado con dos inconvenientes: 1.°, la necesidad de las tablas para hallar los valores de a y de b, tablas que no siempre se tienen á mano; 2.°, el dar esta fórmula la cantidad de ácido sulfúrico concentrado que debe añadirse á 100 partes del ácido fumante de que se dispone, lo cual obliga á resolver una regla de tres para determinar las cantidades de ácido fumante y del ácido ordinario necesarias para obtener un peso dado del nuevo ácido fumante (el estrictamente necesario para la operación que nos propongamos llevar á cabo, pues es evidente que no ha de prepararse inútilmente mayor cantidad de ácido de la precisa).

El autor ha podido encontrar una fórmula más sencilla en una de sus formas y más exacta en otra, pero que evita en ambas los dos inconvenientes citados de la fórmula de Gnehm; esto es, no necesita auxilio de tablas y da directa-

mente las cantidades por mezclar para un peso dado de ácido fumante (*).

Sean:

a = cantidad de ácido fumante á preparar, con riqueza de h % de SO_3 libre.
x = peso de ácido fumante por mezclar, con riqueza de k % de SO_3 libre.
y = peso de ácido sulfúrico ordinario, á mezclar con el anterior, con riqueza de s % de SO_4H_2.

Siendo 80 el peso molecular de SO_3 y 18 el del agua, al mezclar el ácido fumante con ácido sulfúrico ordinario, el agua libre de éste se combinará con el SO_3 libre de aquel, de modo que con los datos antes escritos se verificará:

$$\frac{18}{80} = \frac{100 - s}{m}$$

$$m = \frac{80\,(100 - s)}{18} = \frac{40}{9}\,(100 - s)$$

por lo tanto, el peso y de ácido ordinario se combinará con la siguiente cantidad z de SO_3:

$$\frac{100}{m} = \frac{y}{z}; \quad z = \frac{my}{100} = \frac{40\,y\,(100 - s)}{900}$$

$$z = \frac{2\,y\,(100 - s)}{45}.$$

Con estos datos podremos plantear las ecuaciones siguientes, teniendo en cuenta que la primera representa la cantidad de SO_3 % que quedará libre al rebajar de la que tenga

(*) Esta fórmula ha sido dada á conocer por vez primera en la *Chemiker Zeitung*, 1910, pág. 264, y en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, 1910, pág. 78, habiendo sido reproducida en varias obras y empleándose en muchas fábricas y laboratorios, especialmente en Alemania.

el peso x la necesaria para neutralizar el agua libre del ácido ordinario:

$$\begin{cases} \dfrac{kx}{100} - \dfrac{2y(100-s)}{45} = \dfrac{ha}{100} \\ x + y = a \end{cases}$$

que resueltas dan:

$$\begin{cases} x = a \cdot \dfrac{9h + 40(100-s)}{9k + 40(100-s)} & (1) \\ y = a - x = a \cdot \dfrac{9(k-h)}{9k + 40(100-s)}. & (2) \end{cases}$$

Las fórmulas (1) y (2) son rigurosamente exactas y son aplicables para cualquier concentración s del ácido sulfúrico ordinario, así como para cualesquiera valores de h y de k, con la condición natural de ser $h < k$.

Pero lo más notable de estas fórmulas es que pueden sufrir una gran simplificación. En efecto, el ácido sulfúrico concentrado que se emplea ordinariamente en los laboratorios y fábricas es el de densidad = 1,840 = 65°,9 Bé (*) = 168° Td = 95,60 % de SO_4H_2; de modo que el valor

$$100 - s = 100 - 95{,}60 = 4{,}40,$$

y si tomamos el valor aproximado 4,5, con lo cual se comete un error muy pequeño, como luego se verá, las fórmulas (1) y (2) se convierten en las siguientes:

$$\begin{cases} x = a \cdot \dfrac{9h + 40 \times 4{,}5}{9k + 40 \times 4{,}5} = a \times \dfrac{h + 20}{k + 20} \\ y = a \cdot \dfrac{9(k-h)}{9k + 40 \times 4{,}5} = a \times \dfrac{k - h}{k + 20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \quad x = a \cdot \dfrac{h + 20}{k + 20} \\ (4) \quad y = a \cdot \dfrac{k - h}{k + 20} \end{cases}$$

(*) Llamado de 62° Bé.

cuya sencillez no hay que encomiar, pues se recuerdan fácilmente de memoria y no requieren el auxilio de tabla alguna.

Error. — El *error absoluto* que se comete al aplicar las fórmulas abreviadas que proponemos, será (*):

$$e = a\left(\frac{h+20}{k+20} - \frac{9h+40\times 4{,}4}{9k+40\times 4{,}4}\right) = a\left(\frac{h+20}{k+20} - \frac{9h+176}{9k+176}\right)$$

$$= a \cdot \frac{4(k-h)}{(k+20)(9k+176)}$$

Esta función no presenta máximo ni mínimo, puesto que la derivada parcial

$$\frac{de}{dh} = \frac{-4}{(k+20)(9k+176)}$$

no puede ser cero para ningún valor finito de k. El menor valor de e (no un mínimo) se obtendrá cuando la diferencia $(k-h)$ sea la menor posible, con k positivo, con lo cual el denominador no será nulo. Esto indica que para preparar un ácido fumante se escogerá siempre, de entre los disponibles, el de más próximo percentaje en SO_3 al que se quiera obtener, para que $k-h$ sea lo menor posible.

El *error relativo* es:

$$E = a \cdot \frac{4(k-h)}{(k+20)(9k+176)} : a \cdot \frac{9h+176}{9k+176}$$

$$E = \frac{4(k-h)}{(k+20)(9h+176)}.$$

(*) Acerca de este error y de las tablas que siguen ha presentado el autor una comunicación en el último *Congreso internacional de Química aplicada de Nueva York*, con el nombre de «Contrtbution à l'étude des formules pour l'obtention d'un acide sulfurique fumant de richene conmie en SO_3», que ha sido aprobada y publicada íntegra.

Para determinar la ley de variación de este error comenzaremos por investigar si tiene un valor máximo ó mínimo. Para ello determinamos las derivadas primeras con respecto á las dos variables h y k, que igualadas á cero nos permitirán hallar los valores de h y k, que substituídos en la derivada segunda pueden dar á E un valor máximo ó mínimo:

$$\begin{cases} D_k = \dfrac{dE}{dk} = \dfrac{4(k+20)(9h+176) - 4(9h+176)(k-h)}{(k+20)^2(9h+176)^2} = o \\ D_h = \dfrac{dE}{dh} = \dfrac{-4(k+20)(9h+176) - 36(k+20)(k-h)}{(k+20)^2(9h+176)^2} = o \end{cases}$$

de donde se deduce.

$$\begin{cases} 4(k+20) = 4(k-h) \\ -4(9h+176) = 36(k-h) \end{cases}$$

ó sea:

$$\begin{cases} h = -20 \\ k = -\dfrac{176}{9} = -19\,\dfrac{5}{9} \end{cases}$$

y como h y k han de tener siempre valores positivos, es evidente que la función representativa del error no presentará máximos ni mínimos.

Para la representación gráfica del error acudiremos á la ecuación que resulta de suponer en el valor de E que h es la variable independiente y k una constante arbitraria:

$$E(k+20)(9h+176) = 4(k-h)$$

$$(9k+180)\,h\,E + (176k+3520)\,E + 4h - 4k = o$$

y como en esta ecuación el valor $B^2 - A\,C$, por ser A (coeficiente de E^2) igual á cero y C (coeficiente de h^2) igual á cero) y $B = 9k + 180$

$$(9k+180)^2 > o$$

representará evidentemente una hipérbola cuya ecuación será:

$$E = -\frac{4}{9k+180} + \frac{4k + \frac{4(176k+3520)}{9k+180}}{(9k+180)h + (176k+3520)}$$

y sus dos asíntotas tendrán por ecuaciones:

$$\begin{cases} E = -\dfrac{4}{9k+180} \text{ (paralela al eje de abscisas)} \\ h = -\dfrac{176k+3520}{9k+180} \text{ (paralela al eje de ordenadas).} \end{cases}$$

La ecuación referida á sus ejes será, teniendo en cuenta que,

$$a^2 = \frac{8k}{9k+180}; \qquad b^2 = \frac{8k}{9k+180}$$

la siguiente:

$$\frac{E^2}{\frac{8k}{9k+180}} - \frac{h^2}{\frac{8k}{9k+180}} = 1$$

ó sea:

$$E^2 - h^2 = \frac{8k}{9k+180}$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera.

Ejemplos:

1.° Se trata de obtener 400 gramos de ácido sulfúrico fumante de 20 % de SO_3 libre, disponiendo de ácido fumante de 30 % de SO_3 libre y de ácido sulfúrico concentrado de 1,840 de densidad.

Con mi fórmula abreviada.

$$x = a \cdot \frac{h + 20}{k + 20} = 400 \cdot \frac{4}{5} = 80 \cdot 4 = 320$$

$$y = 400 - 320 = 80$$

Con la fórmula de Gnehm.

$$X = 100 \cdot \frac{b - a}{a - c}$$

En las tablas .... $\begin{cases} b = 87{,}1428 \\ a = 85{,}3061 \end{cases}$

$c = 78{,}0096 = 95{,}6 \times 0{,}816$

$$X = 100 \cdot \frac{87{,}1428 - 85{,}3061}{85{,}5061 - 78{,}0096} = 100 \cdot \frac{1{,}8367}{7{,}2965} = 25{,}17$$

95,5
0,816
5736
956
7648
78,0096

1836700 | 72965
377400 | 25,17
125750
52785

125,17 : 100 = 400 : x

$x = 319{,}56$
$y = 80{,}44$
400,00

4000000 | 12517
24490 | 319,56
119730
70770
8185

Con mi fórmula exacta.

$$x = a \cdot \frac{9\,h + 40\,(100 - s)}{9\,k + 40\,(100 - s)} = 400 \cdot \frac{180 + 40 \times 4{,}4}{270 + 40 \times 4{,}4} = 400 \cdot \frac{180 + 176}{270 + 176} =$$

$$= 400 \times \frac{356}{446} = 319{,}28$$

142400 | 446
0860 | 319,28
4140
1260
3680
112

$y = 400 - 319{,}28 = 80{,}72$
100,00

(*)

(*) Se detallan todos los cálculos para poder comparar bien las dos fórmulas.

El error cometido con la fórmula aproximada será:

$$E = \frac{4\,(k - h)}{(k + 20)\,(9\,h + 176)} = \frac{4 \cdot 10}{50\,(180 + 176)} =$$

$$= \frac{40}{50 \cdot 356} = \frac{4}{1780} = 0{,}0022 = 0{,}22\ \%.$$

La abreviación es también evidente, aunque no en grado tan superlativo, en el caso, menos frecuente en la industria y en los laboratorios de que se emplee ácido sulfúrico ordinario de densidad diferente de 1,840, como puede verse con el siguiente ejemplo:

2.° Se trata de obtener 3,5 kilogramos de ácido sulfúrico fumanfe de 25 % de SO_3 libre, disponiendo de ácido fumante de 40 % de SO_3 libre y de ácido sulfúrico de 65°,8 Bé = 94,60 % de $SO_4\,H_2$:

Con mi fórmula.

$$x = a \cdot \frac{9\,h + 40\,(100 - s)}{9\,k + 40\,(100 - s)} = 3500 \times$$

$$\times \frac{9 \cdot 25 + 40 \times 5{,}4}{9 \cdot 40 + 40 \times 5{,}4} = 3500 \times$$

$$\times \frac{225 + 216}{360 + 216} = 3500 \times \frac{441}{576} =$$

$$= \mathit{2680}\ \text{gr.}$$

```
4410   | 576
 3780  |-------
  3240   0,7656
   360   × 3500
         -------
         38280
        22968
        -------
        2679,60
```

$y = 3500 - 2680 = \mathit{820}$ gr.

Con la fórmula de Gnehm.

$$X = 100 \cdot \frac{b - a}{a - c}.$$

Según las tablas..... $b = 88{,}9795$, $a = 86{,}2244$

$c = 77{,}1936 = 94{,}6 \times 0{,}816$

$$X = 100 \times \frac{88{,}9795 - 86{,}2244}{86{,}2244 - 77{,}1936} = 100 \times \frac{2{,}7551}{9{,}0308} = 30{,}51$$

```
  94,6
× 0,816
  5676
   946
  7568
 77,1936
```

```
275100 | 90308
 045860 |-------
   7060   30,51
```

130,51 : 100 = 3500 : x;

$x = \mathit{2682}$ gr.

$y = \mathit{818}$

3500

```
35000000 | 13051
  88980  |-------
 106740   2681,78
  23320
 102690
  113330
```

Tablas que dán los valores de la fórmula $x = \frac{h + 20}{k + 20}$:

El empleo de las tablas de doble entrada resulta cómodo para ahorrarse el tener que efectuar las operaciones aritméticas. En las consignadas á continuación se supone $a = 1$, y para hallar el valor de x basta buscar el valor de k en la cabecera de la tabla y el de h en la primera columna: en la intersección ó confluencia de la fila en que se halle h con la columna en que se encuentre k estará el valor de x, que multiplicado por a dará la cantidad de ácido fumante que tenemos que mezclar con $a - x$ de ácido sulfúrico ordinario para obtener un peso a de ácido sulfúrico fumante con riqueza de h % de SO_3 libre.

Tablas de doble entrada para la fórmula: $x = \frac{h + 20}{k + 20}$.

Valores de x.

h	k = 25	k = 40	k = 60	k = 80	k = 100	h	k = 25	k = 40	k = 60	k = 80	k = 100
1	0,4667	0,35	0,2625	0,21	0 175	26		0,7667	0,575	0,46	0,3833
2	0,4889	0,3667	0,275	0,22	0,1833	27		0,7833	0,5875	0,47	0,3917
3	0,5111	0,3833	0,2875	0,23	0,1917	28		0,8	0,6	0,48	0,4
4	0,5333	0,4	0,3	0,24	0,2	29		0,8167	0,6125	0,49	0,4083
5	0,5556	0,4167	0,3125	0,25	0,2083	30		0,7333	0,625	0,5	0,4167
6	0,5778	0,4333	0,325	0,26	0,2167	31		0,85	0,6375	0,51	0,425
7	0,6	0,45	0,3375	0,27	0,225	32		0,8667	0,65	0,52	0,4333
8	0,6222	0,4667	0,35	0,28	0,2333	33		0,8833	0,6625	0,53	0,4417
9	0,6444	0,4833	0,3625	0,29	0,2417	34		0,9	0,675	0,54	0,45
10	0,6667	0,5	0,375	0,3	0,25	35		0,9167	0,6875	0,55	0,4583
11	0,6889	0,5167	0,3875	0,31	0,2583	36		0,9333	0,7	0,56	0,4667
12	0,7111	0,5333	0,4	0,32	0,2667	37		0,95	0,7125	0,57	0,475
13	0,7333	0,55	0,4125	0,33	0,275	38		0,9667	0,725	0,58	0,4833
14	0,7556	0,5667	0,425	0,34	0,2833	39		0,9833	0,7375	0,59	0,4917
15	0,7778	0,5833	0,4375	0,35	0,2917	40		1,0000	0,75	0,6	0,5
16	0,8	0,6	0,45	0,36	0,3	41			0,7625	0,61	0,5083
17	0,8222	0,6167	0,4625	0,37	0,3083	42			0,775	0,62	0,5167
18	0,8444	0,6333	0,475	0,38	0,3167	43			0,7875	0,63	0,525
19	0,8667	0,65	0,4875	0,39	0,325	44			0,8	0,64	0,5333
20	0,8889	0,6667	0,5	0,4	0;3333	45			0,8125	0,65	0,5416
21	0,9111	0,6833	0,5125	0,41	0,3417	46			0,825	0,66	0,55
22	0,9333	0,7	0,525	0,42	0,35	47			0,8375	0,67	0,5583
23	0,9556	0,7167	0,5375	0,43	0,3583	48			0,85	0,68	0,5667
24	0,9778	0,7333	0,55	0,44	0,3667	49			0,8625	0,69	0,575
25	1,0000	0,75	0,5625	0,45	0,375	50			0,875	0,7	0,5833

h	k = 25	k = 40	k = 60	k = 80	k = 100	h	k = 25	k = 40	k = 60	k = 80	k = 100
51			0,8875	0,71	0,5917	76				0,96	0,8
52			0,9	0,72	0,6	77				0,97	0,8083
53			0,9125	0,73	0,6083	78				0,98	0,8167
54			0,925	0,74	0,6167	79				0,99	0,825
55			0,9375	0,75	0,625	80				1,00	0,8333
56			0,95	0,76	0,6333	81					0,8417
57			0,9625	0,77	0,6417	82					0,85
58			0,975	0,78	0,65	83					0,8583
59			0,9875	0,79	0,6583	84					0,8667
60			1,0000	0,8	0,6667	85					0,875
61				0,81	0,675	86					0,8833
62				0,82	0,6833	87					0,8917
63				0,83	0,6917	88					0,9
64				0,84	0,7	89					0,9083
65				0,85	0,7083	90					0,9167
66				0,86	0,7167	91					0,925
67				0,87	0,725	92					0,9333
68				0,88	0,7333	93					0,9417
89				0,89	0,7417	94					0,95
70				0,9	0,75	95					0,9583
71				0,91	0,7583	96					0,9667
72				0,92	0,7667	97					0,975
73				0,93	0,775	98					0,9833
74				0,94	0,7833	99					0,9917
75				0,95	0,7917	100					1,0000

Gráfico de la fórmula $x = a \cdot \frac{h + 20}{k + 20}$.

La figura 5.ª representa gráficamente los valores de la fórmula $x = a \cdot \frac{h + 20}{k + 20}$, supuesto $a = 1$.

Para $k = 25$, la línea tendrá por ecuación:

$$x = \frac{1}{45} \cdot h + \frac{4}{9} \qquad (a)$$

ecuación de una recta, cuya ordenada en el origen es:

$$x = \frac{4}{9} = 0{,}444 \ldots\ldots$$

Para $k = 40$, la recta tendrá por ecuación:

$$x = \frac{1}{60} \cdot h + \frac{1}{3} \qquad (b)$$

cuya ordenada en el origen es:

$$x = \frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots\ldots$$

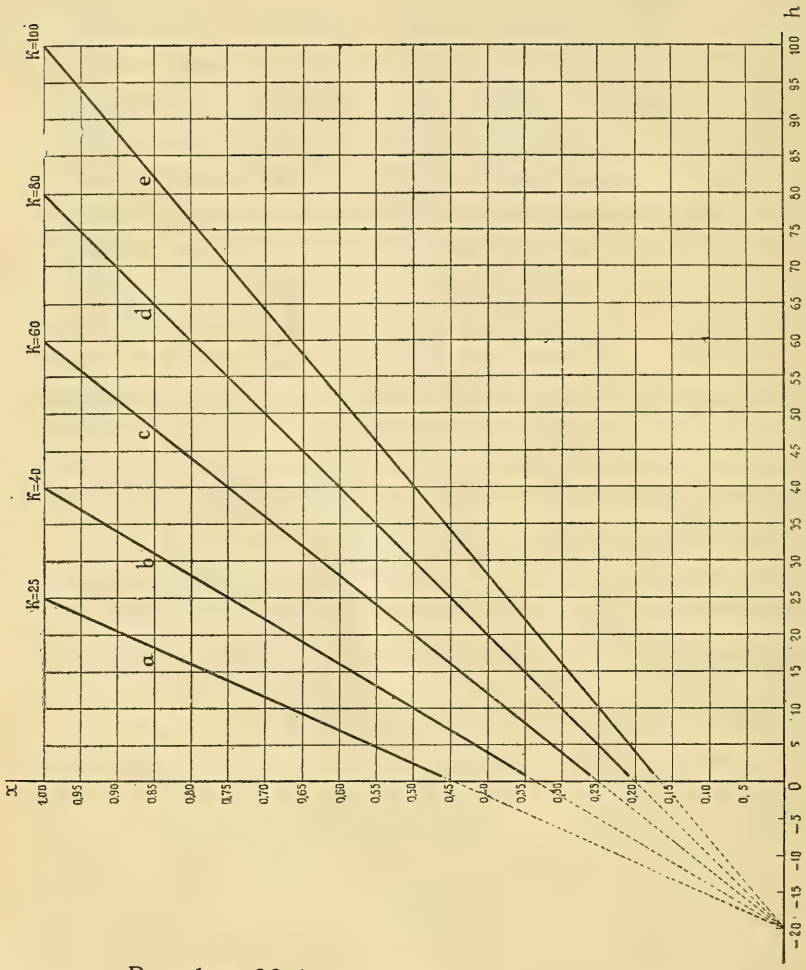


Gráfico de la fórmula del autor: $x = a \cdot \frac{h+20}{k+20}$, siendo $a = 1$, para los valores de k que se indican.

Para $k = 60$, la recta tendrá por ecuación:

$$x = \frac{1}{80} \cdot h + \frac{1}{4} \qquad (c)$$

cuya ordenada en el origen es:

$$x = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Para k 80, la recta tendrá por ecuación:

$$x = \frac{1}{100} \cdot h + \frac{1}{5} \qquad (d)$$

cuya ordenada en el origen es:

$$x = \frac{1}{5} = 0{,}20.$$

Para k = 100, la recta tendrá por ecuación:

$$x = \frac{1}{120} \cdot h + \frac{1}{6} \qquad (e)$$

cuya ordenada en el origen es:

$$x = \frac{1}{6} = 0{,}166 \ldots\ldots$$

Todas estas rectas, que tienen por ecuación general

$$x = \frac{1}{k + 20} \cdot h + \frac{20}{k + 20},$$

concurren en un mismo punto del eje de abscisas, pues haciendo en la ecuación anterior $x = o$, tenemos:

$$h = -20$$

de modo que el punto común de todas las rectas es el punto (— 20,0).

Este gráfico es de gran utilidad en los laboratorios, pues basta buscar la ordenada correspondiente al valor de la

abscisa que exprese la riqueza en SO_3 del ácido fumante que se busca, para tener el número cuyo producto por a dará la cantidad que hay que mezclar con $SO_4 H_2$ para obtener la cantidad de ácido fumante de riqueza dada que se busca.

VI. — Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general.

Por Antonio Torroja y Miret.

ADVERTENCIA PRELIMINAR

La importancia del papel que en la Geometría desempeñan las superficies alabeadas, ha hecho que se las dedicara atención muy particular y que las principales de entre ellas hayan sido estudiadas, ya individualmente, ya agrupadas las que á una misma familia pertenecen. Pero estos estudios tienen siempre caracter particular como resultado de aplicar los principios generales de las diferentes teorías con el criterio exclusivo de resolver una cuestión concreta. Y de aquí, que al emprender el estudio de una nueva superficie alabeada haya que justificar de nuevo muchos de los principios que se habían ya demostrado al estudiar otras, por ser comunes á todas ellas.

Los trabajos, por nosotros conocidos, que estudian de un modo general las propiedades comunes á todas las superficies alabeadas son muy escasos, sobre todo en lo que á su curvatura se refiere, y casi todos ellos emplean el Análisis aun tratándose de estudiar cuestiones de Geometría.

El objeto del presente trabajo es establecer, por procedimientos exclusivamente geométricos, la teoría general de la curvatura de las superficies alabeadas, que luego podrá ser aplicada á las superficies particulares sin más que introducir en ella las hipótesis que la definición de cada superficie establezca. En todo el trabajo hemos procurado emplear, siempre que ha sido posible, razonamientos de caracter proyectivo, para poder estudiar simultáneamente las cuestiones referentes á puntos y líneas de la superficie y sus correlativas de planos tangentes y desarrollables circunscritas á la

misma, dando á éstas tanta importancia como á las líneas, porque no sólo tienen la misma desde el punto de vista teórico, sino que en la práctica la tienen mayor en muchos casos, como base de la Perspectiva y Teoría de sombras, parte tan importante de la Geometría descriptiva.

El trabajo consta de tres partes que tratan respectivamente de la curvatura en un punto y plano tangente, de la relación entre la curvatura en los distintos puntos de una generatriz rectilínea y en los distintos planos que pasan por ella, y de las líneas y desarrollables de la superficie definidas por la curvatura. Las dos primeras partes están divididas en otras varias según que los elementos que en ellos se estudian se refieran á generatrices ordinarias ó no, estando precedida de una introducción en que se resume brevemente la teoría general de la curvatura, indicando en líneas generales los razonamientos que naturalmente conducen al empleo de la indicatriz y de su cilindro proyectante para definir la curvatura de las líneas de la superficie y la de las desarrollables circunscritas á ella.

PARTE PRIMERA

Curvatura en un punto y plano tangente.

Introducción.

Para estudiar la curvatura de una superficie S en uno de sus puntos A, y planos tangentes a, el camino generalmente seguido es la sustitución de esta superficie por otra S' que tenga con ella un contacto de segundo orden en dicho punto y en el plano tangente correspondiente a, y cuya curvatura en ellos nos sea más fácil de estudiar que la de la superficie propuesta, eligiéndose casi siempre de segundo orden esta superficie auxiliar, por ser en ellas en las que más sencillamente y mejor se conoce la curvatura, y teniendo además en

cuenta que, salvo casos especiales de los cuales prescindiremos, para todo punto y plano tangente ordinarios de una superficie cualquiera existen siempre cuádricas que tengan con ella un contacto de segundo orden en este punto y plano tangente.

Concretándonos, por ahora, á los puntos ordinarios, podemos, pues, sustituir, desde este punto de vista, la superficie propuesta S por una cualquiera de estas infinitas cuádricas, que forman un complejo y son osculatrices de la superficie S, por ser éste el más elevado orden de contacto que pueden tener con una superficie, en general. Para determinar una de ellas, lo más sencillo es fijar la condición de que pase por otro punto B, que no esté situado en el plano tangente a, y que en él sea tangente á un plano cualquiera b, que no pase por A. Con esta condición, y los elementos que conozcamos de la curvatura de la superficie S en el punto A y plano tangente a, podremos determinar el número de elementos de la S' suficientes para que, con los puntos A y B y los planos tangentes correspondientes a y b, quede ésta completamente determinada con independencia de la condición del contacto de segundo orden, y tener de este modo dada la curvatura de

una línea cualquiera de la superficie S que pase por A, por la de la sección que su plano osculador en dicho punto produce en

una desarrollable cualquiera circunscrita á la superficie S y tangente al plano a, por la de la superficie cónica, cuyo vértice es el punto de su línea de retroceso situado en dicho plano y circunscrita á

la superficie S'. Uno de los sistemas de elementos que con este objeto podemos elegir está constituído por

la sección I, producida en esta cuádrica por un plano cualquiera p, que no pase por los dos puntos A y B, vi-

la superficie cónica i circunscrita á esta cuádrica y cuyo vértice P sea un punto cualquiera, no situado en los dos

niendo entonces determinada la sección producida en S' por un plano que pase por A y B, por estos dos puntos, las tangentes correspondientes y los de intersección de este plano con la cónica I, que serán uno ó dos, según que el plano p pase ó no por alguno de los puntos A ó B.

planos a y b, viniendo entonces determinada la superficie cónica circunscrita á á la S' y cuyo vértice esté en a y b, por estos dos planos, las generatrices correspondientes y los tangentes á la superficie i, que pasan por este vértice, que serán uno ó dos, según que el punto P esté ó no en alguno de los planos a ó b.

Tanto en uno como en otro caso, es preciso fijar, en el espacio, la posición del

plano p y, en él, la posición de la cónica I,

punto P y, después, la de la superficie i,

y para ello, en el segundo caso, se puede tomar para

plano p uno que pase por la recta $a\,b$,

punto P uno situado en la recta $A\,B$,

con lo cual basta fijar

su punto de intersección con la recta $A\,B$,

el plano que pasa por él y por la recta $a\,b$,

para que quede determinado, pudiéndose, por ejemplo, tomar este

punto armónicamente separado de el del infinito por los A y B, es decir, tomar para plano p el diametral conjugado con la dirección de la recta $A\,B$, en cuyo caso, si se proyecta la cónica I sobre el plano a paralelamente á la recta $A\,B$,

plano armónicamente separado de el que pasa por el centro de la cuádrica S' por los a y b, es decir, tomar para punto P el polo del plano diametral que pasa por la recta $a\,b$, en cuyo caso, si se proyecta desde el punto A la seccion producida en la superficie i por este plano diametral,

tendremos completamente determinada la curvatura de la superficie dada S en el punto A y plano tangente a por esta

proyección, la distancia entre los puntos A y B	superficie proyectante, el ángulo que forman los planos a y b, ó su distancia si son paralelos,

y el par de rectas polares $A\,B$ y $a\,b$.

Dada una línea cualquiera de la superficie S que pase por el punto A, podremos determinar el radio de curvatura, correspondiente á este punto, de la sección producida en la cuádrica S' por el plano determinado por la recta AB y la tangente á la línea dada en este punto A; de este radio de curvatura podremos, por el teorema de Meunier, pasar al de la sección normal, cuyo plano pasa por esa tangente, y de éste al

Dada una desarrollable cualquiera circunscrita á la superficie S y tangente al plano a, podremos determinar el ángulo de curvatura, (*) correspondiente á este plano del cono circunscrito á la cuádrica S' y cuyo vértice es el punto común á la recta ab y á la generatriz de contacto de la desarrollable dada con el plano a; de este ángulo de curvatura podremos, por el teorema análogo al de Meunier, pasar al radio de

---

(*) Llamaremos curvatura en una generatriz de una superficie {cilíndrica / cónica} al límite de la razón entre el ángulo que forman dos planos tangentes y {la distancia que hay / el ángulo formado}, en su desarrollo sobre un plano, {entre / por} las dos generatrices de contacto, cuando éstas se confunden en una; eje de curvatura al eje del {cilindro / cono} de revolución que tiene con la superficie propuesta un contacto de segundo orden en esa generatriz y plano tangente correspondiente; y {radio / ángulo} de curvatura {la distancia que hay entre / ángulo formado por} las generatrices y el eje de este {cilindro / cono} de revolución. De estas definiciones se deduce fácilmente la relación entre estos elementos de curvatura de las superficies cónicas y cilíndricas y los análogos de sus secciones planas, puesto que

de la producida por el plano osculador de la línea dada, que será el mismo que el de esta línea.	curvatura del cilindro tangente al plano *a* según esta generatriz, y de éste al ángulo de curvatura del cono cuyo vértice es el punto correspondiente de la arista de retroceso de la desarrollable dada, que será el mismo que el de esta superficie.

Vemos, pues, que hemos de empezar por determinar el

radio de curvatura en el punto *A* de las secciones producidas en la cuádrica osculatriz por los planos que pasan por la recta *AB*,	ángulo de curvatura en el plano *a* de los conos circunscritos á la cuádrica osculatriz cuyos vertices son los puntos de la recta *ab*,

y como la determinación del

radio de curvatura de una cónica	ángulo de curvatura de un cono

se simplifica notablemente cuando

el punto de que se trata es uno de sus vértices,	el plano de que se trata es perpendicular á uno de sus planos principales,

---

los centros de curvatura relativos á los puntos de una generatriz de las secciones producidas por un haz de planos paralelos en una superficie cilíndrica ó cónica están en línea recta con el punto común á las generatrices, mientras que los de las secciones, cuyos planos pasan por una tangente, están dados por el teorema de Meunier, siendo el eje de curvatura el lugar de los centros de curvatura de las secciones producidas por los planos perpendiculares á la generatriz que se considera y por los perpendiculares á este mismo eje; así como de la consideración de la esfera que tiene con una superficie no desarrollable un contacto de segundo orden á lo largo de una tangente τ que pasa por un punto *A*, resulta inmediatamente el teorema que expresa, análogamente al de Meunier, la posición relativa de los ejes de curvatura de las superficies cónicas circunscritas á la superficie dada y cuyos vértices son los puntos de esta tangente τ, los cuales forman el haz de rectas de primer orden que proyecta estos vértices desde el centro de aquella esfera.

nos convendrá que esta condición se verifique para

todas las secciones cuyos planos pasen por la recta AB,	todos los conos circunscritos cuyos vértices estén en la recta ab,

es decir, que el punto A sea vértice de la cuádrica y el plano a, por consiguiente, paralelo á uno de los principales.

Si, además, la recta AB es diámetro, y, por tanto, eje, ó sea, la recta ab es del infinito, y, por tanto, recta del infinito de un plano principal, nos ahorraremos el paso

á la sección normal,	al cilindro circunscrito,

puesto que se obtendrá esto directamente; de modo que lo más conveniente y lo que se suele hacer es tomar el punto B sobre la normal al plano a, en el punto A y el plano b paralelo al a. Entonces el

plano p es el principal paralelo á ellos, y la cónica I se llama indicatriz,	punto P es el del infinito del eje AB y la superficie i tiene como sección recta la indicatriz,

bastando, para determinar la curvatura de la superficie S en el punto A y plano a, dar la indicatriz, que suele suponerse proyectada ortogonalmente sobre el plano tangente a, y la distancia AB, puesto qne el par de rectas polares AB y ab está perfectamente determinado. Puede, sin embargo, convenir en algunos casos tomar, en lugar de la indicatriz definida de este modo,

la sección producida por algún otro plano especial,	el cono circunscrito cuyo vértice es algún otro punto especial,

sin que esto altere en su esencia cuanto acabamos de exponer.

Vemos, pues, que el estudio de la curvatura de las desarrollables circunscritas á una superficie S tangentes á un plano a, se reduce al de la curvatura de los cilindros tangentes á este mismo plano y circunscritos á la cuádrica os-

culatriz S', los cuales se determinan por los dos planos tangentes a y b, con las generatrices de contacto correspondientes, y los dos planos tangentes al cilindro que proyecta la indicatriz I perpendicularmente al plano a. Sin embargo, aunque en teoría esta determinación no presenta dificultad alguna, en la práctica resulta más sencillo operar con puntos y líneas planas que con planos y superficies, substituyendo los cilindros antes mencionados por sus secciones rectas, las cuales vienen determinadas por los puntos A y B con las tangentes correspondientes, y los C y D comunes á su plano y á las tangentes á la indicatriz I normales á él. Pero aún puede simplificarse la determinación de estas secciones rectas, determinando la línea i', lugar de los puntos C y D, que es la podaria de la indicatriz I respecto de su centro, y que recibe también el nombre de indicatriz, porque nos da los dos puntos C y D que, junto con los A y B y las tangentes correspondientes, determinan la sección recta del cilindro circunscrito á la cuádrica S', y cuyas generatrices son perpendiculares al plano determinado por las rectas AB y CD. Haremos, sin embargo, poco uso de esta indicatriz, porque no siendo de caracter proyectivo, habríamos de emplear razonamientos distintos para estudiar las cuestiones correlativas.

I. Consideraciones generales.

Concretándonos al caso especial de que vamos á ocuparnos, veremos que

por todo punto A de una superficie alabeada S pasa	en todo plano tangente a' de una superficie alabeada S hay

al menos una recta, la generatriz rectilínea correspondiente α, que es

arista de un haz de planos, que producen en la superficie S secciones de curvatura	base de una serie de puntos, vértices de superficies cónicas circunscritas á la superfi-

nula en ese punto. Pero puede suceder que esta recta sea única, ó que existan dos, la α y otra α', ó que existan más de dos, en cuyo caso existen infinitas, todas las del plano a que pasan por el punto A. En el primer caso, el punto se dice que es parabólico; en el segundo, hiperbólico, y en el tercero, la superficie tiene un contacto de segundo orden con el plano tangente a, que forma entonces parte de las cuádricas osculatrices, que en el primer caso son desarrollables; en el segundo, alabeadas, y en el tercero, compuestas de planos.

cie S, y de curvatura infinita en ese plano. Pero puede suceder que esta recta sea única, ó que existan dos, la α y otra α', ó que existan m ásde dos, en cuyo caso existen ínfinitas, todas las que pasan por el punto A' y están en el plano a'. En el primer caso, el plano tangente se dice que es parabólico; en el segundo, hiperbólico, y en el tercero, la superficie tiene un contacto de segundo orden con el punto de contacto A', que forma entonces parte de las cuádricas osculatrices, que en el primer caso se reducen á cónicas; en el segundo, son alabeadas, y en el tercero, se componen de un par de puntos.

Vemos, pues, que en una superficie alabeada no existen, como es evidente, puntos ni planos tangentes elípticos; deduciéndose, además, de la consideración de las cuádricas osculatrices, que el plano tangente, en un punto hiperbólico, es también hiperbólico, é inversamente. Vamos á estudiar ahora cada uno de estos casos, pero antes recordemos que de las

secciones producidas en una superficie por los planos que pasan por un punto de la misma, las producidas por los planos que pasan por las tangentes de la sección que en ella produce el plano tangente en ese punto, son las

superficies cónicas circunscritas á una superficie y cuyos vértices están en un plano tangente á la misma, las que tienen su vértice en las generatrices de contacto de ese plano con el cono circunscrito cuyo vértice es el

de curvatura nula en él, puesto que las esferas que tienen con la superficie dada un contacto de segundo orden en dirección de estas tangentes se reducen al conjunto de dos planos: el tangente y el del infinito, por tener que pasar por los círculos osculadores en este punto de la línea de la superficie situada en el plano tangente.

punto de contacto del mismo, son las de curvatura infinita en él, puesto que las esferas que tienen con la superficie dada un contacto de segundo orden á lo largo de estas generatrices se reducen al punto de contacto considerado como doble, por tener que estar circunscritas á los conos de revolución, osculadores en este plano, de la superficie cónica circunscrita á la superficie dada y cuyo vértice es el punto de contacto del plano considerado.

En las superficies alabeadas sabemos que la

sección producida por un plano tangente se compone de la generatriz rectilínea situada en él y una línea que tiene común con esta generatriz el punto de contacto del plano tangente considerado; é inversamente, todo plano que pasa por una generatriz rectilínea es tangente á la superficie en el punto, no doble de ésta, de los en que esta generatriz corta al resto de la línea de la superficie situada en el plano considerado.

superficie cónica circunscrita, cuyo vértice es un punto de la superficie, se compone de la generatriz rectilínea que por él pasa y una superficie que tiene, como plano tangente que pasa por dicha generatriz, el tangente á la superficie dada en el punto considerado; é inversamente, todo punto de una generatriz rectilínea es de contacto del plano, no doblemente tangente á la superficie, de los que pasan por esta generatriz y son tangentes al resto de la superficie cónica circunscrita á la dada y cuyo vértice es el punto considerado.

Cuando la generatriz rectilínea es una arista de la superficie (*), la

sección producida por el plano tangente á lo largo de ella, la corta en un punto J, distinto del vértice, en general, y las secciones producidas por los demás planos que pasan por ella, tienen, como punto común á la generatríz rectilínea y la otra rama de la sección, el vértice W situado en ella.

superficie cónica cuyo vértice es el de la superficie situado en ella, tiene como plano tangente que pasa por la generatriz singular, uno j, en general, distinto del tangente á lo largo de ella, y las superficies cónicas cuyos vértices son los demás puntos de la generatriz tienen, como plano tangente que pasa por ella, el w tangente á lo largo de la misma.

Dedúcese de aqui que, en los

puntos de las generatrices ordinarias, la indicatriz tiene dos puntos en el infinito, y es, por tanto, hipérbola, teniendo como asíntotas la generatriz rectilínea α y la tangente α' á la otra rama de la sección producida por el plano tangente, y que los puntos de las aristas de la superficie son parabólicos, puesto que la indicatriz relativa á los mismos sólo tiene común con la recta del infinito el punto del infinito de la generatriz rectilínea; é inversamente, en un punto parabólico la

planos que pasan por las generatrices ordinarias el cilindro i, proyectante de la indicatriz, tiene dos planos tangentes que pasan por su eje, y es, por tanto, hiperbólico, siendo las generatrices de contacto de estos planos las que pasan por los puntos del infinito de la generatriz α y de la generatriz de contacto del plano considerado con la superficie cónica circunscrita, cuyo vértice es el punto de contacto del mismo; y que los planos que pasan por las aristas de la superficie son

(*) Designamos con este nombre toda generatriz rectilínea, que tiende á estar en un plano con otra que se acerque indefinidamente á ella.

otra rama de la sección producida en la superficie por el plano tangente, ha de cortar á la generatriz rectilínea en otro punto *J*, que no sea el de que se trata, y en el cual también será tangente dicho plano, por contener dos líneas de la superficie que pasan por él, lo cual indica que la generatriz rectilínea que pasa por el punto considerado, es singular.

En el punto *J*, el plano tangente tiene un contacto de segundo orden con la superficie, por contener dos líneas la misma, una de las cuales es de contacto,

parabólicos, puesto que sólo hay un plano que pase por el eje del cilindró *i* correspondiente y forme parte del mismo, que es el que pasa por la generatriz rectilínea; é inversamente, en un plano tangente parabólico la otra hoja de la superficie cónica circunscrita, cuyo vértice es su punto de contacto, ha de tener como plano tangente que pase por la generatriz rectilínea, uno *j*, distinto del considerado, y cuyo punto de contacto con la superficie dada será el mismo de éste, por pasar por él dos desarrollables circunscritas á ella y tangentes á dicho plano *j*, lo cual indica que la generatriz situada en el plano tangente considerado, es singular.

En el plano *j*, el punto de contacto tiene con la superficie un contacto de segundo orden, por pasar por él dos desarrollables circunscritas á la misma, una de las cuales aparece como doble,

que son, en el caso de la derecha, por ejemplo, el haz de planos cuya arista es la generatriz rectilínea, el cual aparece como doble, por ser todos los planos del mismo tangentes en aquel punto, y la otra hoja de la superficie cónica circunscrita á la superficie dada, y cuyo vértice es dicho punto.

II Curvatura en los puntos y planos tangentes relativos á una generatriz ordinaria.

Cuando el punto y plano tangente son hiperbólicos, y, por tanto, la generatriz rectilínea que por ellos pasa y está, respectivamente, es ordinaria, las cuádricas osculatrices serán hiperboloides de una hoja ó paraboloides hiperbólicos, según se tome la posición del punto B y del plano tangente correspondiente b; pero formarán siempre parte de ellas las rectas α y α' y las β y β' intersección del plano b con los αB y $\alpha' B$. Para determinar una de estas cuádricas S' con independencia de la condición del contacto de segundo orden, podemos, como antes hemos dicho, tomar

la sección I producida en ella por un plano p que pase por la recta ab, ó bien, teniendo en cuenta que esta sección es curva, puesto que su plano no es ninguno de los dos a y b tangentes á la superficie que pasan por dicha recta ab, se puede también tomar el plano p de modo que esta sección esté compuesta de dos series de puntos de primer orden, es decir, que el plano p sea tangente á la superficie S',

el cono i circunscrito á ella y cuyo vértice sea un punto de la recta AB, ó bien, teniendo en cuenta que este cono es propiamente tal, puesto que su vértice no es ninguno de los dos A y B comunes á la superficie y á dicha recta AB, se puede también tomar el punto P de modo que este cono esté compuesto de dos haces de planos de primer orden, es decir, que el punto P esté en la superficie S',

para lo cual basta que

pase por una de las rectas α, α', β ó β', teniendo entonces determinada la sección producida por un plano cualquiera que pase por el punto A en la cuádrica S',

esté en una de las rectas α, α', β ó β', teniendo entonces determinado el cono circunscrito á la cuádrica S', cuyo vértice sea un punto cualquiera del plano a, por

por este punto con su tangente correspondiente y los de intersección de dicho plano con las generatrices rectilíneas β, β' y la otra de las situadas en el plano p.

este plano con la generatriz de contacto correspondiente y los que proyectan desde dicho punto las generatrices rectilíneas β, β' y la otra de las que pasan por el punto P.

Si suponemos fijada la cuádrica S' por un punto B y el plano tangente correspondiente b, además de la condición de ser osculatriz de la superficie dada S en el punto A, en el cual tiene el plano tangente a,

la recta AB corta evidentemente á dicha cuádrica en dos puntos reales,

por la recta ab pasan evidentemente dos planos reales tangentes á dicha cuádrica,

y, puesto que ésta es alabeada, según hemos dicho, los

puntos en que la corte la recta ab, polar de AB,

planos tangentes que pasen por la recta AB, polar de la ab,

serán también reales. Cuando tomemos el plano b paralelo al a, la recta

ab estará en el infinito y la cónica I será, pues, hipérbola; por esta razón se llaman hiperbólicos los puntos de la superficie por los cuales pasa,

AB pasará por el centro de la cuádrica, y el cilindro i será, pues, hiperbólico; por esta razón llamaremos hiperbólicos los planos tangentes en los cuales hay,

además de la generatriz rectilinea α, otra recta α' que tiene un contacto de segundo orden con la superficie.

(Continuará).

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1912..... 5

I. — Conferencias sobre Física Matemática. Teorías diversas, por *José Echegaray*. Conferencia décimaséptima. 11

II. — Conferencias sobre Física Matemática. Teorías diversas, por *José Echegaray*. Conferencia décimaoctava.. 41

III. — Conferencias sobre Física Matemática. Teorías diversas, por *José Echegaray*. Conferencia décimanovena. 67

IV. — Fototropía y fotoluminescencia (continuación), por *José Rodríguez Mourelo*..... 101

V. — Contitución, análisis y preparación, con riqueza dada en SO_3, del ácido sulfúrico fumante, por *José Prats Aymerich*..... 110

VI. — Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general, por *Antonio Torroja y Miret*.. 147

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NÚMERO 4.
OCTUBRE DE 1912.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

Informe acerca de la obra de D. Antonio López Perea, titulada «Mareas.—Calculo práctico para determinar la hora de la Pleamar».

PONENTE: *Vicente Ventosa.*

Tal es el título de un folleto remitido por la Subsecretaría de Instrucción pública y Bellas Artes, á instancia del autor del mismo, D. Antonio López Perea, catedrático de Cosmografía y Navegación de! Instituto de La Coruña, solicitando que esta Real Academia informe acerca de la utilidad pública de dicha obra y de la conveniencia de su adquisición para bibliotecas de cultura marítima.

Consta de 63 páginas, con bastante esmero impresas, en tamaño 8.° español, y su materia está distribuída en varios capítulos. El primero, después de un breve prólogo, contiene unas sencillas nociones acerca del fenómeno de las mareas y de la importancia de su conocimiento para el navegante. Trata el capítulo segundo del establecimiento de puerto, epacta y áureo número; el tercero, de la determinación de la hora de la pleamar, y el cuarto se ocupa en consideraciones generales sobre la importancia de las corrientes de marea, sobre la relación de las mareas con las cartas marinas y diferencia de calados en la mar y en los ríos: nociones todas, sin duda alguna, muy útiles para las personas de deficiente cultura científica, á quienes va dedicado este trabajo, y expuestas en lenguaje generalmente correcto y apropiado á las que han de leerlo y estudiarlo. Varias Tablas de establecimientos de puerto de España y Portugal y otras naciones de Europa y América terminan el folleto.

De todas las materias que éste abarca, sólo toca ocuparse

en las contenidas en los capítulos segundo y tercero, referentes al *cálculo práctico para determinar la hora de la pleamar*, objeto principal del trabajo del Sr. López Perea, y encaminadas—dice—á generalizar su aplicación entre la gente de mar, desechando ciertos procedimientos que hoy utiliza, con los cuales solamente se consigue incurrir en lamentables errores al pretender por esos medios obtener las horas de las pleamares.

No hace falta detenerse á describir lo que son las mareas: esos periódicos movimientos oscilatorios, de ascenso y descenso, de *flujo* y *reflujo* de las aguas del mar, efectuados próximamente dos veces cada día, de amplitud variable y de origen enigmático, hasta que el inmortal Newton pudo adivinar su causa, refiriéndola á la acción atractiva combinada sobre las mismas de la Luna y el Sol. Las mareas—agrega el autor—tienen importancia extraordinaria para el navegante, no sólo por la índole del fenómeno en sí, sino por la necesidad en que aquél se ve de determinar la hora de la pleamar para la entrada y salida de los puertos, realizar en ellos diferentes operaciones con los buques y conducir éstos con seguridad por parajes peligrosos de arrecifes, bajos ó barras. Pero el cálculo de las mareas por las intrincadas fórmulas de la Mecánica Celeste, debidas al genio de los Laplace, Kelvin, Poincaré, Darwin y otros sabios, que han dedicado sus vigilias y su saber al estudio de tan interesante fenómeno, no son de uso manual entre la gente de mar, por lo que algunos Anuarios, como el publicado por el *Bureau des Longitudes,* contienen efemérides y tablas que facilitan trabajo tan penoso. Mas como todavía sea éste bastante complicado para la mayoría de la ruda gente de mar, patrones de cabotaje, que, sin embargo de sus pocas atribuciones y de su escasa cultura, no están exentos de responsabilidades, peligros y obligaciones que las leyes marítimas y el Código de Comercio les imponen, ha pensado cuerdamente el Sr. López Perea hacer para ellos más accesible aún la

predicción de las mareas, exponiendo en su folleto un procedimiento sencillísimo, del cual no pretende él ser el inventor, sino meramente propagador, puesto que ese procedimiento, de origen misterioso, parece que es conocido y aplicado, como por tradición, por multitud de marinos que viven en el litoral español, tanto al Norte como al Sur, y no sabemos si también en el extranjero.

He aquí en qué concisos términos define el autor el método citado:

«Conocida — dice — la *epacta* correspondiente al año de que se trata y además el mes y la fecha del día en que se desea saber la hora de la pleamar en determinado puerto, se procederá con sujeción á la siguiente regla:

»Añádase al valor de la *epacta* el número de meses que haya desde el de Marzo á aquel en que se da, ambos inclusive, y á esta suma auméntese la fecha del día. La suma total multiplíquese por 4 y el producto divídase por 5; el cociente así obtenido expresará las horas y décimas de hora en que se verifica la pleamar en alta mar, y, sumándole el establecimiento correspondiente al puerto, tendremos la hora de la pleamar en el mismo puerto.

»Las décimas de hora del cociente, multiplicadas por 6, nos darán los minutos.

»Este procedimiento práctico, el más usual entre los patrones, es por ellos conocido con el nombre de *pleamar por cuatro quintos.*»

Dos cosas llaman desde luego la atención en el precedente enunciado. La primera es la sencillez y brevedad del cálculo, de carácter, por decirlo así, mnemotécnico, el cual, suponiendo que puede conducir con seguridad al resultado que se busca, hace surgir involuntariamente la insensata duda de si los insignes matemáticos, que á fuerza de pacientes y profundos estudios llegaron á poder formular la predicción de las mareas, perdieron en cierto modo vanamente el tiempo. Es la segunda la forma abigarrada de la suma de varios

números heterogéneos; de días y meses, que multíplicada por un factor al parecer empírico, la convierte, como por arte mágico, en horas y partes decimales de hora. Hay para quedar perplejo cualquiera acerca de la significación de tan extraña regla, y para buscar su solución ó su explicación en algún libro ó antecedente. Cuanto á libro, únicamente resulta que en el año de 1889 se publicó en Zaragoza una obrita titulada «Calendario Secular, completamente arreglado para 311 años por Alkindi V°», añadiendo que este autor fué un astrónomo árabe español, que de cierto modo también contenía igual regla.

El Calendario de que se trata es un conjunto abigarrado una mezcla índefinible de multitud de noticias de muy diversa y variada índole; muchas de ellas sumamente curiosas y útiles, en particular todas las que se refieren al Calendario perpetuo; otras de procedencia discutible ó autenticidad problemática, y algunas que despiden rancio sabor á las recetas de la desacreditada astrología.

En cuanto al autor, si bien es cierto que existió un escritor árabe, llamado *Alkindí*, que á fines del siglo IX compuso un «Libro del año» «que estuvo muy en boga, y al renacer las ciencias en Europa, fué traducido al latín, el compositor del *Calendario Secular* es, sin duda alguna, moderno, y oculta con el seudónimo Alkindí V° su verdadero nombre, como lo comprueba el hecho de estar en la obra impresas las fórmulas de Gauss para la determinación anual de la fecha de la Pascua.

Por lo que ahora importa, basta fijarse en la página 170, donde se expone la siguiente regla sin explicación alguna:

«Para saber cuándo será la conjunción (de la Luna) en cada mes, júntense el número de la epacta del año y el de los meses transcurridos desde Marzo, y si la suma no llega á 30, véase los que faltan para 30, y á tantos como faltan, será la conjunción del mes que se busca. Si la suma fuesen 30 justos, á 30 del mes ó 1 será la conjunción. Si pasase

de 30, véase cuántos le faltan para 60, y á tantos será la conjunción ó luna nueva.»

En estas líneas apunta la idea capital del método de predicción de las mareas, pero sin que el problema se aclare. Fuera de esto, sólo en la página 171 del Calendario se halla el siguiente párrafo, copiado aqui á la letra, por referirse precisamente al asunto que se examina:

«REGLA CONSTANTE PARA DETERMINAR LAS HORAS DE LAS MAREAS

»Con un sólo ejemplo, sin más explicación, nos haremos comprender. Vamos á averiguar la hora de marea del día 4 de Agosto de *1386*.

Epacta de aquel año	14
Fecha 4 de Agosto	4
Meses transcurridos desde Marzo	6
Suma	24
De cuya suma se restan	15
Resultando	9

que son las horas enteras, á las que hay que agregar los quintos de hora que se obtienen, restando las horas enteras (9 en este caso) de 15. 15 — 9 = 6, que son los quintos de hora que hay que agregar á 9.

$$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} : \text{Luego } 9 + 1 + \frac{1}{5} = 10 + \frac{1}{5}$$

es la hora exacta de pleamar.

»Siempre en luna llena la pleamar es á las tres.

»Cuando al quitar 15 no se obtiene resto es la pleamar á las tres.»

En esta regla, mucho más dificultosa que la preconizada por el Sr. López Perea, nada se dice del establecimiento de puerto ni á qué puerto se aplica, por lo que parece debe referirse á la pleamar en pleno Océano ó fuera de las costas. Más adelante se tratará de poner en claro este punto: por ahora basta llamar la atención sobre el año *1386*!, elegido en el anterior ejemplo, como si con esa fecha remota el nuevo Alkindi se propusiera despistar al lector. Lo que, en suma, se saca en limpio, es que el *Calendario Secular* deja en la misma obscuridad acerca del origen y significación del cálculo, fundado en el uso de la epacta para predecir la hora de la pleamar.

También en el libro intitulado *El Inseparable del Marino,* escrito por los Sres. Terry y Agacino, hállase una regla ó fórmula para predecir las mareas. Efectivamente, la pág. 246 de dicho libro (edición de 1883) contiene, sin aclaración de ningún género, una *regla de los prácticos de Bilbao*, reducida á tomar los $\frac{4}{5}$ de la suma formada por el número de meses que hay á partir de Marzo y días del mes de la fecha (como siempre), y añadir á esta suma el establecimiento de puerto; pero, en cambio, se prescinde en absoluto de la epacta, por lo que tal regla sólo puede dar resultados ciertos en muy contados casos, por ejemplo, si la epacta del año fuera igual á *cero* ó á 15.

Forzoso ha sido, pues, rastrear el principio científico en que se funda ó ha de fundarse la verdadera regla, por una serie de razonamientos que se van á exponer con la concisión posible á renglón seguido.

De los dos astros, Sol y Luna, cuya fuerza atractiva combinada sobre la superficie líquida de la Tierra produce el fenómeno de las mareas, es preponderante la de la Luna, casi dos y media veces mayor que la del Sol. Considerando aquí, únicamente, entre la multitud de ondas de diversos períodos á que da origen dicha fuerza, la oscilación semidiurna,

que predomina en gran parte de las costas de Europa, su período es, por término medio, de doce horas y veinticinco minutos. El exceso de veinticinco minutos sobre las doce horas corresponde á la mitad del *retardo* que la Luna, en virtud de su movimiento propio orbital, experimenta entre dos pasos consecutivos por un mismo meridiano, y que asciende á unos 50,6 minutos, pudiendo oscilar entre los límites 38 y 66 minutos, según sea la posición que aquel astro ocupa en su órbita. Ahora bien; la suma de los retardos consecutivos que haya hasta un día determinado, contándolos á partir de la fecha en que se verifique un novilunio ó conjunción del Sol y la Luna, permitirá hallar con alguna aproximación la hora de la culminación de la Luna en dicho día, la cual, teóricamente al menos, debe coincidir con la hora de la pleamar. Lo que hace falta, pues, en primer término, es el conocimiento de la fecha en que ocurre ese novilunio, y para ello puede servir la *epacta* de cada año, que todos los calendarios insertan juntamente con los demás elementos del cómputo eclesiástico, y es, como se sabe, la *edad* de la Luna el día 1.° de Enero del año propuesto, ó el número de días transcurridos desde el novilunio correspondiente al mes de Diciembre anterior.

La *revolución sinódica* de la Luna es el intervalo de tiempo comprendido entre dos novilunios consecutivos. Su duración varía unas 13 horas por efecto de la excentricidad de la órbita lunar y la de la Tierra alrededor del Sol, pero su *valor medio* es de 29 días, 12 horas, 44 minutos y 2,9 segundos, ó 29,53 días. Teniendo esto en cuenta, de la suma de los retardos diurnos de la Luna, á que más arriba se aludió, pueden eliminarse todos los períodos sinódicos que resulten, puesto que al cabo de cada período las mismas circunstancias se repiten, y conservar solamente los residuos que queden. Por este motivo, como los meses de Enero y Febrero suman 59 días en los años comunes y 60 en los bisiestos, equivalen muy próximamente á *dos revoluciones sinódicas*,

y la *epacta* del 1.° de Marzo es la misma que la del 1.° de Enero. Además, el número *medio* de días de cada mes en el año es de 30,5 días, ó lo que es igual, á *una revolución sinódica y un día.*

En llegando á este punto ya se ponen en claro varios enigmas del método para el cálculo de la pleamar. Primeramente, la cuenta de los meses se hace á partir desde Marzo inclusive, para evitar la deficiencia del mes de Febrero, y en cada mes se prescinde de una revolución sinódica y queda un día; he aquí cómo la suma de meses se convierte en suma de días, y toda resulta así homogénea. Pero lo que se necesita no son los días, sino los retardos correspondientes á los mismos. Supóngase por un momento que el retardo de la Luna fuera de *una hora* en cada día; la suma del número de la *epacta*, de los números de los meses y de la fecha del mes propuesto, eliminando los días, quedaría entonces convertida en *suma de horas*. Ahora bien; el retardo diurno medio es sólo de 50,6 minutos, valor bastante aproximado á 48 minutos ó $\frac{4}{5}$ de hora; si, por tanto, dicha suma se multiplica por este factor, resultará, como prescribe el método, *la hora de la pleamar* expresada en tiempo medio astronómico.

Queda todavia un punto obscuro por esclarecer: por qué se incluye en el cálculo como sumando la unidad correspondiente al mes de la fecha. Parecía natural que por redundancia no figurase en él, pero conjeturamos que el incluírla se debe á un procedimiento imaginado para compensar la acumulación de errores. Con efecto, se ha supuesto en el método que el retardo lunar era de $\frac{4}{5}$ de hora ó 48 minutos nada más, cuando en rigor asciende á $50^{m},6$. La diferencia de $2^{m},6$ va acumulándose en los meses sucesivos, en términos que en un año llega á exceder de una hora. Para evitar este error, ya considerable, ocurrióle al autor incógnito un expediente ingenioso que, sin alterar la sencillez del

cálculo, permitía corregir aquél en parte, hasta hacerlo en casi todos los meses tolerable, dentro de la precisión que es posible alcanzar.

El adjunto cuadro suministra con suficiente claridad los datos necesarios para comprender qué género de compensación el autor se propuso. Las columnas del mismo sucesivamente contienen:

1.ª y 2.ª Números de orden n, y nombre de los meses á partir del de Marzo.

3.ª Sumas D' de los días de los meses, desde el 1.º de Marzo, suponiendo todos los meses iguales, y compuestos cada uno de 30,6 días, valor que sólo en el anómalo de Febrero puede producir error de cuantía. En cambio, este procedimiento permite hacer más palpable la compensación de errores.

4.ª Sumas S de las revoluciones sinódicas de la Luna, partiendo del mismo origen.

5.ª Las diferencias $D' - S$, que van creciendo, por ser más corta que el mes la revolución sinódica.

6.ª El producto por n del retardo de 48 minutos adoptados en el método, y designado por A_n. Es la suma de los retardos que se toma en cuenta en el cálculo.

7.ª Las sumas B'_n de los retardos medios exactos, multiplicados por el factor $D' - S$.

8.ª Las diferencias $A_n - B'_n$, que son los errores cometidos por no adoptar los verdaderos retardos, y que con el tiempo van acumulándose; y

9.ª Designada por los símbolos $A_n - B'_{n-1}$, las diferencias que se obtienen por el método de compensación empleado en el cálculo de la pleamar publicado por el Sr. López Perea.

Procedimiento de compensación de errores que se emplea en el método abreviado ó cálculo práctico para determinar la hora de la pleamar.

n	MESES	Sumas de los días. D'	Sumas de revoluciones sinódicas de la Luna en días $S=29{,}53\times n$	Diferencias. $D'-S$	A_n $=48^m\times n$	B'_n $=(D'-S)$ $\times 50^m{,}6$	$A_n-B'_n$ (Diferencias ó errores.)	$A_n-B'_{n-1}$ (Errores compensados.)
1	Marzo.....	$30{,}^d6$	$29{,}^d53$	$+\ 1{,}^d07$	48^m	$54{,}^m1$	$-\ 6{,}^m1$	$+48^m0$
2	Abril.....	61, 2	59, 06	2, 14	96	108, 3	— 12, 3	+ 41, 9
3	Mayo.....	91, 8	88, 59	3, 21	144	162, 4	— 18, 4	+ 35, 7
4	Junio.	122, 4	118 12	4, 28	192	216, 6	— 24, 6	+ 29, 8
5	Julio.....	153, 0	147, 65	5, 35	240	270, 7	— 30, 7	+ 23, 4
6	Agosto.	183, 6	177, 18	6, 42	288	324, 9	— 36, 9	+ 17, 3
7	Septiembre.....	214, 2	206, 71	7, 49	336	379, 0	— 43, 0	+ 11, 1
8	Octubre.....	244, 8	236, 24	8, 56	384	433, 1	— 49, 1	+ 5, 0
9	Noviembre.....	275, 4	265, 77	9, 63	432	487, 3	— 55, 3	— 1, 1
10	Diciembre.	306, 0	295, 30	10, 70	480	541, 4	— 61, 4	— 7, 3
11	Enero.....	336, 6	324, 83	11, 77	528	595, 6	— 67, 6	— 13, 4
12	Febrero.....	367, 2	354, 36	(12, 84)	576	649, 7	— 73, 7	— 19, 6
13	Marzo.....	397, 8	383, 89	(13, 91)	624	703, 8	— 79, 8	— 25, 7

He aquí un ejemplo del uso de los números insertos en el cuadro. Sea un día del mes de Octubre: por el procedimiento correcto debería tomarse la suma de los retardos hasta fin de Septiembre, y agregar la fecha f del día, es decir:

$B'_7 + f = 379^m,0 + f$; pero entonces, al tomar $A_7 = 336^m$ el error acumulado sería igual á $-43^m,0$. Añadamos el retardo A_8 de Octubre $= 384^m$, en lugar de 336^m, y el error $A_8 - B'_7$ queda reducido á $+ 5^m,0$.

Antes de seguir adelante, es esta ocasión oportuna de comparar el cálculo de Alkindi con el que nos ocupa, y pudiera llamarse *abreviado*. En aquél, se recordará que de la suma de la epacta, los meses y los días se substraía el número 15, y en las horas enteras del residuo, restadas de 15, se agregaban los quintos de hora como complemento. Usando el lenguaje algebraico para mayor claridad, si á dicha suma la llamamos s, M al método abreviado y m al de Alkindi, tendremos:

$$M = \frac{4}{5}\, s, \text{ prescindiendo del Establecimiento de puerto;}$$

$$m = (s - 15) + \frac{15 - (s - 15)}{5} = (s - 15) + \frac{15}{5} - \frac{(s - 15)}{5} =$$

$$= \frac{4}{5}\, s - \frac{4}{5} \times 15 + 3 = M - 12 + 3,$$

lo que quiere decir, que Alkindi refiere las horas al tiempo civil, y supone, bien claro lo expresa, que la pleamar se verifica en luna llena *siempre* á las tres de la madrugada; pero ¿dónde?, eso no lo dice.

Véase ahora un estudio comparativo del método propuesto, con los resultados que por los métodos conocidos se obtienen, resolviendo algunos ejemplos numéricos.

Primer ejemplo. Propongámonos hallar la hora de la pleamar en Santander el día 9 de Enero de 1911 (Ejemplo puesto en su opúsculo por el Sr. López Perea):

Epacta gregoriana de 1910.....	=	19
Meses (á partir de Marzo 1910).....	=	11
Días del mes de Enero.....	=	9
SUMA.....	=	39
	× ..	$0{,}8 = \frac{4}{5}$
		31,2
Tiempo civil de Greenwich.	=	7^h 12^m
Establecimiento de puerto.....	= +	3 0
PLEAMAR	=	10 12 noche.

COMPARACIÓN

Cálculo por el método abreviado.....	=	10^h	12^m	noche.
Idem por las fórmulas del *Annuaire du Bureau des Longitudes*.....	=	9	51	»
Idem por comparación con Brest.....	=	10	37	»

En este ejemplo ocurre una circunstancia curiosa. El señor López Perea padeció la distracción de tomar la epacta de 1911 en vez de la de 1910, y encontró para la hora de la pleamar en Santander en dicho día $19^h 48^m$, ó sean las $7^h 48^m$ de la mañana, que ninguna relación guardan con los resultados expuestos arriba. Se ha de tomar siempre la epacta *anterior* al mes de Marzo, que sirve de punto de partida.

Segundo ejemplo. Hallar la hora de la pleamar en La Coruña el 20 de Mayo de 1912.

Tomando la epacta gregoriana de 1912 = 11, se tiene por el método abreviado	=	5^h	53^m	de la tarde.
Por las *Ephémérides Astronomiques et Annuaire des Marées*, de M. Dubois.....	=	5	30	» »
Por el *Anuario de Mareas*, que publica el señor Nadal-García, del Observatorio de San Fernando.....	=	5	56	» »

Datos siempre referidos á la hora civil del meridiano de

Greenwich. Este ejemplo, ligeramente corregido, es también del Sr. López Perea.

Tercer ejemplo. Hallar la hora de la pleamar en Santander el 10 de Julio de 1911.

Tomando la epacta gregoriana de 1911 = 30 ó 0, el método abreviado da.....	$= 15^h\ 0^m = 3^h\ 0^m$ mañana.
Por las fórmulas que antes publicaba el *Annuaire du Bureau des Longitudes*	= 14 50
Según el mismo *Annuaire* por comparación con las mareas de Brest.....	= 14 57

Cuarto ejemplo. Hallar la hora de la pleamar en Bilbao el 23 de Julio de 1911. (De López Perea.)

Por el método abreviado.....	$= 1^h\ 19^m$ de la tarde.
Por comparación con las mareas de Brest *(Annuaire)*	= 1 0 » »

Quinto ejemplo. Hallar la hora de la pleamar en San Fernando el 9 de Mayo de 1911. (De López Perea.)

Por el método abreviado.....	$= 11^h\ 31^m$ de la noche.
Por comparación con las mareas de Brest *(Annuaire)*.....	= 11 14 » »

Sexto ejemplo. Hallar la hora de la pleamar en Brest el 29 de Abril de 1907.

Tomando la epacta gregoriana de 1907 = 16, el método abreviado da.....	$= 16^h\ 34^m = 4^h\ 34^m$ mañana.
Por las fórmulas que antes publicaba el *Annuaire du Bureau des Longitudes*.....	= 16 20
Por las efemérides que ahora publica el mismo *Annuaire*.....	= 16 42

Séptimo ejemplo. Hallar la hora de la pleamar en Brest el 25 de Abril de 1909.

Tomando la epacta de 1909 = 8 se tiene por el método abreviado.....	= $7^h 46^m$		de la	tarde.
Por las fórmulas que antes publicaba el *Annuaire du Bureau des Longitudes*.....	= 7	43	»	»
Por las efemérides que ahora publica el mismo *Annuaire*	= 7	53	»	»

Débese advertir que no todos los días, en un lugar determinado, ocurren dos mareas, supuesto que el día lunar tiene mayor duración que el día solar; y que la pleamar que da el cálculo, es la que inmediatamente sigue al paso de la Luna por el meridiano.

Podrían multiplicarse los ejemplos, mas parece que bastan los expuestos para asegurar la veracidad y eficacia del método de cálculo objeto de este informe. Se habrá advertido que siempre han sido empleados los *valores medios* de los datos que ha habido necesidad de utilizar, datos generalmente inexactos, pero otra cosa no puede hacerse en problema tan complejo como el de que se trata. Ni concuerdan las diferentes efemérides en las horas de las pleamares para un puerto determinado, ni la onda sinusoidal que dibuja el incesante movimiento periódico de ascenso y descenso de las aguas del mar es tampoco simétrica; de suerte que, entre dos pleamares consecutivas, la bajamar intermedia no acaece á á intervalos iguales de tiempo, ni tampoco es siempre igual el intervalo que separa una pleamar de la siguiente: cosa nada extraña, supuesto que las fuerzas que originan ese movimiento no son constantes en intensidad ni en dirección.

Por otra parte, aunque la predicción de la marea está sujeta á fórmulas matemáticas, la teoría difiere siempre algo de lo que en la realidad ocurre por efecto de diversas causas locales, como la acción de los vientos, la presión barométri-

ca, el estado de agitación del mar, la configuración de las costas, etc.

Para el Océano, en general, el trabajo que tiene que efectuar la onda de marea para vencer la inercia que las partículas líquidas oponen al movimiento, hace que el fenómeno no se manifieste en toda su amplitud hasta 36 horas después de haberlo ocasionado la atracción combinada del Sol y la Luna. Mas para las costas, además de este retraso, hay otro dependiente de su forma y configuración, de la mayor ó menor abertura del puerto, de su extensión superficial, de la importancia del caudal del río ó ríos que en él desemboquen, de la profundidad, calidad y desigualdad del fondo, del régimen de los vientos locales, etc. Este retraso, variable para cada punto y aun para distintos puntos del mismo puerto, se puede considerar constante para todas las mareas y recibe el nombre de *Establecimiento de puerto.*

La variabilidad y poca confianza que existe para la determinación de este elemento de cálculo, ha hecho que ahora, cuando han sido tabuladas para cada año las efemérides de las mareas en un puerto cuyas condiciones son bien conocidas, suele aplicarse una corrección, tampoco estrictamente constante, á dichas efemérides para hallar la hora de la pleamar en otro puerto cualquiera. Pero, aunque el Establecimiento de puerto, científicamente considerado, no sea exacto, su variación es tan pequeña, que influye muy poco en el cálculo, preciso hasta donde es posible, de las horas de las mareas, y aquél puede utilizarse, sin gran inconveniente, sobre todo si su valor ha sido determinado experimentalmente con gran esmero.

Otra circunstancia interesante en este asunto es la poca diferencia que existe en el nivel de las aguas en los momentos anteriores y posteriores próximos á la pleamar ó bajamar. Como la totalidad del movimiento de ascenso ó descenso de las mismas se efectúa en poco más de seis horas, y la velocidad de dicho movimiento es proporcional al *senoverso* del

tiempo transcurrido á partir del instante de la altura máxima ó mínima, respecto del nivel medio de las aguas, se advertirá fácilmente que una hora antes ó después de la pleamar la variación de nivel sólo llegará á valer 0,13 de la altura total de la marea. Así, por ejemplo, si la altura de la marea en un puerto fuera de *4 metros*, que en pocos casos se presenta, la variación de nivel en ese puerto no pasaría de *medio metro*, frecuentemente superada por un pequeño oleaje. Parece, pues, que no excediendo de una hora, en más ó en menos, el error cometido, el método que trata de vulgarizar el señor López Perea es legítimamente aplicable.

Una última consideración para terminar este largo informe. Sabido es que el astrónomo griego Metón, observando que 235 meses lunares eran equivalentes á diez y nueve años solares, ideó el *ciclo lunar*, designando con un número, llamado desde entonces (por la importancia que se concedió á este hecho), *áureo número*, cada año del ciclo, en virtud del cual, cada diez y nueve años las fases de la Luna se suceden en las mismas fechas. El áureo número, que es igual al resto de la división por 19 de la fecha del año aumentada en una unidad, se utilizó, en consecuencia, para calcular las *epactas* por una regla invariable. Creyóse en un principio que el ciclo lunar era exacto, pero después se vió que existía un pequeño error en su duración, el cual, acumulándose con el tiempo, llegaba á valer ocho días en veinticinco siglos y hubo que prescindir del áureo número para hallar las *epactas*, distribuyendo éstas en 30 ciclos diferentes, de diez y nueve años cada uno y que se suceden ordenadamente al cabo de muchos años. Pero todavía se puede utilizar el áureo número para el cálculo de las *epactas*, siempre que se modifique, cuando sea oportuno, la fórmula que relaciona estas dos cantidades. Así, pues, si con arreglo á la notación empleada por los computistas, y entre ellos por D. José Sánchez Cerquero, en su notable Memoria publicada en el tomo II de las de esta Real Academia con el título de *Elementos de*

Cronología Analítica, designamos por N el áureo número y por E' la *epacta* correspondiente al calendario gregoriano, se tendrán las fórmulas siguientes, en las que se ha de tomar el resto r de la división del numerador por 30:

Desde el año 1700 al 1899, ambos inclusive,

$$E' = \left(\frac{11\,N - 11}{30}\right) r$$

Desde el año 1900 al 2199, ambos inclusive,

$$E' = \left(\frac{11\,N - 12}{30}\right) r$$

donde, en caso necesario, han de agregarse al numerador 30 unidades para evitar los restos negativos.

Ahora bien; el Sr. López Perea no se ha fijado, sin duda por olvido, en esta circunstancia, y halla las *epactas* correspondientes al siglo actual por la primera de estas fórmulas, introduciendo un error en el cálculo de cuarenta y ocho minutos.

Si en una nueva edición de su folleto dicho señor atiende, como es seguro, los ligeros reparos apuntados en este informe, no vacila la Academia en declarar que el trabajo del Sr. López Perea es realmente de utilidad pública, declaración á que aspira en su primera instancia y como tal propio también para ser adquirido para las bibliotecas de cultura popular, según el Real decreto de 30 de Abril de 1909, así como es digno el autor de loa por sus perseverantes esfuerzos en vulgarizar y extender conocimientos de frecuente aplicación entre las clases menos ilustradas, como lo prueba su reciente publicación de un *Manual del Patrón de Cabotaje*, lleno de datos numerosos y de gran provecho para las personas á quienes está dedicado.

Tal es el parecer que la Academia tiene la honra de someter al superior criterio de V. I. con devolución del expediente y tres ejemplares del folleto de referencia.

Dios guarde á V. I. muchos años.—Madrid, 6 de Mayo de 1912.—El Secretario general, *Francisco de P. Arrillaga.*—Ilmo. Sr. Subsecretario del Ministerio de Instrucción pública y Bellas Artes.

VIII.— Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia vigésima.

SEÑORES:

Expusimos en la conferencia anterior el método de Dirichlet para determinar la función potencial, en todo el espacio, de un elipsoide macizo y homogéneo.

Y aplicando el método, que en dicha conferencia recordamos, hemos llegado á demostrar que la función

$$U_e = \pi abc\rho \int_u^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda}}$$

cumplía con las condiciones necesarias para representar la potencial del elipsoide en un punto exterior; porque era finita y bien determinada, así como sus derivadas primeras y segundas, en todo el espacio exterior. Que además se anulaba en el infinito, y que en dicho espacio exterior, verificaba á la ecuación de Laplace $\Delta U_e = o$.

Demostramos asimismo que la función

$$U_i = \int_o^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

cumplía á su vez con las condiciones necesarias para ser la potencial de cualquier punto interior del elipsoide, puesto

que era finita y bien determinada en dicho dominio, así como sus derivadas primeras y segundas, y que satisfacía en el dominio interior á la ecuación de Poisson $\Delta U_i = 4\pi\rho$.

Y decíamos, aplicando un teorema demostrado anteriormente, que el conjunto de las dos funciones U_e, U_i representaba la potencial del elipsoide en todo el espacio. Es decir, tanto para puntos del interior de dicho sólido como para puntos del exterior, y aun para puntos de su misma superficie.

Pero agregábamos al terminar la conferencia, que esta conclusión era exacta, mas, por decirlo así, precipitada. Es necesario además, que para puntos situados sobre la superficie del elipsoide las dos fórmulas coincidan, ó de otro modo, que las dos funciones U_e, U_i concuerden y se unan en cada punto de la superficie del elipsoide.

Y esto, en efecto, es lo que sucede; porque observemos, que las expresiones U_e, U_i sólo difieren en el límite inferior, que en U_e es u y que en U_i es o. En todo lo demás, es decir, en la expresión que se halla bajo el signo integral, son idénticas

Pero hemos demostrado, que cuando se toman puntos de la superficie del elipsoide, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=o,$$

que es la que define u, da para esta variable el valor cero, puesto que las coordenadas x, y, z de dicha superficie satisfacen á la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=o$$

que es precisamente la anterior, haciendo $u=o$.

Ahora bien, si hacemos $u=o$ en la expresión U_e, coincide ésta exactamente con U_i, si además las coordenadas x, y, z

son las mismas en ambas y determinan puntos de la superficie del elipsoide.

Podría aún demostrarse, que si un punto variable viene de lo exterior, aproximándose á la superficie del elipsoide, y otro del interior, aproximándose al mismo punto, las dos integrales coinciden para este último.

Por lo demás, hemos probado, que ambas integrales tienen valores finitos cuando el límite inferior es o.

*
* *

Esta condición que acabamos de discutir, á saber, que coincidan U_e, U_i sobre la superficie del elipsoide es absolutamente necesaria, porque se pueden obtener infinitos valores para U_i que cumplan con las condiciones de dicha función y que sin embargo no puedan representar la potencial interior del elipsoide por no concordar sobre la superficie de éste con U_e.

Por ejemplo, si hacemos

$$U_i = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D$$

siendo A, B, C, D tres constantes indeterminadas, tal función cumple con todas las condiciones de U_i menos una.

Es finita para puntos interiores del elipsoide y bien determinada, como que es una función racional de segundo grado; son finitas y bien determinadas sus derivadas primeras y segundas, y podemos determinar sus constantes de modo que satisfaga á la ecuación de Poisson.

En efecto, tendremos, sucesivamente

$$\frac{dU_i}{dx} = 2Ax, \quad \frac{dU_i}{dy} = 2By, \quad \frac{dU_i}{dz} = 2Cz$$

$$\frac{d^2U_i}{dx^2} = 2A, \quad \frac{d^2U_i}{dy^2} = 2B, \quad \frac{d^2U_i}{dz^2} = 2C$$

y, por lo tanto, para que satisfaga á la ecuación de Poisson, bastará que se tenga

$$2A + 2B + 2C = -4\pi\rho,$$

condición que siempre puede verificarse y de infinitas maneras, toda vez que A, B, C son indeterminadas. Basta fijar arbitrariamente el valor de dos de ellas y despejar la tercera.

Tenemos, pues, infinitas soluciones para U_i.

Pero estas soluciones no cumplen en general con la condición que estamos discutiendo; no empalman estas funciones, si vale la palabra, con U_e, sobre la superficie del elipsoide; para que esta condición se verifique, A, B, C, deben tener valores determinados.

Y observen mis alumnos que la solución de Dirichlet

$$U_i = \lambda abc\rho \int_o^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{z^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

coincide exactamente con la expresión

$$U_i = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D$$

dando á A, B, C ciertos valores.

En efecto, la fórmula de Dirichlet puede escribirse de este modo

$$U_i = \pi abc\rho \int_o^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \left[\pi abc\rho \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right] x^2 -$$

$$- \left[\pi abc\rho \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right] y^2 - \left[\pi abc\rho \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right] z^2$$

en que hemos podido sacar fuera de la integral x^2, y^2, z^2, porque son constantes para la integración, y que de este modo se convierte en un polinomio de segundo grado, lo mismo que la expresión anterior de U_i.

Para que coincidan basta que demos á A, B, C, D los siguientes valores:

$$A = -\pi abc\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$B = -\pi abc\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$C = -\pi abc\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$D = \pi abc\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

El artificio de Dirichlet consiste en haber puesto bajo el signo integral en la expresión de U_i el mismo polinomio de segundo grado que en la expresión de U_e, porque de este modo la coincidencia de U_e U_i es inmediata.

***

Claro es, que teniendo la potencial, los valores de las componentes de la atracción del elipsoide sobre cualquier punto de lo interior ó de lo exterior, se obtienen inmediatamente, con sólo diferenciar dicha potencial con relación á x, y, z y de multiplicar por f.

Y aun para nosotros esta diferenciación es inútil, porque ya hemos obtenido las derivadas primeras.

Para obtener las componentes de la atracción sobre un punto exterior, basta recordar los valores, que en la conferencia precedente hallamos para

$$\frac{dU_e}{dx}, \frac{dU_e}{dy}, \frac{dU_e}{dz},$$

y tendremos

$$X_e = -f \cdot 2\pi abc\rho x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$Y_e = -f \cdot 2\pi abc\rho y \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

$$Z_e = -f \cdot 2\pi abc\rho z \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

Estas tres expresiones son evidentemente funciones, como hemos demostrado, de x, y, z. La integral indefinida pertenece á la categoría de las funciones elípticas, puesto que el radical comprende un polinomio de tercer grado en λ.

Tenemos, pues, resuelto el problema de la atracción del elipsoide y de sus componentes sobre un punto exterior. Es decir, sobre cualquier punto exterior al elipsoide en que se colocara una masa igual á la unidad.

Otro tanto podemos repetir para un punto interior. Bastará para obtener las componentes de la atracción, diferenciar con relación á x, y, z, la potencial del dominio interior.

Y como ya esto lo hemos hecho, bastará multiplicar los valores

$$\frac{dU_i}{dx}, \frac{dU_i}{dy}, \frac{dU_i}{dz},$$

por f para obtener las tres componentes de la atracción, y tendremos

$$X_i = -f \cdot 2\pi abcx \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

$$Y_i = -f \cdot 2\pi abcy \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}},$$

$$Z_i = -f \cdot 2\pi abcz \int_o^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Resultan las componentes proporcionales respectivamente á las coordenadas del punto, salvo algún factor constante distinto para las tres componentes, pues son distintas las tres integrales.

Con esto queda resuelto por el método de Dirichlet el problema de la potencial y de la atracción de un elipsoide homogéneo y macizo para cualquier punto del espacio.

De donde podrían deducirse las soluciones de otros varios problemas respecto á capas elipsoidales.

***

Del problema anterior, que se refiere á cualquier elipsoide homogéneo, podemos deducir la potencial y las atracciones para cualquier elipsoide de revolución.

Fijémonos en el cálculo de la potencial.

Determinemos la potencial para un punto exterior y supongamos $c = a$. Es decir, que el elipsoide es de revolución alrededor de b.

Basta hacer en la fórmula general de U_e, $a = c$, y tendremos

$$U_e = \pi a^2 b \rho \int_u^\infty \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

en que u es la raiz positiva de

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - 1 = o$$

y

$$\varphi(\lambda) = (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda).$$

Diferenciando este valor de la potencial con relación á x, y, z, se obtendrán las tres componentes de la atracción.

Pasemos á la potencial para un punto interior cualquiera, ó bien sobre la superficie, y tendremos, haciendo $a=c$,

$$U_i = \pi a^2 b \rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2 + \lambda}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Esta expresión de U_i se puede obtener bajo forma finita, es decir, sin que aparezca ninguna integral, por procedimientos elementales. En efecto, tendremos, descomponiendo en tres términos:

$$U_l = \pi a^2 b \rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \pi a^2 b \rho (x^2 + z^2)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \pi a^2 b \rho y^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

sacando fuera de las integrales las constantes en x, y, z.

Tendremos, pues, que obtener las tres integrales siguientes:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)}}; \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)}};$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{(a + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)}};$$

ó bien

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{b^2 + \lambda}}; \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 \sqrt{(b^2 + \lambda)}};$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Todas estas integrales se efectúan fácilmente introducien-

do una nueva variable t, que sustituya á λ y que esté relacionada con ella por la ecuación

$$b^2 + \lambda = t^2.$$

En efecto, λ resulta función racional de t, á saber:

$$\lambda = t^2 - b^2.$$

La diferencial de λ también es función racional de la nueva variable, puesto que resulta

$$d\lambda = 2tdt.$$

Por último, el radical

$$\sqrt{b^2 + \lambda}$$

se convierte, á su vez, en función racional de la variable t, toda vez que se tiene

$$\sqrt{b^2 + \lambda} = \sqrt{t^2} = t,$$

con lo cual, sustituyendo en las tres integrales, éstas se convierten en funciones racionales de t, que se integran sin dificultad. Todo esto es elemental.

***

Como aplicación de la teoría de la potencial y de las atracciones hemos estudiado los ejemplos siguientes:

Una superficie esférica; una capa esférica infinitamente delgada; una capa esférica finita; una esfera maciza; un esferoide, también macizo, y el caso particular de un esferoide de revolución.

Para todos estos casos suponíamos, que las masas eran homogéneas.

Vamos á presentar ahora otro ejemplo de distinto orden, puesto que vamos á considerar á la vez masas positivas y negativas.

Ejemplo que, en su día, veremos que tiene aplicación á la teoría del magnetismo.

Y ampliando este último ejemplo, vamos á considerar otro, que será el último, en que el sistema se compondrá también de masas positivas y negativas constituyendo dos hojas paralelas infinitamente próximas.

Caso que encontraremos en el estudio de los imanes laminares y también en la teoría de la electricidad estática.

Por eso hemos dicho tantas veces, que la teoría de la potencial y de las atracciones ó repulsiones, no era una teoría abstracta de las matemáticas, aunque bien pudiera serlo, sino una teoría de uso constante en la Física Matemática, tanto clásica como moderna.

*
* *

Potencial de un pequeño imán. — Imaginemos una barra magnética NS (fig. 75), cuya longitud supondremos infinitamente pequeña con relación al campo en que vamos á estudiar su influencia; es decir, que si P es un punto de dicho campo, las distancias PS, PN que representaremos por r' y r, serán muy grandes con relación á la longuitud $NS = \varepsilon$ de la barra-imán de que se trata.

Según la hipótesis generalmente ordinaria, y que es muy cómoda para la teoría matemática del magnetismo, se admite que éste es una *substancia* material, compuesta de otras dos substancias elementales, de propiedades análogas y opuestas (y ya definiremos lo que esto significa), y que cuando están reunidas en cantidades iguales, constituyen un sistema neutro, de modo que no ejerce influencia ninguna magnética sobre los demás sistemas.

Claro es que ahora ni podemos precisar esta definición, ni

pretendemos discutir sus diversos términos; esto queda para cuando estudiemos en otro curso los fenómenos magnéticos, ó dicho en forma concisa, el magnetismo.

Por el pronto, no hacemos más que recordar nociones de la Física elemental, que seguramente conocen mis alumnos.

Para el ejemplo que pretendemos estudiar, ejemplo puramente ideal, consideraremos la barra NS como una línea recta que termina en los puntos N y S.

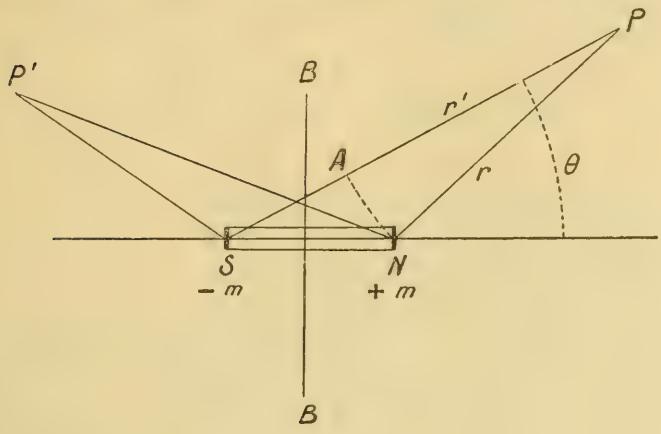


Figura 75.

En el punto N supondremos una masa $+ m$, que llamaremos magnetismo norte ó positivo, y en el punto S otra masa $- m$, que llamaremos magnetismo sur ó negativo.

Las masas $+ m$ y $- m$ tienen la propiedad de atraer ó rechazar según la ley newtoniana á otras masas magnéticas, con la particularidad de que rechazan á masas del mismo signo y atraen á masas de signo contrario, ni más ni menos que las masas eléctricas positivas y negativas, las cuales se encuentran en el mismo caso. Es decir, que se atraen siendo de signo contrario y se rechazan siendo del mismo signo.

Así, por ejemplo, la masa $+ m$ *rechazará* á una masa positiva $+ \mu$ que diste de ella r, según la fórmula,

$$\text{repulsión} = k\frac{m\mu}{r^2} \quad \text{entre } + m \text{ y } + \mu,$$

siendo k un coeficiente fijo, que dependerá del sistema de unidades que se elija.

Por el momento prescindimos del signo.

Esta misma masa $+ m$ atraerá á la masa $- \mu$ según la misma ley, y tendremos

$$\text{atracción} = k\frac{m\mu}{r^2} \quad \text{entre } + m \text{ y } - \mu.$$

Una cosa análoga podemos repetir para $- m$.

Hasta ahora hemos prescindido del signo; pero aquí conviene que hagamos algunas observaciones.

Sin entrar en pormenores, diremos, que la potencial, sean las masas positivas ó negativas, puede suponerse que tiene la misma forma que en las masas ponderables.

Es decir, que representando por m_1, m_2 ..... m_n, varias masas eléctricas ó magnéticas, positivas ó negativas; por r_1, r_2 ..... r_n, las distancias de estas masas, cada una de las que suponemos reconcentrada eu un punto, á un punto cualquiera del espacio, en el cual colocaremos una masa de prueba que sea positiva é igual á la unidad; con estas notaciones, repetimos, la potencial del sistema m_1, m_2, ... que designaremos como siempre por U, será

$$U = \frac{m_1}{r_2} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots\ldots \frac{m_n}{r_n}.$$

Consideremos sólo una masa m_1 (fig. 76), colocada en A y un punto del espacio B, en que colocaremos la masa de prueba 1.

La potencial en B de la masa m_1, será

$$U = \frac{m_1}{r_1}.$$

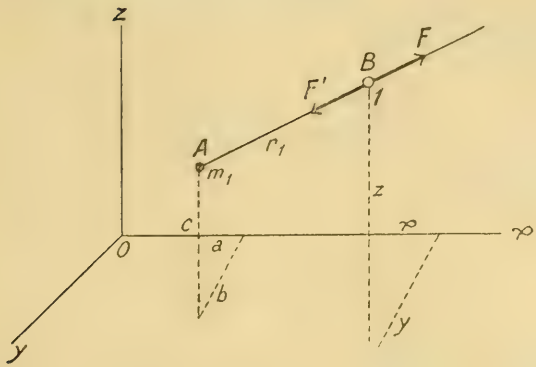


Figura 76.

Para pasar de la potencial á la función de fuerzas hay que multiplicar por el coeficiente numérico, que generalmente designamos por f para las masas ponderables, y que ahora designábamos por k, de modo que la función de fuerzas será

$$k \frac{m_1}{r_1}$$

y derivando esta función con relación á x, y, z, obtendremos las componentes de la acción de la masa m_1 sobre la masa 1, colocada en B.

Apliquemos esto á la componente paralela al eje de las x.

Llamándola X, y sin fijarnos por el pronto en el signo del segundo miembro, tendremos

$$X = k \frac{dU}{dx} = k \frac{d \frac{m_1}{r_1}}{dx} = k m_1 \frac{-\frac{dr_1}{dx}}{r_1^2}$$

y siendo

$$r_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2},$$

en que representamos por a, b, c, las ordenadas de la masa actuante m_1 y por x, y, z, las coordenadas del punto sobre el cual actúa, resultará

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{-(a-x)}{r_1}$$

y, por lo tanto,

$$X = k\, m_1 \frac{\frac{a-x}{r_1}}{r_1^2} = \frac{k\, m_1}{r_1^3}(a-x).$$

Y en efecto, numéricamente este es el valor de la acción de m_1 sobre el punto B; pero fijémonos en el signo, y para ello examinemos dos casos:

1.° Que m_1 sea positivo. En esta hipótesis la masa m_1 que es positiva y la masa 1 colocada en B, que es positiva siempre, porque así se supone, se rechazarán, y la acción estará representada por la fuerza F, y tal como hemos representado la figura, su componente X será positiva.

Ahora bien, en la fórmula de X, si k es positiva, el segundo miembro es negativo, porque x es mayor que a. Luego para que ambos miembros se correspondan, no sólo numéricamente, sino en signo, será preciso una de dos cosas: ó que el coeficiente k lleve siempre el signo —, ó bien que pongamos el signo — á toda la fórmula, continuando k como positivo.

Lo primero es más cómodo y por anticipación podemos decir que las fórmulas de las masas ponderables sirven para las masas eléctricas y magnéticas, sustituyendo al coeficiente positivo f el coeficiente negativo k.

Y esta regla es general.

En efecto, consideremos el segundo caso.

2.° Que m_1 (fig. 76) sea negativa. Entonces las masas de A y B, que son de signo contrario, se atraen. La acción de m_1 sobre la masa 1 colocada en B será F' y su componente X, dada la figura, será negativa.

Luego, X en el primer miembro es negativa, pero si k fuese positiva como en las masas ponderables, el segundo miembro sería positivo, porque tendríamos dos factores negativos: el uno m_1, que es cantidad negativa, el otro $a-x$.

La contradicción desaparece si suponemos, como antes, que k es negativa.

* * *

Para discutir todos los casos invirtamos la posición de $A\,B$. La masa actuante m_1 está en A (fig. 77); la masa de

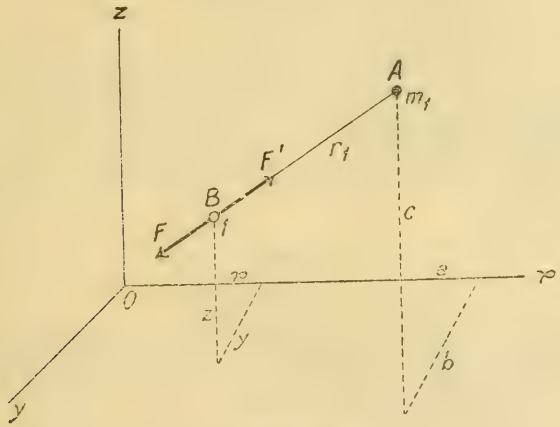


Figura 77.

prueba $+1$ está en B. Todas las demás notaciones son las mismas que en la figura anterior.

Si m_1 es positiva, su acción sobre B será la fuerza F y su componente X debe ser negativa.

Pero si se supone k positiva en la fórmula fundamental

$$X = \frac{km_1}{r^3}(a - x)$$

el segundo miembro resulta positivo, porque m_1 y r_1 son cantidades positivas, y siendo a mayor que x lo es también $a - x$.

Esto solo se corrige suponiendo k negativa.

Suponiendo m_1 negativa el razonamiento es el mismo, y la fórmula es correcta suponiendo que k lleva el signo negativo en sí ó explícitamente.

Porque, en efecto, siendo m_1 y la masa 1 de signos contrarios, la acción de m_1 sobre B será atractiva, es decir, que estará representada por BF'.

Su componente tambien será positiva, y el segundo miembro lo es porque hay dos cantidades negativas, k y m_1.

Toda esta discusión supone siempre, que en las fórmulas de las componentes se restan de las coordenadas del punto actuante las coordenadas del punto que sufre la acción.

Son todas ellas nimiedades en que sin embargo conviene fijarse, para evitar dudas y equivocaciones.

Y ahora volvamos á la figura 75, es decir, al imán elemental SN.

***

Hemos dicho (fig. 75) que en N hay una masa positiva $+m$, y en S una masa negativa $-m$, y hemos llamado r y r' á las distancias NP y SP.

La potencial del pequeño imán ó imán elemental será, según la definición anterior, que es la misma que para las masas ponderables,

$$U = \frac{m}{r} - \frac{m}{r'}$$

ó bien

$$U = m \frac{r' - r}{rr'}.$$

Pero la longitud SN del imán por hipótesis es muy pequeña, en comparación con las distancias r, r' al punto que se ha elegido, pues tomamos siempre puntos del campo muy distantes del imán; y, puesto que en el triángulo SPN se tiene

$$r' - r < \varepsilon,$$

porque la diferencia de dos lados es menor que el tercero, resulta que r y r' difieren en una cantidad muy pequeña, y en el *denominador* podemos suponer que son iguales, por ejemplo á r, ó á cualquier distancia del imán al punto P, con lo cual resulta:

$$U = m \frac{r' - r}{r^2}.$$

Trazando en la figura 75, como antes dijimos, el arco NA desde P como centro y con el radio r, este arco se confunde sensiblemente con la perpendicular bajada desde N á la recta PS.

Y se tiene

$$r' - r = AS = SN \cos ASN;$$

y designando la longitud del imán elemental NS por ε, y por θ el ángulo ASN, el valor de U podrá escribirse de este modo

$$U = m\varepsilon \frac{\cos \theta}{r^2}:$$

$m\varepsilon$, es decir, el producto de la masa por la longitud del imán, puede designarse por el nombre de *momento del imán*, y es una constante que lo caracteriza.

En la hipótesis, que hemos establecido, de que la longitud de ε sea muy pequeña con relación á sus distancias al campo magnético, pueden variar los factores de esta constante y el efecto magnético del imán quedar invariable.

Por ejemplo, un imán que tuviera la mitad de longitud que el propuesto, y en que la masa magnética m fuera doble, tendría en todos los puntos la misma potencial que en el caso anterior.

Claro es, que todo esto *no se aplica* á los puntos próximos al imán, á los que no son aplicables las simplificaciones de la fórmula general, que es siempre ésta

$$U = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right);$$

la cual se reduce, en las hipótesis establecidas, á esta otra, como hemos visto:

$$U = m\varepsilon\frac{\cos\theta}{r^2}$$

y que tendremos ocasión de aplicar más adelante.

En dicha fórmula, cada punto P del campo magnético ó eléctrico, está definido por coordenadas polares, que son r, ó si se quiere r', ó también la distancia de P al punto medio O del imán. Todas estas distancias son próximamente iguales.

La segunda variable θ es el ángulo que forma cualquiera de estas tres rectas, por ejemplo r', con el eje SN del imán.

Tomando tres ejes trirectangulares cualesquiera x, y, z y refiriendo á ellos el imán SN, las coordenadas de S y de N serán los datos del imán en unión con m, y las coordenadas del punto P serán x, y, z.

Fácilmente se sustituye en la fórmula anterior á las coordenadas polares r, θ, las coordenadas ordinarias x, y, z.

Y la potencial U resultará función de m, a, b, c, x, y, z.

Las cantidades m y las coordenadas de los polos a..... son

los datos como hemos indicado, y las variables serán x, y, z, coordenadas del punto P, de modo que suprimiendo las constantes tendremos

$$U = U(x, y, z).$$

Esta potencial satisface como ya hemos demostrado en conferencias anteriores á la ecuación de Laplace.

***

Al valor de la potencial U, de dos masas iguales, de signo ontrario y á una distancia muy pequeña una de otra, cuan-

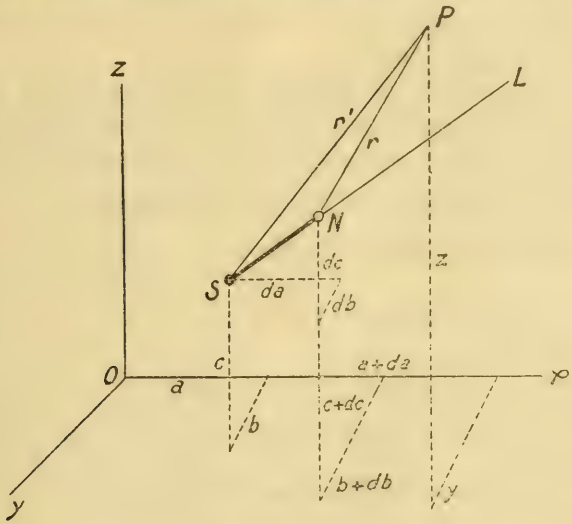


Figura 78.

do están colocadas de cualquier modo en el espacio, se le puede dar otra forma que es de mucho uso en la teoría del magnetismo.

Sea SN (fig. 78) un imán elemental de longitud ε sumamente pequeña, colocado de cualquier modo en el espacio, por ejemplo, según la recta SN. En sus extremidades S y N hay dos masas $-m$ y $+m$ eléctricas ó magnéticas.

El punto S está definido por las coordenadas a, b, c, y

como el punto N está muy próximo á S, estará definido por coordenadas que diferirán muy poco de las anteriores. Así las designaremos por $a + da$, $b + db$, $c + dc$.

Tomando ahora un punto cualquiera, del campo magnético, P, definido por las coordenadas x, y, z, si colocamos en dicho punto una masa magnética de prueba igual á $+1$, la potencial del sistema S, N sobre P será, como antes vimos,

$$U = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right);$$

y á esta expresión vamos á darle otra forma, según dijimos, forma al parecer más complicada, pero de mucha utilidad en la teoría del magnetismo.

Observemos que la distancia r' depende de los puntos S y P, luego r' será una función de las coordenadas a, b, c y de las x, y, z. Prescindamos de estas últimas, porque las vamos á considerar por el pronto como constantes.

Asimismo será una función de a, b, c el quebrado $\frac{1}{r'}$

Pero, en el último valor de U, $\frac{1}{r}$ no es otra cosa que el valor $\frac{1}{r'}$ cuando se pasa del punto S al punto N, es decir, cuando á las coordenadas a, b, c, se les dan los incrementos da, db, dc. Y la diferencia entre $\frac{1}{r}$ y $\frac{1}{r'}$ será la diferencial total de $\frac{1}{r'}$, ó si se quiere, de $\frac{1}{r}$, cuando á las tres variables de que dependen se les dan las variaciones indicadas. Es decir,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \varphi(a + da, b + db, c + dc) - \varphi(a, b, c) =$$

$$= \frac{d\frac{1}{r}}{da}da + \frac{d\frac{1}{r}}{db}db + \frac{d\frac{1}{r}}{dc}dc$$

en que hemos designado por φ á la función de a, b, c, que tiene por valor

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} = \varphi(a, b, c).$$

Resulta, por lo tanto, para el valor de la potencial del pequeño imán de que se trata

$$U = m\left(\frac{d\frac{1}{r}}{da}da + \frac{d\frac{1}{r}}{db}db + \frac{d\frac{1}{r}}{dc}dc\right).$$

Pero si designamos por α, β, γ los cosenos de los ángulos que forma la recta SN con los ejes coordenados, tendremos evidentemente

$$da = \varepsilon\alpha, \quad db = \varepsilon\beta, \quad dc = \varepsilon\gamma$$

y el valor de U se convertirá en

$$U = m\varepsilon\left(\frac{d\frac{1}{r}}{da}\alpha + \frac{d\frac{1}{r}}{db}\beta + \frac{d\frac{1}{r}}{dc}\gamma\right).$$

Claro es, que esta expresión, que es á la que antes nos referíamos, considerada como función de a, b, c, satisface á la ecuación de Laplace, puesto que se compone de sumas y diferenciaciones de la expresión $\frac{1}{r}$, que ya se considere como función de x, y, z, ya como función de a, b, c, satisface á la ecuación diferencial $\Delta\frac{1}{r} = o$.

La comprobación es elemental y no vale la pena de que en ella nos detengamos mucho. Nos limitaremos, pues, á indicar dicho cálculo de comprobación para a, b, c.

Acabamos de obtener

$$U = m\varepsilon \left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{da}\,\alpha + \frac{d\,\frac{1}{r}}{db}\,\beta + \frac{d\,\frac{1}{r}}{dc}\,\gamma \right).$$

Diferenciando dos veces con relación á a, dos veces con relación á b y otras dos con relación á c; observando que en $m\varepsilon$, α, β, γ, son constante, y sumando estas tres derivadas segundas, obtendremos sucesivamente

$$\frac{d^2 U}{da^2} = m\varepsilon \left(\frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{da^2}\right)}{da}\,\alpha + \frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{da^2}\right)}{db}\,\beta + \frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{da^2}\right)}{dc}\,\gamma \right)$$

$$\frac{d^2 U}{db^2} = m\varepsilon \left(\frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{db^2}\right)}{da}\,\alpha + \frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{db^2}\right)}{db}\,\beta + \frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{db^2}\right)}{dc}\,\gamma \right)$$

$$\frac{d^2 U}{dc^2} = m\varepsilon \left(\frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{dc^2}\right)}{da}\,\alpha + \frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{dc}\right)}{db}\,\beta + \frac{d\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{dc}\right)}{dc}\,\gamma \right)$$

La suma será

$$\frac{d^2 U}{da^2} + \frac{d^2 U}{db^2} + \frac{d^2 U}{dc^2} = m\varepsilon \left(\frac{d\left[\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{da^2} + \frac{d^2\,\frac{1}{r}}{db^2} + \frac{d^2\,\frac{1}{r}}{dc^2}\right]}{da} \right)\alpha$$

$$+ m\varepsilon \left(\frac{d\left[\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{da^2} + \frac{d^2\,\frac{1}{r}}{db^2} + \frac{d^2\,\frac{1}{r}}{dc^2}\right]}{db} \right)\beta$$

$$+ m\varepsilon \left(\frac{d\left[\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{da^2} + \frac{d^2\,\frac{1}{r}}{db^2} + \frac{d^2\,\frac{1}{r}}{dc^2}\right]}{dc} \right)\gamma$$

y como

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{da^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{db^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dc^2} = o,$$

resulta

$$\frac{d^2 U}{da^2} + \frac{dU}{db^2} + \frac{dU}{dc^2} = o.$$

De suerte que U, considerada como función de a, b, c, satisface á la ecuación de Laplace, y es claro que considerada como función de x, y, z, también satisface á dicha ecuación.

***

La expresión primera que hemos obtenido para la potencial U del imán elemental era ésta:

$$U = m\varepsilon \frac{\cos \theta}{r^2},$$

que nos permite discutir el valor de la potencial en todo el campo magnético.

Es una función de dos variables polares r y θ.

Es evidentemente de revolución alrededor del eje del imán.

Y las superficies equipotenciales se obtendrán suponiendo U constante, resultando para la curva meridiana la ecuación

$$\frac{\cos \theta}{r^2} = \text{constante}.$$

Desde luego se observa que si por el centro del imán (fig. 75) se traza un plano BB perpendicular al eje del imán, para todos los puntos de este plano θ es igual á 90°, su coseno es nulo, y, por lo tanto, este plano es una superficie equipotencial en que U es igual á cero.

Para todos los puntos que están á su derecha la potencial es positiva, porque en su valor $m\,\varepsilon\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$ el primer término del paréntesis es mayor que el segundo.

En cambio, para los puntos P' de la izquierda el primer término es menor que el segundo y el valor de U es negativo.

Todos estos problemas son tan elementales y tan sencillos, que no seguiremos discutiéndolos.

Terminaremos, pues, el ejemplo del *imán elemental,* y pasaremos á otro ejemplo, que es como una ampliación del precedente, y que es también de aplicación inmediata á las teorías eléctricas y magnéticas.

***

Potencial de la doble hoja eléctrica ó magnética.—Supongamos (fiig. 79) un conjunto de dos superficies AB, $A'B'$, que supondremos limitadas por un contorno finito.

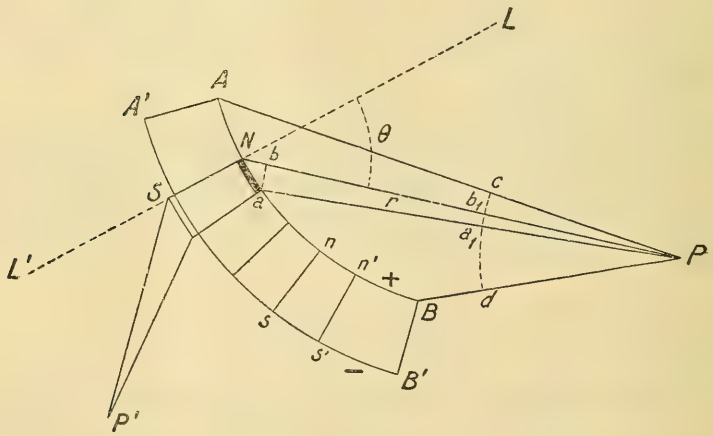


Figura 79.

Admitiremos que ambas superficies están infinitamente próximas, y que son paralelas, es decir, que las rectas SN,

$s\,n$... son normales á ambas superficies y son iguales entre si.

Suponemos además, que la superficie AB, por ejemplo, está cargada de un flúido eléctrico ó magnético de densidad constante μ, por unidad de superficie; y que la superficie ó la hoja $A'B'$ está cargada asimismo del flúido de nombre contrario, ó sea negativo en nuestro ejemplo, y con la misma densidad μ.

Es claro, según esta definicion, que el sistema de la doble hoja puede considerarse compuesto de un conjunto de imanes elementales como el que antes estudiábamos, sn, $s'n'$.... SN, y en este caso el conjunto de todos los polos, N, n, n'... formará la superficie AB, y el de todos los polos S, s, s'... formará á su vez la superficie $A'B'$.

Se trata ahora de determinar la potencial de este sistema de masas positivas y negativas en un punto cualquiera P del espacio exterior al sistema de la doble hoja, y para puntos que disten de ambas superficies longitudes muy superiores al espesor de dicha doble hoja sn, espesor que representaremos por ε.

El problema se ve que en rigor ya está resuelto; porque imaginemos la doble hoja descompuesta en imanes elementales sn, y sea uno de ellos SN.

Se puede considerar á este imán como un cilindro de sección arbitraria, pero infinitamente pequeña.

Si representamos por ω el área que dicho cilindro corta en la superficie AB, que será la misma próximamente que corte en $A'B'$, el imán quedará perfectamente definido y será igual al de la figura 75.

La cantidad de flúido de la cara norte N será evidentemente el área por la densidad, á saber $\mu\omega$, que es lo que llamábamos m en la figura 75, y la longitud del imán será el espesor de la doble capa, ó sea ε.

Y como antes decíamos, con esto queda el problema completamente resuelto, pues sabemos hallar la potencial de

cada uno de los imanes elementales que constituyen la doble hoja.

Con las mismas notaciones de la figura 75, pero representando ahora por dU la potencial de este elemento magnético, podremos escribir

$$dU = \mu\omega \cdot \varepsilon \frac{\cos\theta}{r^2}$$

y la potencial total U de la doble hoja será

$$U = \int_{AB} \mu\omega\varepsilon \frac{\cos\theta}{r^2},$$

integral á la que ponemos el subindice AB para indicar que la integral comprende todos los elementos diferenciales que se refieren á las diferentes áreas ω, en que suponemos dividida dicha superficie AB.

Sacando de la integral μ y ε, que son dos constantes, tendremos

$$U = \mu\varepsilon \int_{AB} \frac{\omega \cos\theta}{r^2}$$

pero sí desde el punto P y con un radio Pa igual á r trazamos la superficie esférica ab, que será como un plano trazado por a perpendicular próximamente á Pa y á PN, esta esfera determinará en el cono aPN un área infinitamente pequeña ab, que podrá considerarse como la proyección sobre el plano ab del área ω representada en aN, y por lo tanto

$$\text{area } ab = \text{area } aN \cdot \cos Nab$$

ó bien

$$\text{area } ab = \omega \cdot \cos\theta$$

y el valor de U se convertirá en

$$U = \mu\varepsilon \int_{AB} \frac{\text{area } ab}{r^2}.$$

Pero si trazamos desde P como centro y con un radio igual á la unidad otra esfera cd, dicha esfera cortará al cono NPa según una curva, que determinará un área esférica $a_1\ b_1$ la cual, comparándola con la $a\ b$ y llamándola para abreviar $\delta\omega_1$, dará

$$\frac{\text{area}\ ab}{r^2} = \frac{d\omega_1}{1}:$$

con esto la integral se reduce á la expresión sencillísima

$$U = \mu\varepsilon \int_{AB} d\omega_1.$$

Si por el punto P como vértice hacemos pasar un cono que tenga por directriz el contorno de la superficie AB, ó de la $A'\ B'$, porque están tan próximas, que ambos contornos cas se confunden, es claro que el conjunto de todos los elementos de AB proyectados en la superficie esférica $c\ d$ cubrirán exactamente esta superficie.

Más claro: la superficie esférica cd limitada por el cono APB será el conjunto de todos los elementos análogos á $a_1\ b_1$, ó sea á todas las áreas $\delta\omega_1$

Si al área cd, de este modo limitada por el cono APB, la representamos por Ω, el valor de la potencial de la doble hoja tomará esta forma sencillísima

$$U = \mu\varepsilon \cdot \Omega.$$

Claro es que en esta expresión Ω, que es la medida del cono que pasa por el contorno de la doble hoja, es una función de las coordenadas x, y, z de su vértice.

De aquí se deducen varias consecuencias.

En primer lugar, diversas hojas que pasen por el mismo contorno, y que tengan la misma constante $\mu\varepsilon$, tendrán en cada punto del espacio la misma potencial, si desde el punto

se ve la misma cara positiva ó negativa para todas ellas, y si el punto está suficientemente lejano.

Y á este propósito debemos recordar lo que dijimos respecto al imán elemental.

Cuando el ángulo θ de la figura 75 era menor de 90° su coseno era positivo y era positiva la potencial; pero si se trataba del punto P', que estaba más próximo al polo negativo S, que al polo positivo N, el coseno era negativo por pertenecer á un ángulo mayor de 90°.

Por eso á la cantidad Ω, ó sea al valor de la potencial, le pondremos signo positivo ó negativo según se vea desde el vértice del cono la cara positiva ó negativa de la doble hoja.

Una discusión sumamente sencilla demuestra la generalidad de la fórmula precedente, cuando la superficie es tal que podamos hacer pasar por el vértice P una recta que corte á dicha superficie en varios puntos.

Todo lo relativo á la potencial de la doble hoja se encuentra tratado ampliamente en la obra de Mr. Poincaré, ya citada, sobre la potencial newtoniana.

Cuando la superficie es cerrada (fig. 80) y el punto es exterior, la potencial es nula; porque, en efecto, si desde el punto P trazamos un cono APB tangente á la superficie, la curva de contacto AB dividirá á la superficie de la doble hoja en dos hojas dobles, á saber: ABC y ADB que se apoyarán sobre el mismo contorno AB del cono circunscripto y tendrán la misma potencial en valor númerico.

Pero, como desde P se ve la hoja positiva en ACB, y la hoja negativa en ADB, la potencial del conjunto, es decir, de la hoja cerrada, será

$$U = \mu\varepsilon\,(\Omega - \Omega) = o$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

En cambio, si el punto es interior como el P', aplicando los mismos razonamientos que en la figura 79, es claro, que

si e representa una esfera de radio 1 trazada desde P' como centro, la suma de los arcos elementales ab será toda la superficie de la esfera 4π y la potencial será

$$U = \mu\varepsilon \cdot 4\pi:$$

es decir, constante para todos los puntos interiores.

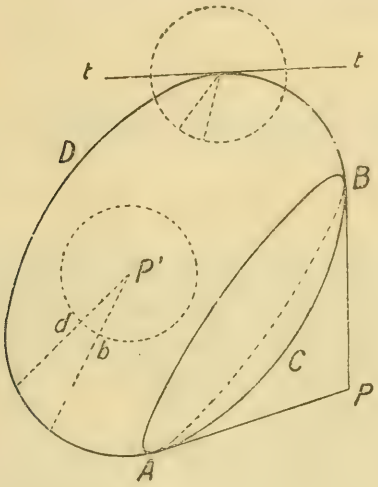


Figura 80.

La potencial en un punto de *la misma hoja doble*, ó en la superficie que la representa, suponiendo que la hoja positiva y la negativa casi se confunden, sólo tiene por valor $2\pi\mu\varepsilon$; porque la esfera e no es completa, sino que queda limitada por el plano tangente ft á media esfera, como vimos en conferencias anteriores.

Pero la discusión no es tan sencilla como pudiera creerse á no ser que se haga una hipótesis que la simplifique.

Si suponemos que las dobles hojas se aproximan tanto que en el límite llegan á confundirse, pero que á la vez va creciendo la densidad μ para compensar la disminución de ε, de tal modo que $\mu\varepsilon$ quede constante, podremos suponer que

una superficie única representa las dos hojas. Entonces la distancia de cualquier punto exterior ó interior por muy próximo que se encuentre á esta superficie única, estará en el caso general de los puntos P y P' y podremos decir: 1.° El punto P del exterior al aproximarse indefinidamente á la superficie única, que representa la doble hoja, corresponde siempre á una *potencial nula;* 2.° Al llegar á la superficie la potencial adquiere *bruscamente* el valor

$$2\pi\mu\varepsilon;$$

y 3.° al pasar al interior crece todavía *bruscamente* hasta el valor.

$$4\pi\mu\varepsilon.$$

Aún pudiéramos extendernos más en el estudio del ejemplo de la doble hoja, que tiene una gran importancia en la electricidad y en el magnetismo; pero dejamos estos desarrollos para cuando llegue el caso de estudiar especialmente tales materias.

Para terminar estas nociones nos queda un último punto que tratar, y este será el objeto de la próxima conferencia, con la cual acaso terminen las de este curso.

IX.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas.

Por José Echegaray.

Conferencia vigésimaprimera.

Señores:

Este curso académico del año 1911 al 1912, puede decirse que está terminando; y con otras dos conferencias habrá terminado del todo, si no es que termina con ésta.

Habrán terminado las conferencias de la presente serie, y no habrá terminado, ni habrá llegado á la mitad el programa que en la primera conferencia formulé.

Dijérase que el destino de todos los programas, al menos en la mayor parte de los casos, es el no cumplirse nunca por completo.

Y no es tampoco mía la culpa: el tiempo es escaso, la materia extensísima y muy ocasionada á digresiones, que á cada paso desvían de su cauce la corriente principal.

Interrumpí al empezar el curso el estudio de la teoría de los torbellinos para exponer otras teorías, ya de Matemáticas puras, ya de Física-Matemática, á que había de acudir en lo sucesivo; pero era mi propósito darles breve extensión, para volver á la interrumpida teoría de los torbellinos y terminarla, al menos en su parte elemental, en la serie de conferencias de este año académico.

Y concretando las ideas, decía en aquella ocasión á que me refiero: expondré elementalmente la teoría de la poten-

cial (ó del potencial); con este motivo diré algo de la ecuación de Laplace, indicaré los fundamentos de las ecuaciones de la Mecánica, sobre todo de las ecuaciones canónicas; y después, para terminar el curso, volveré á la teoría de los torbellinos, que tiene resonancias, si vale la palabra, y relaciones íntimas con muchos problemas de la Física Matemática clásica y moderna.

Este fué mi programa para el año académico que concluye, y en todo él no he podido hacer otra cosa que estudiar, siempre elementalmente, la teoría de la potencial y la ecuación de Laplace. Ni podré, en el tiempo que resta, rebasar este cuadro, sino en todo caso completarlo.

No es, de todas maneras, tiempo perdido el empleado en estas conferencias y digresiones, porque todo lo expuesto en este curso lo aprovecharemos al estudiar la electricidad y el magnetismo y habrá sido trabajar por adelantado en estas dos materias, desembarazando las futuras conferencias de cálculos, fórmulas y problemas, ya de Matemáticas puras, ya de Mecánica.

***

En las dos conferencias (si son dos) que nos restan continuaremos ocupándonos en la teoría de la potencial y en la ecuación de Laplace, exponiendo, bajo forma muy elemental siempre, dos teorías importantísimas, á saber:

La teoría de los *polimonios de Legendre,* y la teoría de las *funciones de Laplace* y de los *polimonios esféricos.*

Todas estas teorías, comos hemos dicho, se enlazan con la teoría de la potencial y se enlazan con la célebre y clásica ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = o,$$

en que U es una función de x, y, z que satisface á la ecua-

ción anterior; es decir, que la convierte en una identidad $o = o$.

Las potenciales newtonianas, según hemos dicho y hemos demostrado en este curso, satisfacen, en general, á la ecuación precedente; pero no son las únicas funciones que gozan de esta propiedad.

Las que de esta propiedad gozan, se llaman, en general, armónicas.

Y como decíamos en lugar oportuno, las potenciales del espacio libre son armónicas; pero no todas las armónicas son potenciales, ni todas las potenciales son armónicas.

Y á este propósito presentábamos varios ejemplos, y ahora vamos á presentar otro más.

Presentábamos la expresión $\frac{1}{r}$; los senos y los cosenos; los polimonios de primer grado y los de segundo; las exponenciales y otras varias combinaciones: y ahora agregamos, generalizando aquellas ejemplos, que un polimonio homogéneo del grado n es una armónica; es decir, es una solución de la ecuación de Laplace, con tal que tenga suficiente número de coeficientes arbítrarios.

En efecto, la forma general de un polimonio homogéneo del grado n con tres variables x, y, z, es la siguiente:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
U = A z^n + a_1 x & z^{n-1} + a_2 x^2 & z^{n-2} + a_3 x^3 & z^{n-3} \ldots + a_n x^n \\
\quad + b_1 y & \quad + b_2 y^2 & \quad + b_3 y^3 & \quad + b_n x^{n-1} y \\
 & \quad + c_2 xy & \quad + c_3 x^2 y & \quad + c_n x^{n-2} y \\
 & & \quad + d_3 xy^2 & \quad + \\
 & & & \quad \vdots \\
 & & & \quad + l_n y^n
\end{array}$$

El *primer* término tiene un coeficiente..... 1

El *segundo*..... 2

El *tercero*..... 3

Y así sucesivamente

Hasta el $(n+1)$ que tendrá..... $n+1$

De suerte que el número total de coeficientes será

$$1+2+3+\ldots\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Sustituyendo U en la ecuación de Laplace, habrá que diferenciar dos veces con relación á x, con lo cual resultará un *polinomio homogéneo* del grado $n-2$.

Otro tanto podemos decir de los otros dos coeficientes diferenciales, y tendremos la suma de tres polinomios homogéneos del grado $n-2$, que á su vez se presentan, ordenando convenientemente los términos, como un polinomio homogéneo del grado $n-2$, cuyos coeficientes serán evidentemente funciones lineales de los coeficientes a, b, c....., de la función U.

Pero si el polinomio es del grado $n-2$, el número de estos coeficientes será análogamente á la fórmula anterior

$$\frac{(n-1)\,n}{2}$$

que se obtiene con sólo poner en

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

en vez de n, $n-2$.

Si hacemos de modo que estos

$$\frac{(n-1)\,n}{2}$$

coeficientes sean nulos, el primer miembro se reducirá á

cero, y el polinomio U satísfará á la ecuación de Laplace y será una función armónica.

De igualar estos coeficientes á cero resultan

$$\frac{(n-1)\,n}{2}$$

ecuaciones lineales con

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

cantidades arbitrarias, que son evidentemente en número mayor que el de ecuaciones; y aún nos quedarán

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)\,n}{2}=\frac{4n+2}{2}=2n+1$$

coeficientes arbitrarios.

Claro es que, apurando la lógica, no basta demostrar que en un problema el número de cantidades arbitrarias es superior al número de ecuaciones, porque pudieran resultar ecuaciones incompatibles; pero ni es este el caso ni nos interesa insistir en él.

Resulta, de todas maneras, que un polinomio homogéneo en x, y, z del grado n, de coeficientes arbitrarios, satisface á la ecuación de Laplace, y es, por lo tanto, una armónica; pero no es seguramente una potencial, porque para valores infinitos de x, y, z, no se reduce á cero; es decir, que U en el caso del polinomio no se anula en el infinito.

Pero aquí se presenta un problema. ¿Ya que no en el infinito, en un dominio determinado, por ejemplo, dentro de una superficie finita y cerrada, estos polinomios ó una serie convergente de ellos no podrán representar una potencial?

Conviene apurar este problema, ó si no apurarlo, porque esto es difícil en una ó dos conferencias, iniciarlo al menos, pues de aquí van á desprenderse las dos teorías que antes

indicábamos: la de los polinomios de Legendre y la de las funciones de Laplace.

***

Sea una masa continua de materia ponderable T (fig. 81), y lo que decimos para una masa continua, podríamos repetir para varias; referida dicha masa T á tres ejes coordenados

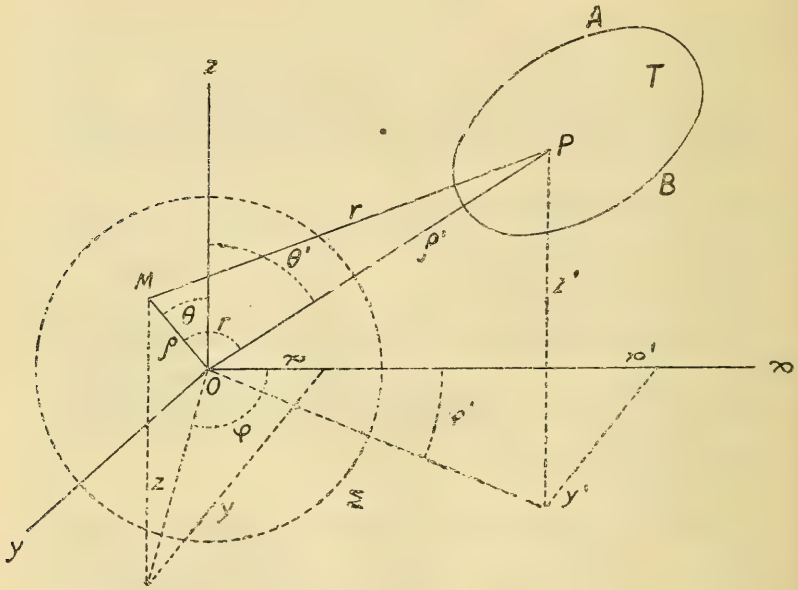


Figura 81.

trirectangulares, como siempre, Ox, Oy, Oz. Supongamos que el origen O es exterior á la masa T.

La potencial de T sobre cualquier punto M del espacio, sabemos que está expresada por la integral

$$U = \int_T \frac{\mu . d\tau}{r}$$

en la que dicha integral, que es triple, aunque para abre-

viar la escritura la representamos como sencilla, se extiende á todo el volumen AB. Lo cual significamos poniendo por subíndice á la integral la letra T.

μ representa la densidad para el punto P, y $d\tau$ un volumen infinitamente pequeño, que comprende al mismo punto P.

Por último, r es la distancia de cualquier punto P de la masa T al punto M para el cual deseamos hallar la potencial.

En rigor, el problema queda resuelto efectuando la integración.

Pero buscamos la simplificación de este problema para ciertos casos particulares.

Supongamos que desde el origen O de coordenadas, que como hemos especificado es exterior á la masa T, se puede trazar una esfera Σ, que deje fuera por completo á dicha masa T, según indica la figura.

Nos proponemos simplificar, como decimos, el problema general para los puntos interiores á la esfera Σ.

Para todos los puntos de la esfera, como para todos los puntos del espacio exterior á T, como para los puntos del interior de T, el problema está ya resuelto y está resuelto en la integral precedente; de modo que ya no se trata de un problema de Física Matemática, ó de potenciales, sino un problema de cálculo integral.

Mas en las cuestiones que vamos á discutir, prescindimos de los puntos exteriores á la esfera Σ, y vamos á ver, si no considerando más que la potencial de puntos M interiores á la esfera Σ, es posible expresar estas potenciales por una serie convergente de polimonios homogéneos en x, y, z.

Partamos de la integral anterior que determina U, á saber

$$U = \int_T \frac{\mu d\tau}{r}.$$

Representaremos por x, y, z las coordenadas rectilíneas de un punto cualquiera M del interior de la esfera Σ.

Por ρ, θ, φ las coordenadas polares del mismo punto, ó sean el vector, el ángulo polar y el azimut, según indica la figura y según hemos hecho varias veces.

Análogamente representaremos por x', y', z' las coordenadas rectilíneas de un punto cualquiera P de la masa ponderable T, y por ρ', θ', φ' las coordenadas polares del mismo punto.

Ya hemos dicho que r representa la distancia $P\,M$, ó bien la distancia, siempre del punto M interior á Σ, á cualquier punto y á todos los puntos del interior de la masa T.

Consideremos ahora el factor $\frac{1}{r}$ de la integral que da el valor de U.

Llamando γ al ángulo MOP, el triángulo MOP da

$$MP^2 = OM^2 + OP^2 - 2\,OM \cdot OP \cos MOP$$

ó bien

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\,\rho\rho' \cos\gamma$$

de donde

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\gamma}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\gamma}}.$$

Como la esfera es toda ella exterior á la masa T, y como el punto M es interior á dicha esfera, es evidente, y se ve en la línea OP, que sea cual fuere el punto P, que se elija, ρ' será mayor que el radio de la esfera Σ, y puesto que ρ es inferior á este radio, por ser M interior á la esfera, tendremos evidentemente $\rho' > \rho$, luego si en el denominador sacamos ρ' factor común, resultará

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho' \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho'^2} + 1 - 2\frac{\rho}{\rho'}\cos\gamma}}$$

en que $\frac{\rho}{\rho'}$ será una cantidad menor que la unidad; y podemos prever que esta circunstancia nos interesa para el desarrollo en serie de $\frac{1}{r}$.

Circunstancia que parece al pronto poco importante, y que, sin embargo, es decisiva para estas cuestiones; y por eso no es arbitraria la hipótesis que hemos establecido al principio, á saber: Que la esfera Σ sea toda ella exterior á T, circunscribiendo sólo al dominio de Σ la simplificación de la fórmula que da la potencial.

Porque la esfera es exterior, ρ' es mayor que ρ, y $\frac{\rho}{\rho'}$ es menor que la unidad, y por esta razón podremos establecer la convergencia de ciertas series que vamos á obtener

Nos proponemos por ahora resolver este problema de análisis: desarrollar en serie ordenada por las potencias de $\frac{\rho}{\rho'}$ la expresión precedente:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\rho}{\rho'}\cos\gamma + \frac{\rho^2}{\rho'^2}}}$$

que representando, para abreviar, $\frac{\rho}{\rho'}$ por ρ_1 escribiremos de este modo:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_1\cos\gamma + \rho_1^2}};$$

Y es claro, que si resolvemos este problema, es porque pensamos sustituir la serie que resulte, que será el valor de $\frac{1}{r}$, multiplicada por $\frac{1}{\rho'}$ en la integral de U. Con lo cual,

bajo el signo integral, tendremos los términos de dicha serie multiplicados por μdr.

Por ahora, limitémonos al problema de análisis indicado. Desarrollar en serie ordenada por las potencias de ρ_1, la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2}}.$$

De varios modos se puede resolver, y se resuelve, este problema en los tratados de cálculo.

Lo más sencillo y lo más natural sería aplicar la fórmula generalizada del binomio de Newton á la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2}} = (1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Desarrollar después cada término de este primer desarrollo y ordenar por las potencias de ρ_1, con lo cual tendríamos una serie de términos con la serie de potencias enteras de ρ_1 y por coeficientes polinomios de $\cos\gamma$.

Es decir, que desarrollando la potencia $-\frac{1}{2}$ del trinomio, tendríamos

$$(1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2) +$$
$$+ \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2}(-2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1)^2 \ldots\ldots + \ldots.$$

Los paréntesis pueden desarrollarse también por la fórmula del binomio, y ordenando después por las potencias de ρ_1 tendremos una serie ordenada, como decíamos, por las potencias de dicha variable; serie que podrá ponerse evidentemente bajo esta forma:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_2^2}} = \Sigma P_n \rho_1^n$$

P_n se ve evidentemente que será un polinomio en cos γ; el número n será un número entero, que variará de o á ∞, y el signo Σ representa la suma de todos los términos de esta serie.

Esta es una primera solución, explicada en globo, por decirlo así, del problema, pero solución que es indispensable precisar.

Es indispensable, en primer término, fijar la forma general de los polinomios P, y es indispensable ver si la serie es convergente y en qué condiciones lo es, porque en el cálculo, y hablando en términos generales, sólo son útiles las series convergentes; es decir, las que tienden en cada caso á valores finitos y determinados.

Pueden completar mis alumnos este punto en muchos tratados de cálculo diferencial é integral, porque es un problemaclásico el de la determinación de los polinomios P; pero nosotros escogeremos, por elegante y sencillo, el método de M. Poincaré, que se funda en el empleo de las imaginarias, y que da á la vez la forma general de P y la demostración de la convergencia.

Hemos visto ya en otras conferencias, que la fórmula

$$e^{\gamma\sqrt{-1}} = \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\sqrt{-1}$$

puede considerarse como la definición de la exponencial imaginaria. Exceptuando las funciones algebraicas, y pasando á las funciones transcendentes, una transcendente en que la variable es imaginaria no tiene por sí significación alguna. ¿Qué puede significar, en efecto, *à priori*, $e^{\gamma\sqrt{-1}}$ que no representa ninguna operación aritmética bien definida? Pero si se desarrolla la exponencial en serie ordinaria, como los términos son potencias de la variable y las potencias son funciones algebraicas, para las que la imaginaria tiene significación, este desarrollo en serie puede ser la definición de la exponencial imaginaria.

Más claro: se sabe que

$$e^{\gamma} = 1 + \gamma + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\gamma^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots,$$

pues bien; poniendo en vez de γ el valor $\gamma\sqrt{-1}$ en la expresión anterior, resulta

$$e^{\gamma\sqrt{-1}} = 1 + \gamma\sqrt{-1} +$$
$$+ \frac{(\gamma\sqrt{-1})^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\gamma\sqrt{-1})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(\gamma\sqrt{-1})^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots$$

y podrá servir de definición el segundo miembro para el primero; porque sabemos efectuar todas las operaciones que el segundo miembro indica, y, por lo tanto, podremos suponer que esta serie de operaciones son precisamente las que en forma abreviada representa el primer miembro como símbolo.

Esto á la vez demuestra la fórmula que antes hemos indicado, porque tendremos

$$e^{\gamma\sqrt{-1}} = 1 + \gamma\sqrt{-1} - \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2} - \frac{\gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\sqrt{-1} +$$
$$+ \frac{\gamma^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots\ldots$$

y como puede demostrarse, que la serie es absolutamente convergente, será lícito agrupar los términos según nos convenga, y tendremos

$$e^{\gamma\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2} + \frac{\gamma^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots\ldots +$$
$$+ \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots\right)\sqrt{-1}.$$

Mas la primera parte es el desarrollo del coseno y la segunda el desarrollo del seno y hallaremos, por fin,

$$e^{\gamma\sqrt{-1}} = \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\sqrt{-1};$$

con lo cual queda demostrada esta fórmula fundamental del análisis y queda explicado su sentido simbólico, que permite calcular con las exponenciales imaginarias como se calcula con las exponenciales reales, y que, además, pone en relación las exponenciales con las líneas trigonométricas.

Las imaginarias y el concepto del infinito funden, por decirlo de este modo, en una unidad superior, funciones transcendentes e irreducibles, cuando sólo se consideran cantidades reales.

Pero volvamos á nuestro objeto.

***

Descompongamos en dos factores lineales el trinomio

$$1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2$$

para lo cual lo igualaremos á cero y hallaremos las dos raíces.

Así, haciendo

$$1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2 = o,$$

deduciremos

$$\rho_1 = \cos\gamma \mp \sqrt{\cos^2\gamma - 1} = \cos\gamma \pm \operatorname{sen}\gamma\sqrt{-1}.$$

Y puesto que las dos raíces son

$$\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\sqrt{-1}, \quad \cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma\sqrt{-1}$$

que por la fórmula que antes dimos pueden escribirse de este modo:

$$e^{\gamma\sqrt{-1}}, \quad e^{-\gamma\sqrt{-1}}$$

el trinomio podrá descomponerse en dos factores de primer grado; y resultará

$$1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2 = \left(\rho_1 - e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)\left(\rho_1 - e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right),$$

que, cambiando signos á los dos factores, también puede escribirse así:

$$\left(-\rho_1 + e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)\left(-\rho_1 + e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right),$$

y sacando las dos exponenciales fuera

$$\left(-\rho_1 e^{-\gamma\sqrt{-1}} + 1\right)\left(-\rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}} + 1\right) e^{-\gamma\sqrt{-1}}\, e^{+\gamma\sqrt{-1}}.$$

El producto de ambas exponenciales es

$$e^{-\gamma\sqrt{-1}+\gamma\sqrt{-1}} = e^0 = 1$$

y hallaremos, en último resultado,

$$\left(1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2\right) = \left(1 - \rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \rho_1 e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)$$

De suerte que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2}} = (1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2)^{-\frac{1}{2}}$$

podrá escribirse de esta manera:

$$\frac{1}{r} = \left(1 - \rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \rho_1 e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Parecerá extraño á primera vista que el valor $\frac{1}{r}$, que es *esencialmente real*, se presente bajo forma imaginaria; pero toda duda desaparece observando que la forma imaginaria del segundo miembro es aparente. Efectuando las operacio-

nes indicadas, $\sqrt{-1}$ desaparecerá, y el segundo miembro resulta idénticamente igual al primero.

La forma imaginaria es un artificio de cálculo, un artificio simbólico, pudiéramos decir, para llegar rápidamente al resultado final.

No tenemos más que desarrollar las dos potencias $-\frac{1}{2}$, de dos binomios, que son más fáciles de desarrollar que el trinomio primitivo

$$(1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2)^{-\frac{1}{2}},$$

precisamente porque son binomios, y resultan monomios los términos del desarrollo.

Este es, el objeto del artificio de cálculo que estamos empleando. Antes vimos, en efecto, que aplicando la fórmula del binomio á $1 - 2\rho_1 \cos r + \rho_1^2$ los términos de dicho desarrollo eran á su vez potencias de $(-2\rho_1 \cos r + \rho_1^2)$ lo cual complicaba los desarrollos.

En cambio apliquemos la fórmula del binomio á los dos factores en que hemos descompuesto $\frac{1}{r}$, y tendremos

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1 - \rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\ldots + \\
&\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n}\rho_1^{\,n} e^{n\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\ldots \\
&\left(1 - \rho_1 e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\rho_1 e^{-\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\ldots, + \\
&\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n}\rho_1^{\,n} e^{-n\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} [1]$$

lo cual es evidente respecto al coeficiente del término general, porque los coeficientes del binomio para la exponen-

te $-\frac{1}{2}$ resultan del desarrollo completo, por ejemplo, de

$$\left(1-\rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

que es,

$$1+\left(-\frac{1}{2}\right)1^{-\frac{1}{2}-1}\times-\rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}}+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)1^{-\frac{1}{2}-2}}{1\cdot 2}\times\rho_1^2 e^{2\gamma\sqrt{-1}}+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\times-\rho_1^3 e^{3\gamma\sqrt{-1}}\ldots\ldots$$

ó bien

$$1+\frac{1}{2}\rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}\rho_1^2 e^{2\gamma\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\rho^3 e^{3\gamma\sqrt{-1}}+\ldots\ldots$$

que puede escribirse á su vez

$$1+\frac{1}{2}\rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\rho_1^2 e^{2\gamma\sqrt{-1}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\rho^3 e^{3\gamma\sqrt{-1}}+\ldots$$

y en que aparece clara y evidente la ley de los coeficientes de las fórmulas [1].

Estas series se ve, desde luego, que para el caso que hemos de considerar, en que ρ_1 es menor que la unidad, son convergentes, y además, absolutamente convergentes, porque lo es la serie de los módulos.

En efecto; en un término cualquiera, por ejemplo, en la 1.ª serie, y lo mismo diríamos de la 2.ª,

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} \rho_1^{\,n} c^{n\gamma\sqrt{-1}}$$

puede escribirse así:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} \rho_1^{\,n} \left(\cos n\gamma + \operatorname{sen} n\gamma \sqrt{-1}\right)$$

y como el módulo de $\cos n\gamma + \operatorname{sen} n\gamma \sqrt{-1}$, es

$$\sqrt{\cos^2 n\gamma + \operatorname{sen}^2 n\gamma} = 1$$

el módulo del término será

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} \rho_1^{\,n}$$

y la serie de los módulos será á su vez

$$1 + \frac{1}{2} \rho_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \rho_1^{\,2} + \ldots\ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} \rho_1^{\,n} + \ldots\ldots$$

Que esta serie es convergente, se demuestra desde luego aplicando la regla más elemental de convergencia, es decir, tomando la relación de dos términos consecutivos, y viendo que esta relación tiende hacia una cantidad menor que la unidad para $n = \infty$.

Dos términos consecutivos serán éstos:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} \rho_1^{\,n}, \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2(n+1)} \rho_1^{\,n+1}$$

y la relación del segundo al primero, suprimiendo factores comunes, será ésta

$$\frac{2n+1}{2(n+1)}\rho_1 = \frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\rho_1$$

que haciendo $n = \infty$ se reduce á ρ_1, cantidad por hipótesis menor que la unidad.

Queda, pues, demostrado que las dos series [1] son absolutamente convergentes; y como el producto de los primeros miembros es

$$(1 - 2\rho_1 \cos r + \rho_1^2)^{-\frac{1}{2}}$$

el producto de los segundos miembros será precisamente el desarrollo de esta expresión, según las potencias de ρ_1.

Representando en las fórmulas [1], para abreviar, por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_p, \alpha_q \ldots\ldots$ los coeficientes, podremos escribir:

$$(1 - 2\rho_1 \cos r + \rho_1^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$(1 + \alpha_1 \rho_1 e^{\gamma\sqrt{-1}} + \alpha_2 \rho_1^2 e^{2\gamma\sqrt{-1}} + \alpha_3 \rho_1^3 e^{3\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\ldots + \alpha_p \rho_1^p e^{p\gamma\sqrt{-1}} \ldots\ldots)$$

$$\times(1 + \alpha_1 \rho_1 e^{-\gamma\sqrt{-1}} + \alpha_2 \rho_2^2 e^{-2\gamma\sqrt{-1}} + \alpha_3 \rho_1^3 e^{-3\gamma\sqrt{-1}} + \ldots + \alpha_q \rho_1^q e^{-q\gamma\sqrt{-1}} \ldots)$$

Y no queda más que efectuar el producto de las dos series y ordenar, según las potencias de ρ_1; solución sencilla y elegante, y en que á la vez que se determinan los coeficientes P_n de los diversos términos, se demuestra la convergencia de todas las series que se emplean.

Veamos ahora cuál es la forma del coeficiente en el término general $P_n \rho^n$.

Obtendremos este coeficiente viendo cuáles son los términos de ambas series en que el exponente $p + q$ de ρ_1, sea igual á n; es decir, en que se tenga

$$\alpha_p \alpha_q \rho_1{}^{p+q} e^{p\gamma\sqrt{-1} - q\gamma\sqrt{-1}} = \alpha_p \alpha_q \rho_1{}^{p+q} e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}}$$

siendo $p + q = n$.

Pero es evidente que muchos productos de esta clase cumplirán con esta condición, por ejemplo, si se tiene

$$p = o, \quad p = 1, \quad p = 2 \ldots..$$
$$q = n, \quad q = n - 1, \quad q = n - 2 \ldots..$$

de suerte que el término general que hemos escrito, comprenderá todos los que se deducen del cuadro anterior, y así el coeficiente de $\rho^{p+q} = \rho^n$, es decir, P_n, será

$$\Sigma\, \alpha_p \alpha_q e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}} = P_n$$

en que Σ comprende todos los términos que resultan de dar á p y á q valores cuya suma sea n.

Y basta para obtener la serie dar á n todos los valores desde 1 á ∞.

El primer término de la serie es claro que se reduce á 1.

Tendremos, pues,

$$(1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1{}^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 + \rho_1 \Sigma\, \alpha_p \alpha_q e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}} + \rho_1{}^2 \Sigma\, \alpha_p \alpha_q e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}} + \ldots..$$

Al alumno que por primera vez estudie estas materias, acaso pueda ocurrirle esta duda, que es repetición de la que antes indicamos. El primer miembro es una cantidad real, y sin embargo, en el segundo miembro, los coeficientes son imaginarios.

Pero esta forma imaginaria es aparente, repetimos ahora, y todos los coeficientes son reales.

En efecto, consideremos el coeficiente general

$$\Sigma\, \alpha_p \alpha_q e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}}.$$

Si bajo el signo Σ hay un término de la forma

$$\alpha_p \alpha_q e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}}$$

habrá otro de una forma análoga, pero en que los índices p y q estén cambiados

$$\alpha_q \alpha_p e^{\gamma(q-p)\sqrt{-1}} = \alpha_q \alpha_p e^{-\gamma(p-q)\sqrt{-1}}$$

lo cual es clarísimo, porque se puede tomar en la multiplicación el término de índice p en una serie, y el de índice q en la otra; mas también será preciso tomarlos á la inversa, porque se han de multiplicar todos los términos de una serie por todos los términos de otra.

Pero los dos elementos de Σ que hemos indicado, pueden expresarse de este modo:

$$\alpha_p \alpha_q e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}} + \alpha_q \alpha_p e^{-\gamma(p-q)\sqrt{-1}}$$

ó bien

$$\alpha_p \alpha_q \left[e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}} + e^{-\gamma(p-q)\sqrt{-1}}\right] =$$

$$\alpha_p \alpha_q \left[\cos\gamma(p-q) + \operatorname{sen}\gamma(p-q)\sqrt{-1} + \cos\gamma(p-q) - \operatorname{sen}\gamma(p-q)\sqrt{-1}\right]$$

que se reduce á la expresión real

$$2\,\alpha_p \alpha_q \cos\gamma(p-q).$$

Luego todos los coeficientes del desarrollo

$$(1 - 2\rho_1 \cos r + \rho_1^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1 \rho_1 + P_2 \rho^2 + P_3 \rho_2^3 + \ldots\ldots + P_n \rho_2^n + \ldots$$

serán coeficientes reales á pesar de la forma imaginaria que presentan.

Podemos comprobar que la serie obtenida es convergente en el caso de que ρ_1 sea menor que la unidad; pero no tene-

mos tiempo para ello, y por lo demás, la demostración, que es sencillísima, pueden verla mis alumnos en la obra de Mr. Poincaré sobre la potencial newtoniana.

Los polinomios P se conocen con el nombre de polinomios de Legendre.

*
* *

Los polinomios de Legendre, se deducen de la fórmula que hemos obtenido

$$P_n = \Sigma \alpha_p \alpha_q e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}}$$

que son polinomios enteros en cos γ, y en que el grado de cada polinomio es igual al subíndice; es decir, que el grado de P_n es precisamente n.

En efecto, repitiendo el cálculo que antes hacíamos para demostrar que, aunque aparentemente, la forma de estos polinomios es imaginaria, son polinomios reales; tendremos:

$$P_n = \Sigma \alpha_p \alpha_q \left(e^{\gamma(p-q)\sqrt{-1}} + e^{-\gamma(p-q)\sqrt{-1}}\right) = \Sigma \alpha_p \alpha_q \cdot 2 \cos \gamma (p-q)$$

en que la combinación p, q sólo se toma una vez. Si se tomasen las dos combinaciones p, q y q, p había que volver á la fórmula primitiva.

Vemos, de todas maneras, que P_n es un polinomio en que cada término se compone de un coeficiente numérico $2\alpha_p \alpha_q$ y del coseno de un arco múltiple de γ, á saber cos $(p-q)\gamma$.

Pero se sabe por trigonometría que los cosenos de los arcos múltiples están representados por polinomios cuyos términos son potencias del arco sencillo de modo que cos $(p-q)\gamma$ se expresará por potencias de cos γ.

Por si mis alumnos han olvidado esta demostración, bueno será indicarla de paso.

*
* *

Precisamente la fórmula que antes recordábamos como expresando la relación entre exponenciales y líneas trigonométricas, es la que puede resolver el problema.

Hemos demostrado, ó mejor dicho, hemos *definido* la expresión

$$e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}.$$

Elevemos á la potencia m ambos términos, y tendremos

$$e^{ma\sqrt{-1}} = \left(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}\right)^m.$$

El primer miembro puede transformarse en cosenos móltiples por la misma fórmula

$$e^{ma\sqrt{-1}} = \left(\cos ma + \operatorname{sen} ma \sqrt{-1}\right)$$

y el segundo miembro puede desarrollarse por el binomio de Newton, y tendremos, por lo tanto

$$\cos ma + \operatorname{sen} ma \sqrt{-1} =$$

$$= \cos^m a + m \cos^{m-1} a \operatorname{sen} a \sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} a \operatorname{sen}^2 a -$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} a \operatorname{sen}^3 a \sqrt{-1} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot \text{s} \cdot 4} \cos^{m-4} a \operatorname{sen}^4 a + \ldots\ldots$$

ecuación de la cual se deducen otras dos, igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos miembros.

No consideremos más que las partes reales, porque son las únicas que nos interesan, y tendremos el valor del coseno del arco múltiplo en función del seno y del coseno del arco sencillo.

Así

$$\cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} a \operatorname{sen}^2 a +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{m-4} a \operatorname{sen}^4 a + \ldots\ldots$$

ó expresando el seno en función del coseno,

$$\cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} a (1 - \cos^2 a) +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{m-4} a (1 - \cos a)^4 + \ldots\ldots;$$

donde se ve que el coseno del múltiplo m de un arco a es un polinomio que puede ordenarse por la serie de cosenos del arco sencillo

$$\cos^m a, \ \cos^{m-2} a, \ \cos^{m-4} a, \ \cos^{m-6} a \ldots\ldots$$

Apliquemos este resultado á cada uno de los términos de P_n.

***

Cada término de P_n es de la forma

$$\cos (p - q) \gamma,$$

es decir, un múltiplo de γ; luego se podrá expresar en potencias de cos γ, que serán precisamente

$$\cos^{p-q} \gamma, \ \cos^{p-q-2} \gamma, \ \cos^{p-q-4} \gamma \ldots\ldots$$

Y queda demostrado, que cada coeficiente P_n es un polinomio cuyos términos pueden ordenarse por las potencias de cos γ, pues todos los términos comprendidos en Σ

son cosenos múltiplos de γ, que pueden desarrollarse en potencias de la línea trigonométrica cos γ.

Además, el grado del polinomio en cos γ es el subíndice n.

Esto es evidente, porque en cos $(p - q)\gamma$, el mayor valor de $p - q$ dará el mayor exponente para cos γ.

Pero hemos dicho que en cada término de Σ los valores p, q deben satisfacer á la ecuación $p + q = n$, siendo n el subíndice de P, que es precisamente el exponente de ρ_1.

Luego $p - q$ se convertirá, sustituyendo en vez de p su valor $p = n - q$, en

$$n - q - q = n - 2q.$$

El mayor valor de esta expresión corresponde al menor valor de q, que es cero, y en este caso tendremos

$$n - 2q = n \quad \text{y} \quad \cos(p - q)\gamma = \cos n\gamma.$$

A este múltiplo n corresponderá un polinomio en que el término de mayor exponente será cos $^n\gamma$.

Con lo cual resulta comprobado lo que acabamos de decir.

Otra propiedad importante de los *polinomios de Legendre* debemos indicar.

Hemos visto que el coseno de cada término de Σ

$$\text{es decir } \cos(p - q)\gamma,$$

se desarrolla en un polinomio con las potencias de cos γ, que son

$$p - q,\ p - q - 2,\ p - q - 4, \ldots..;$$

si introducimos, en vez de p, su valor anterior, tendremos que los exponentes de cos γ para cualquier término serán

$$n - 2q,\ n - 2q - 2,\ n - 2q - 4,\ n - 2q - 6, \ldots..$$

Y ahora, una de dos: ó el subíndice n es par, ó es impar.

Si n es par, todos los coeficientes de todos los términos en Σ serán potencias pares de cos. γ.

Si n es impar, es evidente que serán *impares* todos los números de la serie anterior; luego todos los términos de P_n serán impares también.

De aquí se deduce esta consecuencia: los coeficientes P_n de Legendre son alternativamente pares é impares: para todos los valores pares de n, P_n serán polinomios de potencias pares de cos γ; para todos los subíndices n que sean impares todas las potencias de cos γ en P_n serán impares también.

Esta propiedad la demuestra Mr. Poincaré por maner sencillísima.

Hemos obtenido el siguiente desarrollo:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2}} = P_0 + P_1\rho_1 + P_2\rho_1^2 + \ldots\ldots + P_n\rho_1^n + \ldots\ldots$$

que es, *en el fondo,* una identidad: por lo tanto, para todos los valores de γ y ρ_1 el segundo miembro resulta igual al primero en valor numérico.

Pues sustituyamos los siguientes valores particulares. Cambiemos γ por $\pi - \gamma$ y ρ_1 por $-\rho_1$.

Estos cambios ó sustituciones debemos hacerlos en los dos miembros, con lo cual la identidad subsistirá.

El primer miembro se convierte en

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\rho_1 \cos(\pi - \gamma)\rho_1 + \rho_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2}}$$

es decir, que el primer miembro no cambia. Luego el desarrollo del segundo miembro no debe cambiar, ó sea, que cada término debe quedar invariable, porque como todos los términos tienen distintas potencias de ρ_1, no pueden cambiarse unos en otros.

Consideremos el término general

$$P_n \rho_1^n$$

Si n es par, la potencia da ρ_1 no cambiará porque se sustuya á ρ_1 el valor $-\rho_1$; luego P_n no debe cambiar tampoco para que todo el término permanezca invariable.

Ahora bien; P_n es un polinomio que contiene diversas potencias de cos γ. Pero sustituyendo en vez de γ el valor $\pi - \gamma$, una cualquiera de estas potencias $(\cos \gamma)^q$ se convertirá en

$$[\cos(\pi - \gamma)]^q = (-\cos \gamma)^q.$$

Luego para que no varíe será preciso que todos los exponentes q sean pares, que es lo que nos proponíamos demostrar y queda demostrado el teorema para este caso.

Si n es impar ρ_1^n se convertirá, por el cambio de ρ_1 por $-\rho_1$, en $-\rho_1^n$; luego para que el término no varíe será preciso que todos los términos del polinomio tengan el signo —; y como hemos visto que cos γ se convierte en — cos γ, todas las potencias deberán ser negativas y los exponentes q deberán ser impares, como n.

***

Otra propiedad casi evidente de los polinomios P_n.

cos γ es el coseno del ángulo que forman las rectas OP, OM.

Como las coordeeadas del punto P las hemos designado por y', x', z' y la distancia OP por ρ', los cosenos de los ángulos que forma esta recta OP con los ejes coordenados serán:

$$\frac{x'}{\rho'}, \quad \frac{y'}{\rho'}, \quad \frac{z'}{\rho'},$$

Y análogamente los cosenos de la recta $O\,M$ con los mismos ejes tendrán por valores

$$\frac{x}{\rho}\,,\ \frac{y}{\rho}\,,\ \frac{z}{\rho}\,,$$

luego el coseno de $P\,O\,M$, es decir $\cos\gamma$, será

$$\cos\gamma = \frac{xx'}{\rho\rho'} + \frac{yy'}{\rho\rho'} + \frac{zz'}{\rho\rho'} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho\rho'}$$

ó bien

$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho'\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Si el subíndice de P_n es par, no tendrá el polinomio en $\cos\gamma$ más que potencias pares de este coseno, es decir,

$$\cos\gamma^{2q} = \frac{(xx' + yy' + zz')^{2q}}{\rho'^{2q}\,(x^2 + y^2 + z^2)^q} = \frac{1}{\rho'^{2q}}\left[\frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right]^q$$

de modo que será un polinomio con potencias enteras de

$$\frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pero P_n está multiplicado por

$$\rho_1{}^n = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n,$$

recordando que hicimos

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\rho'}.$$

De aquí se deduce que en

$$\rho_1{}^n P_n = \frac{\rho^n}{\rho'^n} P_n$$

habrá que multiplicar todos los términos de P_n por

$$\rho^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$$

que, como n es par, será una potencia entera $x^2 + y^2 + z^2$.

Además, esta potencia será siempre superior, á lo menos igual á q, que, cuando más, es $\frac{n}{2}$; luego desaparecerá el denominador y quedarán en el numerador potencias enteras de $xx' + yy' + zz'$ y de $x^2 + y^2 + z^1$. Es decir, que los términos del desarrollo, cuando n es par, son polinomios enteros en x, y, z.

Además, son homogéneos y del grado n.

Porque, en efecto, en el término que estamos considerando, hemos visto que hay estos dos factores, que son los únicos que contienen x, y, z, á saber:

$$(xx' + yy' + zz')^{2q} \times \frac{(x^2 + y^2 + z)^{\frac{n}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^q}$$

ó bien

$$(xx' + yy' + zz')^{2q} \times (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{}{2} - q}.$$

El grado en x, y, z del primer factor es $2q$, y el grado del segundo factor, observando que en el paréntesis la x, la y, la z, están elevados al cuadrado, será

$$2\left(\frac{n}{2} - q\right) = n - 2q$$

luego el grado del término será á su vez

$$2q + n - 2q = n.$$

Por lo demás, es claro que como n es par, los dos exponentes de los dos factores son enteros, los desarrollos son homogéneos y el producto lo es también.

La demostración para el caso en que n es impar es enteramente análoga, porque si bien es cierto que eligiendo un término cualquiera del polinomio P_n, la potencia de $\cos\gamma$ será impar; de modo que tendremos

$$\cos^{2q+1}\gamma = \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{\rho'\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^{2q+1} =$$

$$= \frac{1}{\rho'^{2q+1}} \frac{(xx' + yy' + zz')^{2q+1}}{(x^2+y^2+z^2)^q \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

y quedará un radical en el denominador; también es cierto que el polinomio P_n esta multiplicado por

$$\rho_1{}^n = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n = \frac{1}{\rho'^n}\rho^n = \frac{1}{\rho'^n}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

ó sea

$$\frac{1}{\rho'^n}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n.$$

Y como n es impar, siempre quedará un radical que hará desaparecer el del denominador.

En suma, tendremos, no considerando más que los factores, con x, y, z,

$$\frac{(xx' + yy' + zz')^{2q+1}}{(x^2+y^2+z^2)^q \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n$$

y haciendo, puesto que n es impar, $n = 2m + 1$,

$$\frac{(xx' + yy' + zz')^{2q+1}}{(x^2+y^2+z^2)^q \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{2m+1}$$

ó bien

$$\frac{(xx' + yy' + zz')^{2q+1}}{(x^2+y^2+z^2)^q \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{2m} =$$

$$= (xx' + yy' + zz')^{2q+1}(x^2+y^2+z^2)^{m-q}$$

donde vemos que, en efecto, todos los términos de P_n son polinomios en x, y, z.

Además, el grado de estos términos será

$$(2q+1)+2(m-q)=2m+1=n$$

luego son todos los términos del grado n, lo cual indica que P_n se reduce á un polinomio homogéneo del mismo grado del subíndice.

***

Resumiendo todo lo dicho, resulta que, se tiene

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\rho'^2-2\rho\rho'+\cos\gamma\,\rho^2}}=\frac{1}{\rho'}\left(1-2\frac{\rho}{\rho'}\cos\gamma+\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\rho'}\left[1+\frac{\rho}{\rho'}P_1+\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2P_2+\ldots\ldots+\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^nP_n+\ldots\ldots\right]$$

y por fin

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho'}+\frac{\rho P_1}{\rho'^2}+\frac{\rho^2P_2}{\rho'^3}+\ldots\ldots+\frac{\rho^nP_n}{\rho'^{n+1}}+\ldots\ldots$$

en que cualquier término $\rho^n P_n$ es un polinomio homogéneo del grado n en x, y, z.

La potencial del cuerpo AB, para un punto cualquiera M, comprendido en una esfera trazada desde O como centro, y toda exterior al cuerpo AB tiene, como sabemos, la forma

$$U=\int_T\frac{\mu\,d\tau}{r}$$

y sustituyendo en vez de $\frac{1}{r}$ el desarrollo que hemos obtenido, resultará

$$U=\int_T\frac{\mu\,d\tau}{r}=\int_V\mu\,d\tau\left[\frac{1}{\rho'}+\frac{\rho P_1}{\rho'^2}+\frac{\rho^2P_2}{\rho'^3}+\ldots\ldots+\frac{\rho^nP_n}{\rho'^{n+1}}+\ldots\ldots\right]$$

que se descompone en las siguientes integrales:

$$U = \int_T \frac{\mu d\tau}{\rho'} + \int_T \frac{\mu d\tau \rho P}{\rho'^2} + \int_T \frac{\mu d\tau \rho^2 P_2}{\rho'^3} + \ldots\ldots + \frac{\mu d\tau \rho^n P_n}{\rho'^{n+1}} + \ldots\ldots$$

Fijémonos en el término general.

μ que es la densidad, es una función conocida de x', y', z' para cada punto del cuerpo $A\ B$.

ρ'^{n+1} es una función también de x', y', z', porque si tiene

$$\rho' = OP = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

y por último, $\rho^n P_n$ acabamos de ver que es un polinomio homogéneo en x, y, z; luego dentro de la integral tendremos una serie de términos en que entrarán los productos de potencia de x, y, z con el grado n en conjunto y coeficientes determinados que resultarán de los desarrollos que se indican.

Es decir, que tendremos

$$\int_T \frac{\mu d\tau}{\rho'^{n+1}} \left[\ldots\ldots + N x^p y^q z^s \ldots\ldots \right] = \left[\ldots\ldots + x^p y^q z^s \int \frac{\mu d\tau}{\rho'^{n+1}} \cdot N + \ldots\ldots \right]$$

de suerte que dicho término será también un polinomio del grado $p + q + s = n$.

Y como lo mismo puede decirse de todos los demás términos, representando en general por X_n la integral

$$\int_V \frac{\mu d\tau}{\rho'^{n+1}} \rho^n P_n,$$

tendremos

$$U = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n + \ldots\ldots$$

en que las X son polinomios homogéneos de x, y, z del grado n igual al subíndice.

Estas funciones se llaman polinomios esféricos y son funciones de Laplace, es decir, que satisfacen á la ecuación de

Laplace; lo cual se demuestra de una manera inmediata, porque sabemos que $\frac{1}{r}$ satisface á la ecuación $\Delta \frac{1}{r} = o$; luego también satisfará á esta ecuación el desarrollo

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho^1} + \frac{\rho P_1}{\rho'^2} + \frac{\rho^2 P_2}{\rho'^3} + \ldots\ldots$$

y como podemos disponer de ρ', ó mejor dicho, de la relación $\frac{\rho}{\rho'}$ para hacer tan pequeños como se quieran todos los términos de la serie á partir de 1, es claro que cada término de la serie, en particular, debe satisfacer á la ecuación de Laplace, y lo mismo podríamos decir de la serie en X.

Nos basta con esta indicación general y nos falta tiempo para entrar en mayores desarrollos.

Sólo diremos, para terminar la conferencia y terminar el curso, que puede demostrarse fácilmente, diferenciando el radical

$$\sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2}$$

con relación á ρ_1, multiplicando ambos miembros por

$$1 - 2\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2$$

é identificando los dos desarrollos, según las potencias de ρ_1 que cada tres funciones X satisfacen á una ecuación lineal.

Esta es la primera indicación.

Es la segunda que si en los polinomios en x, y, z se sustituyen por estas variables sus valores en coordenadas polares

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

en todos los términos de cada polinomio podrá sacarse r^n factor común y resultarán polinomios homogéneos en

$$\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \quad y \quad \cos\theta.$$

Si suponemos r constante, es decir, si suponemos los puntos de una esfera de radio r, tendremos un desarrollo de la potencial U para los puntos de la esfera de radio r en función de las variables θ y φ.

Estas son las que se llaman propiamente funciones esféricas de Laplace, que tienen verdadera importancia en muchas cuestiones de la Física Matemática.

Sentimos muy de veras no poder explanar estas últimas indicaciones: quizás cuando estudiemos la electroestática clásica, encontraremos para ello ocasión oportuna.

Para concluir definitivamente este punto llamaré la atención de mis alumnos con todo empeño sobre esta circunstancia: Que la teoría de la potencial bajo la última forma indicada, no se refiere á todo el espacio que rodea al cuerpo AB, sino á esferas trazadas desde puntos exteriores al cuerpo que se considera. Se trata, pues, de regiones determinadas á la manera que en los métodos de integración de Cauchy se obtienen funciones holomorfas alrededor del punto que se escoge.

Es, si se nos permite la palabra, esta teoría que hemos expuesto, la de *formas locales de la potencial.*

Quizás esto parezca obscuro y no muy riguroso; ya lo explicaremos en otra ocasión.

X. — Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general.

Por Antonio Torroja Miret.

(Continuación.)

La curvatura de una sección normal σ de la superficie S vendrá dada por la de la sección σ' que su plano s produce en la cuádrica osculatriz S', la cual á su vez está determinada por los puntos A y B con sus tangentes correspondientes y los C y D de intersección de su plano s con la indicatriz I. Siendo hipérbola la indicatriz, estos dos puntos serán reales ó imaginarios, según que el plano secante s esté contenido en uno ú otro de los dos ángulos formados por los dos planos asintóticos de la cuádrica αAB y $\alpha' AB$ y, por consiguiente, la sección σ' será en el primer caso elipse y en el segundo hipérbola; lo cual quiere decir que la curvatura de las secciones normales en este punto está en uno ú otro sentido, se-

una superficie cilíndrica σ de generatrices paralelas á la dirección s y circunscrita á la superficíe S, vendrá dada por la del cilindro σ' de generatrices paralelas á esta dirección y circunscrito á la cuádrica osculatriz S', el cual á su vez está determinado por los dos planos tangentes a y b con las generatrices de contacto correspondientes y los c y d tangentes al cilintro i proyectante de la indicatriz y que pasan por el punto s. Siendo hipérbola la indicatriz, estos dos planos serán reales ó imaginarios, según que este punto s esté en una ú otra de las dos porciones en que dividen la recta del infinito del plano a los puntos del infinito de la indicatriz, y, por consiguiente, el cilindro σ' será en el primer caso elíptico, y en el segundo hiperbólico; lo cual

gún la posición del plano secante.

indica que la curvatura de los cilindros circunscritos tangentes al plano a está en uno ú otro sentido, según la posición del punto s.

Si el punto B se toma del otro lado del A, tendremos otra indicatriz, á la cual cortarán los planos que no cortaban á la anterior y á cuyo cilindro proyectante se podrán trazar planos tangentes reales desde los puntos interiores al cilindro anterior, y viceversa. Si el nuevo punto B está á la misma distancia del A que el anterior, la nueva cuádrica osculatriz será la conjugada de la primitiva respecto del eje AB y las dos indicatrices serán también conjugadas; de modo que para evitar construcciones con elementos imaginarios, podemos considerar formada la indicatriz en uno de estos puntos, por las dos hipérbolas conjugadas, teniendo cuidado de relacionar cada una con la distancia AB tomada en el sentido correspondiente.

Si en lugar de la indicatriz ordinaria p consideramos la indicatriz i', podaría de la anterior respecto de su centro, en la cual este punto es doble, siendo sus tangentes en él las perpendiculares á las asíntotas de la cónica I, veremos también que los planos normales al a, comprendidos en uno de los ángulos que forman estas perpendiculares á las asíntotas, cortan á la cónica i' en dos puntos reales, y los comprendidos en el otro ángulo la cortan en puntos imaginarios; de modo que para no tener que operar con elementos imaginarios, podemos considerar también la indicatriz i' como formada por las podarias de las dos hipérbolas conjugadas que forman la I.

Conociendo ya las indicatrices I é i', podemos de sus propiedades deducir las particularidades que presentan en su curvatura las

líneas situadas en

desarrollables circunscritas á

la surperficie S, cuyo estudio puede reducirse, según hemos visto, al de sus

secciones planas.	conos circunscritos.

Cuando

el plano secante s no pase por	el vértice s del cono no esté en

ninguna de las dos rectas α y α', no se presenta particularidad alguna, y la curvatura, que no es cero ni infinito, se obtiene fácilmente por medio de la indicatriz, siendo

máxima, si el plano secante es normal, cuando pase por	mínima, si el vértice del cono está en el infinito, cuando sea el punto del infinito de

una de las dos bisectrices de los ángulos formados por las asíntotas de la indicatriz.

La generatriz de la desarrollable circunscrita á lo largo de esta sección y la tangente á	La tangente á la línea de contacto de esta superficie cónica y la generatriz de

la misma están armónicamente separadas por las dos rectas α y α'. Si el

plano s pasa por	punto s está en

la generatriz rectilínea α,

la sección producida en	el cono circunscrito á

la cuádrica osculatriz S' se reduce al conjunto de dos

series de puntos de primer orden, una de cuyas bases	haces de planos de primer orden, una de cuyas aristas

es esta generatriz α, y la

sección producida en	superficie cónica circunscrita á

la superficie propuesta S se compone de

este serie de puntos α y una curva, siendo la arista de retroceso de la desarrollable circunscrita á lo largo de ella,	este haz de planos α y una superficie cónica propiamente tal, siendo el haz de planos osculadores de su línea de

tangente á la misma en el punto, no doble de la superficie S, en que corta á la generatriz α, que es el de contacto del plano secante s con esta superficie S.

contacto, tangente á esta superficie en el plano tangente á ella que pasa por la generatriz α y no es doblemente tangente á la superficie S, que es el tangente á esta superficie en el punto s.

Cuando en lugar de la generatriz rectilínea α, es la recta α'

por la que pasa este plano s, la sección producida en

en la que está situado este este punto s, el cono circunscrito á

la cuádrica S' se compone también de dos rectas, una de las cuales es la α'; pero la

sección producida en

superficie cónica circunscrita á

la superficie propuesta S, es

una curva, de cuya desarrollable circunscrita es generatriz

una propiamente tal, cuya línea de contacto es tangente á

la recta α', y cuya curvatura es, por consiguiente,

nula en este punto A.

infinita en este plano tangente a.

La curvatura de

las secciones normales de una superficie alabeada, en un punto A, presenta, pues, dos mínimos iguales á cero y dos máximos.

los cilindros circunscritos á una superficie alabeada y tangentes al plano a, presenta, pues, dos máximos iguales á infinito y dos mínimos.

III. Corvatura en los puntos y planos tangentes relativos á una arista.

Supongamos ahora que la generatriz rectilínea α sea la única recta

que pasa por el punto A y es arista de un haz de planos

del plano a', cuyos puntos son vértice de superficies có-

que producen en la superficie S secciones de curvatura nula en él.

nicas circunscritas á la superficie S de curvatura infinita en él.

Las cuádricas osculatrices son entonces

desarrollables, puesto que el plano tangente tiene común con ellas una recta no más,

líneas, puesto que por el punto de contacto sólo pasa una recta que forme parte de las mismas (*),

y para acabar de determinar una de ellas, podemos, también fijar otro punto B y el plano tangente correspondiente b, con la condición ordinaria de no estar ni pasar, respectivamente, en el plano tangente y por el punto dados.

La cuádrica así determinada S' tendrá por vértice el punto V de intersección de la generatriz rectilínea α con el plano b, siendo, por consiguiente, cono ó cilindro, según que este punto sea propio ó impropio. En el segundo caso, el cilindro sera elíptico, hiperbólico ó parabólico.

La línea de segundo orden, así determinada, estará en el plano Q, determinado por la generatriz rectilínea α y el punto B, siendo tangente á esta generatriz rectilínea en el punto de contacto del plano a'. Esta cónica será elipse, hipérbola ó parábola

según la posición del punto B y plano b, pero siempre los

centros de curvatura de las secciones producidas por

ejes de curvatura de los cilindros circunscritos tangen-

(*) Efectivamente, las superficies cónicas circunscritas á las cuádricas osculatrices y cuyos vértices sean puntos de una recta que cumpla la condición que cumple la α, han de ser de segundo orden y de curvatura infinita en un plano tangente, lo cual exige que se compongan de dos haces de planos de primer orden, es decir, que esta recta sea arista de un haz de planos tangentes á las cuádricas osculatrices. Si esta recta es única, estas cuádricas se han de reducir á cónicas, consideradas como envolventes de aristas de haces de planos de primer orden, una de cuyas aristas es la recta dada, á la cual son, por consiguiente, tangentes todas aquellas cónicas.

planos que pasen por el punto A, están del mismo lado del plano tangente a, ocurriendo lo mismo con las secciones que estos planos producen en la superficíe propuesta S. Para cónica I, que, con los puntos A y B y los planos tangentes a y b, ha de determinar la cuádrica S' con independencia del contacto de segundo orden, podemos tomar la sección producida por un plano cualquiera p, que no pase por los dos puntos A y B, pudiendo substituirse este par de puntos y planos tangentes por el vértice V; pero es más sencillo tomar el plano p que pase por este punto V, estando formada entonces la cónica I por las dos generatrices de la superficie S' situadas en el plano p.

tes al plano a', están del mismo lado de este plano, ocurriendo lo mismo con las superficies cilíndricas circunscritas á la superficie propuesta S. Para superficie cónica i, que, con los puntos A' y B y los planos tangentes a' y b, ha de determinar la cónica S' con independencia del contacto de segundo orden, podemos tomar el cono proyectante desde un punto cualquiera P, no situado en los dos planos a' y b, pudiendo substituirse este par de puntos y planos tangentes por el plano Q; pero es más sencillo tomar el punto P situado en este plano Q, estando formado entonces el cono i por los dos haces de planos, cuyas aristas son las tangentes á la cónica S' que pasan por este punto P.

Si tomamos el punto B sobre la normal al plano tangente trazada por el punto de contacto, y el plano tangente b paralelo al dado,

la cónica I, que entonces pasa á ser la indicatriz,

el cilidro i, cuyas generatrices son paralelas á la recta $A'B$,

se compone de dos rectas

paralelas á la generatriz rectilínea α,

tangentes á la cónica S',

que serán reales ó imaginarias, según que el punto B esté

del mismo ó de distinto lado del plano tangente que los centros de curvatura de las secciones planas de la superficie S, ó sea según que el cilindro osculador S' sea elíptico ó hiperbólico.

ejes de curvatura de los cilindros circunscritos á la superficie S, ó sea según que la cónica osculatriz S' sea elipse ó hipérbola.

La indicatriz i' en el punto y plano tangente á que se refieren los párrafos de la derecha, se compone de dos circunferencias tangentes, como podaria, respecto del centro, de los dos haces de rectas, seccion de los de planos á que se reduce el cilindro i, por un plano paralelo á los a' y b.

De aquí se deduce que la curvatura de

las secciones normales de la superficie S que pasan por el punto A, tiene un máximo, correspondiente al plano perpendicular á la generatriz rectilínea α, y un mínimo, igual á cero, para la sección producida por el plano que pasa por ella.

Los conos circunscritos á la desarrollable S', á que se reduce la cuádrica osculatriz, se reducen, á su vez, á dos planos, uno de los cuales es el a; lo cual indica que las superficies cónicas circunscritas á la superficie S y cuyos vértices están en este plano a son de curvatura nula en él.

los cilindros circunscritos á la superficie S tangentes al plano a', tiene un mínimo, correspondiente á la dirección perpendicular á la generatriz rectilínea α y un máximo, igual á infinito, para el cilindro cuyas generatrices son paralelas á ella.

Las secciones planas de la línea S', á que se reduce la cuádrica osculatriz, se reducen, á su vez, á dos puntos (como vértices de haces de rectas), uno de los cuales es el A'; lo cual indica que las secciones planas de la superficie S que pasan por este punto A' son de curvatura infinita en él.

Vemos, pues, que en estos puntos y planos tangentes, al contrario de lo que sucede en los elípticos é hiperbólicos, las propiedades de las secciones planas y de las superficies cónicas y cilíndricas circunscritas á la superficie

dada, no son correlativas, toda vez que la curvatura de las secciones planas que pasan por el punto A, tiene un valor constantemente finito y determinado, que sólo se hace cero cuando el plano secante pasa por la generatriz rectilínea α, mientras que la de las superficies cónicas y cilíndricas circunscritas, tangentes al plano a, es constantemente cero en este plano, considerado como tangente en el punto A. Estos puntos se llaman parabólicos por pertenecer al género parábola su indicatriz, compuesta de dos rectas paralelas.

superficies cónicas y cilíndricas circunscritas tangentes al plano a', tiene un valor finito y determinado, excepto para las superficies cuyo vértice es un punto de la generatriz rectilínea α, mientras que la de las secciones planas que pasan por el punto a', es constantemente infinita en este punto, considerado como de contacto del plano a'. Estos planos tangentes, para los cuales el cilindro i está compuesto de dos haces de planos de primer orden, los llamaremos también parabólicos.

Si ahora recordamos que, como hemos visto, los puntos y planos tangentes parabólicos son los que están y pasan respectivamente por las aristas de la superficie, y que, por consiguiente, la generatriz rectilínea considerada α ha de ser una de éstas, el plano a se confunde con el w tangente á la superficie á lo largo de ella, y el punto A' es el vértice W correspondiente, podremos llevar más adelante el estudio de las superficies cónicas circunscritas á la dada y cuyos vértices están en el plano w tangente á lo largo de la arista α. Hemos visto que su curvatura es nula en el punto considerado A de ésta, lo cual aparece ahora con claridad, puesto que dicha superficie cónica se compone de ese

secciones planas de la superficie dada que pasan por el punto W de contacto de todos los planos que pasan por la arista α. Hemos visto que su curvatura es infinita en el plano considerado a', que pasa por ésta, lo cual aparece ahora con claridad, puesto que dicha sección se compo-

plano w, como tangente á lo largo de dicha arista, y una superficie l, cuya línea de contacto L con la superficie dada pasa por el punto J y tiene en él como tangente la conjugada de la generatriz rectilínea de la superficie l, que pase por este punto, en la involución que determinan, como rayos dobles, la arista α y la tangente en el punto J á la línea de intersección de la superficie S con el plano w,

ne de ese punto W, como de contacto de todos los planos que pasan por dicha arista, y una línea l', siendo la desarrollable L', circunscrita á lo largo de ella á la superficie dada, tangente al plano j á lo largo de la recta conjugada con la tangente, situada en este plano, á la línea l', en la involución que determinan, como rayos dobles, la arista α y la generatriz, situada en el plano j, de la superficie cónica circunscrita á la S y cuyo vértice es el punto W,

puesto que, en el caso á que se refiere la columna de la derecha, por ejemplo, la desarrollable L' está engendrada por el movimiento del plano tangente á la superficie S en los diferentes puntos de la línea l'; para cada punto, este plano es el que pasa por la generatriz rectilínea correspondiente de la superficie dada y es tangente á la superficie cónica circunscrita á ella y cuyo vértice es aquel punto, y la tangente en él á la línea l' y la generatriz rectilínea, que por él pasa, de la desarrollable L' son conjugadas en la involución que tiene como rayos dobles las generatrices rectilíneas correspondientes de la superficie dada y de la superficie cónica circunscrita á ella y cuyo vértice es el punto considerado; en el límite, al confundirse este punto con el W, el plano móvil se confunde, por definición, con el j, y la involución considerada pasa á ser la que antes hemos indicado.

En el punto J y plano j existen, pues, involuciones análogas á las ordinarias de tangentes conjugadas; pero sus rayos no son conjugados respecto de las cuádricas circunscritas, puesto que éstas no existen para ese punto y plano tangente.

Como en este punto J la superficie tiene un contacto de segundo orden con el plano tangente w, también lo tendrán la línea de contacto L con su tangente correspondiente y la superficie l con dicho plano w, en el cual es, por tanto, de curvatura nula.

Como en este plano j la superficie tiene un contacto de segundo orden con el punto de contacto W, también lo tendrán la desarrollable l' con su generatriz correspondiente y la sección l' con dicho punto W, en el cual es, por tanto, de curvatura infinita.

Vemos, pues, que este punto J y plano tangente w son de inflexión de la superficie, por serlo de las líneas de la misma que pasan por ese punto y de las desarrollables circunscritas tangentes á ese plano.

plano j y punto de contacto W son de retroceso de la superficie, por serlo de las desarrollables circunscritas tangentes á ese plano y de las lineas de la superficie que pasan por ese punto.

Cuando el vértice V de la superficie cónica l circunscrita á la propuesta S está sobre la arista considerada α, dicha superficie cónica se compone del haz de planos de primer orden cuya arista es la generatriz α y una superficie cónica propiamente dicha, tangente al plano w á lo largo de ella; pero no puede deducirse del movimiento del punto de contacto del plano tangente que la engendra, que la línea de contacto L pase por el punto J,

Cuando el plano v de la sección l' de la superficie propuesta S pasa por la arista considerada α, dicha sección se compone de la generatriz rectilínea α y una curva tangente á ella en el punto W; pero no puede deducirse del movimiento del plano tangente en el punto que la engendra, que la desarrollable L' circunscrita á lo largo de la misma sea tangente al plano j,

porque, en el caso de la derecha, por ejemplo, el plano tangente en el punto móvil, es el límite del determinado por éste y una generatriz rectilínea, cuando ésta se mueve hasta

confundirse con la que pasa por este punto; cuando el plano v no pasa por la arista α, el plano t, que pasa por esta arista y el punto móvil, tiende á confundirse con el j, al acercarse la generatriz rectilínea, en que está situado este punto, á la α; pero cuando el plano v pasa por la arista α, el plano t se confunde constantemente con el v, y la posición límite u del plano tangente á la superficie en el punto móvil, que es el que pasa por la generatriz rectilínea que contiene este punto, y es tangente á la superficie cónica cuyo vértice es el mismo y está circunscrita á la superficie propuesta, no se confunde con el j, sino que aparece como indeterminado.

Para hallar en este caso el punto U en que la línea de contacto L corta á

Para hallar en este caso este plano u tangente á la desarrollable L' y que pasa por

la arista α, nos ha parecido el camino más sencillo fundarse en la propiedad de las superficies alabeadas, que demostraremos en lugar oportuno, de que

los polos de una recta m, respecto de las cónicas que la cortan en dos puntos fijos B y C, y tienen un contacto de segundo orden en los puntos de una arista α con las secciones que sus planos producen en la superficie S, forman una línea H de segundo orden, tangente á la arista en su vértice W, cuyo plano está armónicamente separado del w por los puntos B y C, y que tiene como tangente, en su punto de intersección con la recta m, la que une este punto con el J. Consideremos ahora una su-

los planos polares de una recta m respecto de los conos tangentes á dos planos fijos b y c, que pasan por ella, y que tienen un contacto de segundo orden en los planos que pasan por una arista α con las superficies cónicas de su mismo vértice y circunscritas á la superficie S, forman una superficie cónica h de segunda clase, tangente al plano w á lo largo de la arista α, cuyo vértice está armónicamente separado del W por los planos b y c, y que tiene como generatriz de contacto con el pla-

perficie cónica S'' de vértice V y tangente al plano w á lo largo de la arista α; en ella, como en toda desarrollable, la línea H se descompone en dos rectas, una de las cuales, r, polar del plano $m\,V$ respecto del cono que pasa por los puntos B y C y tiene con la superficie S'' un contacto de segundo orden á lo largo de la arista α, constituye propiamente el lugar de que se trata. Las superficies S y S'' tienen un contacto de segundo orden en los puntos de la arista dicha que están en un plano con la recta m y con los de intersección de la línea H con la recta r, siendo estos puntos los comunes á la arista α y la línea de intersección de las dos superficies S y S''. Cuando estas dos superficies están circunscritas una á otra, éstos dos puntos se confunden en uno, U, y la recta r es tangente á la cónica H.

Vemos, pues, que el punto de intersección U de la arista α con la línea de contacto L de la superficie S con no tangente que pasa por la recta m, la recta de intersección de este plano con el j. Consideremos ahora una línea plana s'', de plano v, y tangente á la arista α en el punto W; en ella, como en toda línea, la superficie h se descompone en dos rectas, una de las cuales, r, polar del punto $m\,r$ respecto de la cónica tangente á los planos b y c, y que tiene con la línea s'' un contacto de segundo orden en el punto W, constituye propiamente el lugar de que se trata. La línea s'' tiene con la superficie S un contacto de segundo orden en los planos que pasan por la arista dicha y los puntos de intersección de la recta m con los planos tangentes á la superficie h que pasan por la recta r, siendo estos planos los que pasan por la arista α, y son tangentes á la desarrollable circunscrita á la superficie S y á la línea s''. Cuando esta línea está sobre dicha superficie S, estos dos planos se confunden en uno, n, y la recta r es generatriz del cono h.

Vemos, pues, que el plano u, que pasa por la arista α y es tangente á la desarrollable L', circunscrita á la superfi-

la l, y en el cual tienen un contacto de segundo orden, es el de intersección de la generatriz rectilínea α con el plano que pasa por una recta cualquiera m y por el punto de contacto U_1 de la tangente distinta de la α trazada por el punto V á la cónica H correspondiente á esta recta m y un par de puntos arbitrarios de la misma. De aquí se deduce que los cuatro puntos V, W, J y U

cie S á lo largo de la línea l' y en el cual tienen la superficie S y la línea l' un contacto de segundo orden, es el que pasa por el punto de intersección de una recta cualquiera m con el plano u_1, tangente á lo largo de la generatriz distinta de la α situada en el plano v del cono h, correspondiente á esta recta m y un par de planos arbitrarios que pasan por ella. De aquí se deduce que los cuatro planos v, w, j y u

forman una figura armónica, puesto que, en el caso de la izquierda, por ejemplo, si unimos el punto V con el N común á la recta m y la cónica H, y proyectamos sobre esta cónica desde el punto W los cuatro puntos en que la recta VN corta á las α y WU_1 y á la cónica H, tendremos cuatro puntos que forman una figura armónica y cuya proyección desde N sobre α son los puntos V, W, J y U.

La posición del punto buscado U queda, pues, perfectamente determinada, así como la curvatura de la superficie l, puesto que es la misma, en ese punto, que la de la superficie S.

La tangente á la línea L en el punto U, que es parabólico, no puede deducirse de los elementos de segundo orden de la superficie en la arista α; pasando por el punto V las aristas de retroceso de las desarrollables circuns-

La posición del plano buscado u queda, pues, perfectamente determinada, así como la curvatura de la línea l' puesto que es la misma en ese plano que la de la superficie S.

La generatriz rectilínea de la superficie L' situada en el plano u, que es parabólico, no puede deducirse de los elementos de segundo orden de la superficie en la arista α; siendo tangentes al plano v las envolventes de los haces

critas á la superficie propuesta á lo largo de todas las líneas que pasan por el punto U.

Cuando el punto V coincide con el W ó con el J, el punto U se confunde también con ellos, y la superficie l no contiene, como generatriz, la arista α, siendo, en el primer caso, tangente al plano j, según hemos visto ya en la columna de la derecha, mientras que en el segundo tiene como de inflexión el plano tangente w.

de planos osculadores de las líneas de contacto, con la superficie propuesta, de las desarrollables circunscritas á ella, tangentes al plano u.

Cuando el plano v coincide con el w ó con el j, el plano u se confunde también con ellos, y la línea l' no es tangente á la arista α, pasando, en el primer caso, por el punto J, según hemos visto ya en la columna de la izquierda, mientras que en el segundo tiene como de retroceso el punto W.

Puede suceder también que al

punto J se confunda con el W,

plano j se confunda con el w,

siendo fácil ver que si se presenta una de las dos circunstancias, se presenta también la correlativa, puesto que si suponemos, por ejemplo, que se confunden los puntos J y W, el plano j, límite del que pasa por el punto W y la generatriz que engendra la superficie, estará determinado por la arista α y la tangente en el punto J á la línea de intersección de la superficie con el plano w, y se confundirá, por tanto, con éste. En este caso la superficie tiene un contacto de segundo orden con el

plano w en el punto W, por confundirse con el J, de modo que este punto es de inflexión en las líneas de la superficie que pasan por él,

punto W en el plano w, por confundirse con el j, de modo que este plano es de retroceso de las desarrollables circunscritas á la superficie tangentes á él,

confundiéndose, en ese punto y plano tangente, la tangente á la línea de contacto y la generatriz de la desarrollable circunscrita á lo largo de la misma.

El punto U común á la arista α y á la línea de contacto L de una superficie cónica l circunscrita cuyo vértice V esté en dicha arista, aparece ahora como indeterminado; pero en este caso la cónica H se reduce al conjunto de dos rectas y la superficie S admite infinitos conos osculadores á lo largo de la arista α, de donde se deduce que la línea L sólo puede cortar á la arista α en el punto W, y en él, en virtud de lo anteriormente dicho, ha de ser tangente á dicha arista, siendo de inflexión el plano w para la superficie cónica l.

Cuando el punto V es el mismo W, la superficie l no presenta particularidad alguna en el plano w, al cual es tangente á lo largo de una recta distinta de la arista α.

El plano u, que pasa por la arista α y es tangente á la desarrollable L' circunscrita á lo largo de la sección l' producida por un plano v que pase por dicha arista, aparece como indeterminado; pero en este caso el cono h se reduce al conjunto de dos rectas y la superficie S admite infinitas cónicas osculatrices en todos los planos que pasan por la arista α, de donde se deduce que la superficie L' solo puede tener como plano tangente que pase por la arista α el w, y, en virtud de lo anteriormente dicho, la generatriz en él situada ha de ser dicha arista, siendo de retroceso el punto W para la línea l'.

Cuando el plano v es el mismo w, la línea l' no presenta particularidad alguna en el punto W, en el cual tiene por tangente una recta distinta de la arista α.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

Informe acerca de la obra de D. Antonio López Perea, titulada «Mareas.— Cálculo práctico para determinar la hora de la Pleamar». Ponente: *Vicente Ventosa*..... 161

VIII. — Conferencias sobre Física Matemática. Teorías diversas, por *José Echegaray*. Conferencia vigésima..... 179

IX.— Conferencias sobre Física Matemática. Teorías diversas, por *José Echegaray*. Conferencia vigésimaprimera..... 209

X.— Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general (continuación), por *Antonio Torroja Miret*..... 242

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NUMERO 5.
NOVIEMBRE DE 1912.

Smithsonian Institution
FEB 9 1929

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XI.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia primera.

SEÑORES:

Cada vez que empiezo un nuevo curso, y éste es el octavo que tengo la honra de dar en la Universidad Central de Madrid, sobre materias y teorías de Física Matemática, me asaltan las mismas dudas y casi me atrevería á decir las mismas tentaciones.

Las mismas dudas sobre el programa á que deba sujetarme en la nueva serie de conferencias.

Las mismas tentaciones de abandonar la exposición de la ciencia clásica y de lanzarme resueltamente á las teorías modernísimas, que hoy invaden el campo sin fin de la Ciencia.

Dudas y tentaciones que no sentiría si me hubiera limitado, como ya en los comienzos de otro curso expuse, á explicar un tratado elemental de Física Matemática, en un solo curso, compendiado y repetido indefinidamente; siempre el mismo, con ligeras modificaciones en los cursos que á él hubieran de seguir.

Porque, entonces, el programa sería único y casi invariable, mi trabajo mínimo y las incertidumbres, sobre cada programa de la nueva serie de conferencias, nulas de todo punto.

Pero ya dije que esta solución era por completo inacep-

table por muchas razones, que saltan á la vista, y que desarrollé en aquella ocasión; y, en suma, porque la labor que en estas repetidas series de conferencias me he propuesto desarrollar es mucho más ambiciosa, acaso excesivamente ambiciosa.

Y bueno será que, al empezar cada año mis nuevas tareas, haga constar, como encabezamiento al nuevo curso, cuál fué mi propósito al encargarme de la clase de Física Matemática, cuál sigue siendo todavía y cuál espero que siga siendo hasta el fin.

Me proponía y me propongo dar varias series de conferencias, primero orales en esta clase, que tengo la honra de desempeñar, y por escrito después, gracias á la hospitalidad que la Academia de Ciencias me concede, sobre las teorías de la Física Matemática clásica y de la Física Matemática moderna.

En suma. publicar *una enciclopedia* que abarque todas las teorías principales de la Física Matemática, en su completa evolución, desde principios del siglo precedente hasta nuestros días.

Y ya que repito esta fórmula una vez más, para templar lo que en ella hay de soberbio, casi de insensato y por lo tanto de imposible, repetiré, una vez más también, las atenuaciones, limitaciones y reservas de que suelo acompañar este programa irrealizable.

La *enciclopedia*, que pretendo ir formando en los diferentes cursos de esta clase, ha de ser y tiene que ser *elemental;* en este sentido, que no es posible que agote la materia, que no es posible que en ella dé cuenta de los grandes trabajos, de las memorias especiales de matemáticos y físicos de la pasada centuria, ni de aquellas con que los físicos de hoy en labor admirable enriquecen los archivos de la Física Matemática.

Mas al mismo tiempo pretendo con mis conferencias abrir camino á los aficionados á esta clase de estudios, para que

lleguen con relativa facilidad, desde las Matemáticas elementales y la Física elemental á *las elevadas teorías,* á las admirables experiencias y á las atrevidísimas concepciones de la Física Matemática moderna.

Pudiera decir en breves frases, que intento *popularizar la alta ciencia* ante un público que, desde luego, tenga base científica suficiente para poder elevarse á las más remontadas regiones, si á ellas aspira.

Yo procuro facilitarles las primeras etapas de este viaje, que aun así ha de ser interminable.

Todo esto ya lo he dicho en otras ocasiones; hoy lo repito como resumen de aquello que dije y preparación para lo que he de decir.

*
* *

Estos propósitos míos, que no han variado desde el primer curso que expliqué en esta clase, apartan de mi camino algunas dudas y algunas tentaciones de aquellas á que antes me refería; pero no todas.

Resulta de lo dicho, que el programa de este curso ha de ser distinto de todos los programas á que he sujetados mis explicaciones en los cursos precedentes.

Porque me importa recordarlo. En los siete cursos de esta asignatura de Física Matemática, que llevo explicados, han sido distintas las materias que para mis conferencias he elegido.

El primer año procuré marcar las diferencias características, que existen entre la Física Matemática y la Física Experimental.

Y todo lo que entonces dije podría repetirlo hoy, aunque, á decir lo cierto, tendría que ampliar muchos de los conceptos que entonces estudié.

Procuré, en aquel mismo curso, marcar, prácticamente, estas diferencias; examinando problemas diversos de Física,

ya del calórico, ya de la luz, ya de la electricidad; *muestras,* por decirlo de este modo prosaico, de las cuestiones cuyo conjunto constituye la Física Matemática, y ha de constituirla siempre, dado que esta afirmación no sea excesivamente atrevida.

Pero *muestras* muy pequeñas: como es muestra del cielo azul el rectángulo azulado, que mirando desde el interior de un edificio recorta en el espacio inmenso el contorno de una ventana.

En el *segundo curso* varié de programa, como era natural, y como debía hacerlo para ser conscuente conmigo mismo; y empecé á estudiar la teoría matemática de la elasticidad por el método de Cauchy y de sus discípulos, que eran ampliaciones y perfeccionamientos matemáticos de la hipótesis de Huyghens y del método de Fresnel, y que eran la plena aplicación y la aplicación admirable de la *hipótesis mecánica* casi en toda su pureza.

En *el tercer curso* de esta asignatura, aunque seguí tratando de la teoría de la elasticidad, en rigor varié de programa.

Porque ya la pura hipótesis mecánica se complicaba, por decirlo de este modo, con elementos experimentales, es decir, con el concepto de *presión* ó *tensión* en cada elemento del sólido elástico.

Claro es, que este concepto experimental de presiones ó tensiones, del método de Cauchy se deduce inmediatamente, y yo lo duduje en una de mis conferencias; pero el punto de partida para establecer las ecuaciones dlferenciales del sistema elástico, es en el fondo esencialmente distinto en ambos métodos.

En el método de Cauchy se establecen las ecuaciones de equilibrio ó de movimiento *para cada punto*, sin acudir á ningún concepto experimental.

En el método de Lamé se considera como punto de partida el *paralelepípedo elemental,* que se ha reproducido en tantas otras teorías de la Física Matemática, introduciendo,

para las superficies límites del cuerpo, en vez del paralelepípedo, el tetraedro, que ya Cauchy había empleado en sus trabajos.

Ahora bien, lo que en el método de Cauchy era el equilibrio ó el movimiento de un punto, en la escuela de Lamé es el movimiento ó el equilibrio de un paralelepípedo elemental.

Y para este problema había que tener en cuenta las presiones ó las tensiones sobre las caras de este sólido.

En el *cuarto curso* de esta asignatura continué ocupándome en el problema de la elasticidad, porque creo que es importantísimo en la Física, por sí mismo y por sus métodos, y porque muchas cuestiones de la Física Matemática que se clasifican con diversos nombres, en el fondo al problema de la elasticidad en su aspecto más general se refieren.

Pero si de la elasticidad de los sistemas me ocupaba como en los dos cursos precedentes, el método era distinto, pues ya no era ni el método de Cauchy ni el método de Lamé, sino el método del eminente matemático M. Poincaré, cuya muerte hoy llora la ciencia, método que casi me atrevería á decir que pertenece al período de transición entre la ciencia clásica y la ciencia moderna.

Al establecer M. Poincaré las ecuaciones del equilibrio ó del movimiento de los sistemas elásticos, no calcula las fuerzas, ni por el método de Cauchy, que supone la acción á distancia de las hipótesis astronómicas, transportadas á la mecánica molecular, ni de primera intención cuenta con las presiones ó tensiones, como conceptos tomados de la experiencia; sino que supone que existe una *función de fuerzas*, y que cada componente de cada esfuerzo se obtiene por la derivación con relación á x, y, z de dicha función de fuerzas, ó si se quiere, de la potencial del sistema.

Por eso he dicho, que el método en que voy ocupándome tiene vistas, si así puede decirse, hacia las teorías modernas de la elasticidad.

Todo esto que aquí no puedo presentar sino en forma excesivamente concisa, lo desarrollé con más amplitud en los cursos segundo, tercero y cuarto de esta asignatura.

Al empezar el *quinto curso* de esta pequeña enciclopedia, varié, como siempre, de programa; las cuestiones que había tratado ya no podía tratarlas, sin repetir lo dicho y consumiendo el tiempo necesario para recorrer nuevos horizontes.

Necesitaba un nuevo programa, pues, y como había de entrar tan pronto como pudiera en el estudio de las teorías modernas, y no podía lanzarme á nuevas empresas llevando á ellas á mis alumnos, sino armados de todas armas como entonces dije, ó en términos menos guerreros y más propios, llevando á los nuevos estudios los conocimientos matemáticos necesarios á cada uno de ellos; aparte de otros conceptos y cuestiones que encontré en mi camino, dediqué las conferencias de este quinto año á la exposición de dos teoremas fundamentales, y casi dijera mejor de dos fórmulas: la fórmula de Green ó transformación de una integral triple en integral doble, y la fórmula de Stokes, que tiene por objeto la transformación de una integral de superficie en integral de línea.

Fórmulas ambas de aplicación, no sólo en toda la Física Matemática moderna, sino en una ó en otra forma, de aplicación también, á la Física Matemática clásica.

Después de explicadas ambas fórmulas con los desarrollos que creí convenientes, hice aplicación de ambas á varias cuestiones de Física Matemática, marcando con este motivo la diferencia radical entre la ciencia *clásica* y la ciencia *moderna*, entre aquellos *espacios vacíos* é *inertes* de los matemáticos de principio de siglo pasado y estos *espacios activos* de la ciencia moderna, que se convierten en campos eléctricos, magnéticos y electromagnéticos.

Con esta ocasión expusimos, por una parte, la teoría fundamental de la electrodinámica, según Ampere; y por otra

parte, algunas de las fórmulas más elementales de los campos electromagnéticos.

Declaro lealmente, que al llegar aquí, iba cediendo á aquellas tentaciones de que hablaba al empezar estas conferencias. La tentación y las tentaciones de penetrar en el ancho campo, tan cuajado de problemas y atrevimientos, de críticas y de hipótesis de la Física Matemática moderna.

Y por eso en aquel curso, aprovechando las ocasiones y aun buscándolas, empecé, si no recuerdo mal, á enumerar *las negaciones de la crítica moderna* respecto á los conceptos de la vieja Mecánica: por ejemplo, el concepto de *masa*, la *acción á distancia*, la *acción instantánea*, y por fin el *campo electromagnético*, rellenando el espacio geométrico de los primeros tiempos.

Y estas ideas y otras con ellas conexas llenaron el quinto curso de nuestra asignatura.

Mas al llegar al *curso siguiente, que fué el sexto*, y establecer desde el principio el programa de éste, comprendí que debía domar aquellas tentaciones, á las que iba cediendo; que debía contener deseos é impulsos de penetrar en la nueva ciencia, y sujetarme severamente al programa general de esta asignatura; que una vez más, lo repetiré, no es otra cosa que el de una enciclopedia elemental de Física Matemática clásica y de Física Matemática moderna; preparación necesaria para el estudio de las grandes teorías modernísimas, sin hacer caso omiso, sino penetrando resueltamente en el campo matemático, fuera del que podrá existir la Física Experimental, pero no existe la Física Matemática.

Y de la Física Matemática tratamos.

Procurando, en mi programa para el sexto curso, no alejarme de las teorías clásicas antes de haberlas recorrido, si no en su totalidad, al menos en gran parte; pero acercándome sin abandonarlas á las que puedan servir de transición desde la vieja ciencia á la que hoy está en pleno desarrollo, me fijé en una teoría importantísima por sí, aun como teoría

aislada de la Mecánica, é importantísima aun por su íntima conexión con muchos problemas de la electroestática y de la electrodinámica.

Me refiero á la teoría de los *torbellinos;* y ya en este curso, que fué el de 1910 á 1911, expuse ampliamente mis ideas y procuré justificar la elección de dicha materia para las conferencias que hubiera de dar en aquel período.

No he de repetir todo lo que en tales conferencias expuse; me contentaré con apuntar algunos conceptos.

En primer lugar, la teoría de los torbellinos forma parte integrante de toda una rama de la Mecánica, á saber: de la Hidrodinámica.

Y la mayor parte de los problemas de la Mecánica clásica, puede afirmarse, que son problemas de Física Matemática, sobre todo de aquella parte de la Física Matemática que he llamado clásica y que se fundaba en la hipótesis mecánica.

En segundo lugar, precisamente en la teoría de los torbellinos, como citábamos oportunamente, han buscado la explicación de la gravitación universal por una parte y por otra parte de los fundamentos de la Química, sabios y matemáticos ilustres.

Otro punto de vista importante: Entre los problemas de la electrodinámica y los problemas de los torbellinos, hay relaciones de semejanza y de analogía verdaderamente notables, hasta el punto de poderse referir en ocasiones, unos problemas á otros; por lo menos como símbolos perfectos de dos órdenes de fenómenos, cada uno de los que puede considerarse como la imagen del otro aun no buscando identidad de esencia.

Y por último, el problema de los torbellinos, que supone la continuidad en la materia, viene á rozarse por lo menos con uno de los grandes misterios de la naturaleza inorgánica, cuando no á plantear este problema; á saber: el de la *discontinuidad* ó el de la *continuidad* de la materia, del éter, de la electricidad, en suma, de toda substancia.

En unos períodos de la historia de la ciencia, parece que la *continuidad* domina; en otros períodos, la *discontinuidad* ocupa el primer término, y ahora mismo, como puede verse en un artículo notabilísimo del admirable matemático y pensador M. Poincaré, quizá el último que ha escrito, la discontinuidad llega á los últimos límites del desbordamiento, si puedo expresarme de este modo.

No es ya la discontinuidad de la materia ponderable, que dió origen al átomo; no es ya la discontinuidad de la electricidad, que da origen á los electrones y á los iones; no es ya la discontinuidad del mismo éter, cuya continuidad corrió peligro desde el momento en que á través del éter circulaban ondas electromagnéticas: es algo más.

Porque si se va al fondo del problema, como ya iremos en alguna ocasión, ó se penetra en la teoría de los torbellinos, ó se distinguen las acciones eléctricas de las acciones magnéticas, hay que confesar que estas diversas determinaciones exigen cierto orden de discontinuidad; mas no es prudente decir las cosas á medias y no insisto sobre este punto.

Pero es que no le basta á este furor de la discontinuidad con las ya señaladas, sino que se llega á la *discontinuidad*, al *cuanto*, en suma, al *átomo de la fuerza*.

Y desbocada la imaginación del todo, y hecho polvo el Universo, se llega á la *discontinuidad* y al *átomo del tiempo*.

Ya ven mis oyentes ó mis lectores, qué honduras y qué peligros hay en este problema de la discontinuidad y de la continuidad, y si podrá ser interesante, como vimos que lo era, esta teoría de los torbellinos, que supone la continuidad, al menos para el cálculo matemático, con preferencia á la discontinuidad.

Como que todavía no se ha llegado á una solución de concordia entre ambas tendencias, y eso que en forma más ó menos nebulosa, empezaron con la nebulosa del pensamiento humano en el origen de la civilización.

En suma, por estas razones y por las que expuse en mo-

mento oportuno, la materia de mis conferencias en el sexto curso de esta clase fué la teoría de los torbellinos.

Y para terminar este resumen, porque resumen abreviadísimo es de mis explicaciones y de mis conferencias, debo pasar al *curso séptimo* de esta clase, que es el curso que precede al que hoy empieza.

Una vez más lo repetiré: el programa de esta séptima serie de conferencias había de ser distinto de todos los programas anteriores.

Cuando trato en esta clase un asunto, ya no vuelvo á tratarlo, como no sea parcialmente y por incidencia, ni volvería á tratarlo aunque mis conferencias pudieran continuar en serie indefinida, hasta no haber terminado todo un primer *ciclo* que abarcase la Física Matemática clásica y la moderna; y sólo al empezar otro segundo período iría ampliando, completando y desarrollando todas las materias que ahora expongo de primera intención.

Mas ya comprendo que estos son sueños imposibles del deseo y que aun este primer ciclo quedará sin cerrar.

Decía, pues, que en este *séptimo curso* de la clase que desempeño escogí una nueva materia, importante, principalísima, de las fundamentales pudiera decir: *La teoría de la potencial,* y en ella traté de la ecuación de Laplace indicando algo de la ecuación de Poisson.

¿Por qué escogí esta materia para aquel nuevo curso?

Por dos razones completamente distintas y aun independientes.

Una razón fundamental.

Otra razón accidental.

Recordaré una y otra, pues tampoco quisiera que se imaginase que la elección de cada programa, para cada curso, obedece á la casualidad ó al capricho.

Al explicar en la serie de mis conferencias las teorías de la Física Matemática, procuro ir preparando el paso á la Ciencia moderna.

Indico á este fin los conceptos de aquélla, que en estos últimos tiempos se niegan ó se modifican ó se subordinan á otros conceptos.

Y así he dicho, por ejemplo: al concepto clásico de masa ponderable ó, si se quiere, al concepto de *inercia* que le corresponde, se opone el nuevo concepto de *inercia eléctrica* ó electromagnética; al *espacio vacío* y geométrico entre uno y otro sistema material, se opone, el éter, el dieléctrico ó el campo electromagnético; á la *acción á distancia é instantánea*, la *acción transmitida* con velocidad finita; á los métodos fundados en las *fuerzas centrales*, otros métodos más generales que no supongan esta condición restrictiva: precisamente este es el carácter del método de Poincaré para la teoría de la elasticidad, método que, como queda recordado hace poco, desarrollamos en el cuarto curso de estas conferencias.

Y señalando todos estos elementos de transformación de la Física Matemática del siglo precedente en la Física Matemática posterior, que llamo para abreviar la Física Matemática moderna, fijé una y otra vez la atención de mis alumnos sobre estos dos conceptos, que caracterizan en cierto modo dos tendencias diversas de la Física Matemática en la evolución de esta Ciencia, á saber: *la fuerza* y *el trabajo ó la energía.*

La *fuerza* es el elemento dominante de la antigua Física Matemática, ó, si se quiere, de la vieja Mecánica.

La *energia* es la nota dominante en la ciencia moderna.

La fuerza domina y ejerce hegemonía en la Física Matemática de Gauss y de Poisson, de Cauchy y de Lamé; en suma, de todos los grandcs matemáticos, que de cuestiones de Física se han ocupado en la pasada centuria.

La energía domina á su vez en las cuestiones de la Física Matemática moderna, y domina de tal modo, que pretende absorber toda la ciencia y explicar todos los fenómenos del mundo inorgánico; con ciertos atrevimientos por añadidura, que aspiran á dominar otras regiones.

Claro es, que en el fondo, este concepto de energía no era desconocido de la Física Matemática clásica, ni siquiera de la Mecánica; porque energía mecánica es el trabajo de las fuerzas: de suerte que el concepto de energía, lo repito, no es nuevo, y diré más, su definición clara y precisa sólo se ha podido dar hasta hoy, acudiendo al concepto de *fuerza,* de fuerza actuante y de *trabajo,* y también de fuerza viva.

La energía mecánica es el trabajo mecánico y el trabajo mecánico es el producto de dos factores: una fuerza y un camino recorrido, medidos ambos convenientemente.

Verdad es que hay una escuela moderna, que admite muchas clases de energías; pero en estas nuevas orientaciones del pensamiento no podemos avanzar, porque sería distraernos de nuestro principal objeto.

Y nuestro objeto, ya lo hemos indicado, no es otro que marcar con estos dos conceptos, la fuerza y la energía, dos orientaciones, si no opuestas, distintas de la Física Matemática.

Apenas se habla del *trabajo* en las obras de la primera mitad del siglo pasado.

En cambio en las obras modernas la fuerza queda casi en segundo término, y la palabra energía aparece en casi todas las páginas. Ejemplo: la obra magistral de M. Poincaré sobre óptica y magnetismo y otras del mismo autor.

Pues bien; la teoría de *la potencial* tiene por fondo la energía.

Por esta razón se orienta hacia la ciencia nueva, y, sin embargo, se enlaza con la ciencia clásica por otro concepto análogo el de *función de fuerzas.*

Es casi imposible dar un paso en la ciencia moderna sin conocer los fundamentos de la teoría de la potencial, ni podría yo seguir estas conferencias sin haber expuesto dicha teoría, que por decirlo así palpita en toda la ciencia física de nuestros días, hasta el punto de que alguno de sus términos, en la teoría de la electricidad, han llegado hasta á ser vulgares y casi me atrevería á agregar que de uso doméstico.

Todo el mundo habla ya de la *potencial* de una corriente eléctrica y de la potencial de las lámparas que usa.

Había, pues, razones fundamentales para que yo dedicase el curso precedente al estudio de las potenciales.

Ya se trate de las potenciales de masas ponderables como aplicación á la Mecánica clásica; ya se apliquen á las teorías del magnetismo y de la electricidad, es decir, á las cuestiones más modernas y más transcendentales de la ciencia del mundo inorgánico.

Mas para tomar como materia del curso precedente esta teoría de la potencial tuvimos otro motivo, por decirlo así, de circunstancias.

Explicamos en el curso que había precedido, según queda dicho, la teoría de los torbellinos; estudiamos toda su primera parte. Y al llegar al complemento de esta teoría, nos íbamos á encontrar con la célebre ecuación de Poisson, la cual se enlaza con la de Laplace, generalizándola, y enlazándose ambas íntimamente con la teoría de la potencial. Y tenía yo interés, en bien de la enseñanza y para la claridad de mis explicaciones, en exponer ambos teoremas y ambas fórmulas á mis alumnos; resultado á que llegaba, naturalmente, al exponer en mis conferencias la teoría de la potencial.

Pues permítaseme con este motivo una pequeña digresión, que no es sobre la ciencia en sí, sino más bien sobre el procedimiento que ha de seguirse en la enseñanza.

Casi me atrevería á decir que es una preocupación personal, un estado de mi espíritu, que yo transporto al de mis alumnos, no sé si acertada ó desacertadamente.

Me explicaré.

*
* *

Juzgando las impresiones de todo alumno, que empieza el estudio de una materia nueva para él, por el recuerdo de mis propias impresiones de otro tiempo, imagino el desalien-

to que experimenta todo el que al estudiar una teoría se encuentra con que el autor establece como punto de partida *una fórmula*, cuya demostración no consigna, dándola por buena y por demostrada de antemano.

No es que se dude de la exactitud de la fórmula, es que ha de aceptarse, no por convencimiento racional propio, sino por acto de fe científica, ó por confianza en el maestro, ó por imperios del principio de autoridad.

Yo creo que en la enseñanza, partiendo de cierta cultura general de los alumnos, y dados por demostrados los teoremas, que esa cultura general supone, todo teorema nuevo debe ir acompañado de su correspondiente demostración.

Esto he procurado hacer en todas mis conferencias, aunque esto me ha obligado á veces á no pocas digresiones, para ampliar ó demostrar verdades, que no estaba seguro de que fueran conocidas ó recordadas por mis alumnos.

Y así, después de haber explicado en el sexto curso de esta asignatura la parte elemental de la teoría de los torbellinos, me encontré con que al abordar uno de los problemas generales de esta teoría iba á tener necesidad de aplicar la fórmula de Poisson

$$\Delta U = -4\pi\rho$$

y no quise pasar adelante sin explicar el sentido y dar la demostración de esta fórmula clásica, probablemente desconocida para los alumnos que sólo poseen una cultura elemental en Matemáticas y en Física.

Y como esta fórmula es una generalización de la fórmula de Laplace

$$\Delta U = o,$$

y como una y otra se enlazan íntimamente con la teoría de la potencial, este motivo se agregó como accidental á otros

motivos más fundamentales, que acabamos de exponer, para que abordase en el curso precedente la teoría general de las potenciales newtonianas.

A elegir este tema para mis conferencias me condujeron, pues, razones generales y propiamente científicas, y razones accidentales y casi me atrevería á decir pedagógicas, pues se refieren al método y al procedimiento para la enseñanza.

Y aunque sean estas últimas puramente accidentales, como digo, creo que tienen importancia para el estudio, sobre todo de una materia nueva.

Exponer una rama de la ciencia, una de sus derivaciones, dando por bueno un teorema ó una fórmula, y sin demostrarlos, es como subir una escalera en que falta un escalón.

Puede subirse, puede saltarse el escalón que falta, pero se sube de mala gana y sin convencimiento total, y si se me permite expresarme de este modo, diré que la inteligencia sube humillada y sin la *satisfacción interior* que en la milicia como en el estudio es tan necesaria.

Mas esta última razón que tuve para interrumpir mis explicaciones sobre la teoría de los torbellinos fué, por decirlo así, doble.

No sólo me encontré con que tenía que usar una fórmula, que probablemente desconocerían la mayor parte de mis alumnos ó de mis lectores, sino que no era éste el único escalón que faltaba en la escalera que íbamos subiendo. Como ya dije en una de las primeras conferencias del curso anterior, me encontraba con que era preciso que aplicásemos, al estudiar el movimiento de tres torbellinos rectilíneos y paralelos, un teorema fundamental de la teoría de las *ecuaciones de la Mecánica*, ó mejor dicho, *de la forma canónica* de Hamilton.

Y por eso me detuve y abrí un paréntesis en el estudio de la teoría de los torbellinos, paréntesis que por lo visto va á durar dos cursos enteros, aunque imaginaba al principio, que no se prolongaría más de una ó dos conferencias.

Por eso al fijar el programa del curso anterior, decía:

Me propongo explicar en este curso y en esta nueva serie de conferencias, que es la séptima en las que voy dando en la Universidad Central, estas dos materias:

1.ª La teoría de la potencial newtoniana, y en ella la fórmula de Laplace y la de Poisson.

2.ª La teoría de las ecuaciones generales de la mecánica,y, sobre todo, las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Tal era mi programa para el curso de 1911 á 1912, y estas eran mis aspiraciones.

Pero eran dos teorías demasiado extensas, aun reduciéndolas á términos elementales, como vengo haciendo con todas las teorías de la Física Matematica, para que ambas cupieran en un curso; y el tiempo puso freno á mis deseos y á mis aspiraciones, y de todo el programa, del doble programa pudiera decir, que acabo de indicar, sólo pude dar término á la primera, y aun con ciertos apuros y precipitaciones.

De la segunda parte nada dije, y anticipo que esta va á ser la materia del curso de 1912 á 1913.

Para disculpar tales irregularidades, que después de todo son aparentes, en la marcha general de la enseñanza, que voy dando sobre materias de Física Matemática, irregularidades, digresiones, paréntesis y mezclas inesperadas, de unas teorías con otras, todo lo cual sospeché desde un principio, he dado el nombre genérico de *conferencias* á mis explicaciones en esta cátedra.

Lo que no sería permitido en una serie de cursos ordenados, metódicos, sujetos á programas oficiales, ó en libros didácticos de exposición lógica y severa, es natural y es permitido, y yo agrego que es conveniente para la enseñanza, en diversas series de conferencias, que aunque hayan de estar sujetas á una idea general, gozan de libertades y autonomías, que de no ser lo que son, no podían gozar.

Y es que yo no sólo expongo las teorías diversas y funda-

mentales de la Física Matemática, sino que al propio tiempo, y hasta donde puedo, voy haciendo un trabajo general de crítica; de crítica de la Ciencia, de crítica de su evolución y aun de crítica respecto á su enseñanza.

Por eso, teoremas que en rigor pudieran exponerse en dos ó tres páginas, aparecen en mis conferencias, ocupando varias, y en los libros que publico, ocupando muchas hojas.

Es que no sólo expongo, sino que por decirlo de esta manera, discurro en voz alta con mis alumnos sobre lo que voy explicando y demostrando.

Claro es que tales son mis aspiraciones, sin que pretenda haberlas realizado, ó conseguir realizarlas.

Pero estas son ideas que por primera vez apunto en esta cátedra, y que exigen, para ser debidamente comprendidas, mayores desarrollos.

Queden por hoy en bosquejo y resérveme yo la esperanza de convertirlas en cuadro.

Ya he indicado el programa del nuevo curso á que hoy damos comienzo; pero este programa exige mayores explicaciones que reservo para la segunda conferencia.

XII.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

Por José Echegaray.

Conferencia segunda.

Señores:

Tratando de justificar en la conferencia precedente, que ha sido la primera de este curso, la elección de materias para cada uno de los cursos anteriores, y esforzándonos por demostrar que dicha elección, en gran parte al menos, no ha sido arbitraria, hicimos á la vez un resumen de las siete series de conferencias explicadas hasta aquí.

Resumen general, á grandes rasgos, señalando únicamente las ideas dominantes; pero de todas maneras, resumen de la labor que hasta hoy he realizado en esta asignatura.

Y dadas aquellas explicaciones sobre unos y otros programas, y hecho aquel resumen, dije al final que la materia en que había de ocuparme en el curso presente podía llevar este título: *Ecuaciones generales de la Mecánica,* y en particular *Ecuaciones canónicas de Hamilton.*

El nuevo programa del nuevo curso, que empezamos, queda hasta cierto punto justificado por lo que expuse en dicha conferencia anterior; pero queda justificado de una manera accidental, como puede justificarse una digresión más ó menos extensa ó un paréntesis más ó menos amplio; y casi pudiera decir, que en uno de estos paréntesis, de veinte ó de cuarenta conferencias, desarrollé en el año anterior, y voy á desarrollar en éste, asuntos que al parecer incidentalmente empezaron.

Digo, que incidentalmente procuré justificar el programa de este curso, porque la primera idea que me sugirió tal programa, fué la necesidad en que me creí de justificar ciertas fórmulas en el problema de los tres torbellinos rectilíneos y paralelos.

Pues en aquella ocasión me dije á mí mismo: para que mis alumnos comprendan la solución completa de dicho problema sin referirme á teorías que ignoren, es preciso que antes de pasar adelante les explique algunos teoremas sobre las ecuaciones de Hamilton.

Este propósito nació, pues, lo repito, incidentalmente; pero lo incidental ha pasado á ser base y fundamento de mis conferencias de este curso por razones de verdadero peso.

Es indispensable, que en la empresa que tuve el atrevimiento de acometer, en este propósito de escribir una enciclopedia, siquiera sea elemental, muy elemental, de las teorías generales de la Física Matemática clásica y de la Física Matemática moderna, como preparación para más amplios estudios; es indispensable, repito, que dedique un curso entero á este asunto, que viene á convertirse en programa del curso presente, á saber: *Ecuaciones generales de la Mecánica.*

Y, en efecto, yo vengo desarrollando, y he de desarrollar en los límites de lo posible, la que sigo llamando, para abreviar la expresión, Física Matemática clásica. Pero si no toda ella, casi toda ella, con un cortísimo número de excepciones, se funda en la *hipótesis que dominó durante la pasada centuria,* que venía dominando desde los orígenes de la ciencia moderna, y que hoy, aunque rudamente combatida, no arrió su bandera y aún hace marcar su influencia poderosa, como hemos demostrado y como seguiremos demostrando: y aún obtiene ante la ciencia modernísima más de una victoria que señalaremos á su tiempo.

Pero si yo he de explicar la Física clásica, y ésta se funda en *la hipótesis mecánica*, claro es que á las ecuaciones ge-

nerales de la Mecánica debo dedicarles atención preferente en orden substancial y en orden histórico.

Tratar de las ecuaciones de la Mecánica y de las ecuaciones canónicas de Hamilton es, por lo tanto, estar dentro de la Física Matemática, dentro de la asignatura que tengo obligación de explicar.

Y desde el primer curso pensé esto mismo. Por eso en el de 1905 á 1906 dediqué varias conferencias, no á la exposición, pero sí al recuerdo del teorema general de las velocidades virtuales, ó mejor dicho, de los trabajos virtuales, que es el teorema de toda la estática clásica, salvo casos muy especiales; y después expuse (página 288, curso de 1905 á 1906) el principio de Hamilton y las ecuaciones fundamentales de Lagrange.

Las ecuaciones, las admirables ecuaciones de Lagrange son la gran síntesis de la Mecánica clásica, y es imposible, tratar con cierta extensión, y hasta me atreveria á decir con cierta profundidad, los problemas de la vieja Física Matemática, sin explicar previamente estas ecuaciones del inmortal matemático. Ecuaciones que en sí encierran tal generalidad, y que tienen tal fuerza, que aun entre los modernistas más intransigentes afirman su poderío en ocasiones; aunque más por el glorioso pasado de aquellas teorías, que por asentimiento de la ciencia actual.

Y es ejemplo singularísimo que estudiaremos en su dia si á él llegamos, la aplicación grandemente atrevida, que hace el admirable matemático francés Mr. Poincaré de las ecuaciones de Lagrange, nada menos que á las modernísimas teorías de Lorentz.

Modernísimas he dicho, y tan aprisa se va en las nuevas hipótesis, en las nuevas teorías y en la nueva crítica, que acaso en este momento están á punto de pasar de ser modernísimas á ser clásicas, aun antes de que sobre ellas caiga la pátina del tiempo.

*
* *

Realmente la Mecánica clásica, hoy tan combatida, era en su tiempo una de las ciencias más perfectas, casi me atreveré á decir la ciencia más perfecta; porque era la ciencia en que dominaba una unidad absoluta, y ya se sabe que á más completa unidad, más perfección científica.

Y si razonáramos como hubiéramos podido razonar hace cincuenta años, fácilmente demostraríamos esta afirmación.

Toda la estática se condensaba en un principio: *el de las velocidades virtuales.*

Toda la dinámica se condensaba en una ecuación ó en un sistema de ecuaciones, si se quiere; una para cada variable independiente, á saber: *las ecuaciones de Lagrange,* que antes citábamos.

Y como la Estática no es más que un caso particular de la Dinámica, ó más bien una abstracción lógica de dicha ciencia, puede decirse, ó hubiéramos podido decir en otro tiempo, que la Mecánica entera había encontrado su expresión matemática y su perfecta unidad en el sistema de ecuaciones de Lagrange; síntesis suprema y síntesis matemática de todos los fenómenos del movimiento con todos sus accidentes: con su parte geométrica, con su parte cinemática, con sus masas, sus velocidades, sus aceleraciones, sus fuerzas, y aun sus energías, y aun agregaremos que conteniendo en sí toda la teoría moderna de la potencial.

¡Qué ciencia puede alardear de otro tanto!

¡Qué disciplina científica ha conseguido tan alta unidad! Y expresada en la forma más perfecta, en forma matemática; y sujetando á unidad, peso y medida todos sus elemnntos.

No conozco ciencia que pueda jactarse de haber llegado á tan suprema perfección.

Hace cincuenta ó sesenta años, la soberbia humana hubiera podido hablar de este modo, sin que se le acusase de delirio ó de jactancia.

Hoy la crítica y las teorías modernas rechazarían ó con enojo ó con lástima estas arrogancias de la vieja Mecánica.

Y bien está que las rechace, porque toda jactancia es peligrosa; lo malo es que la crítica y las nuevas escuelas exageran en un sentido, si los partidarios de la vieja Mecánica exageraban en otro, y dan aquéllas por muerta la Mecánica de los grandes matemáticos de la pasada centuria, y hasta buscan sucesor para la nueva monarquía.

No tanto.

Si es peligrosa la jactancia de los que imaginan haber llegado á la perfección, es peligrosa la jactancia crítica de los que en cada momento quieren hacer tabla rasa de lo pasado y pretenden crear una ciencia nueva, única verdadera y única poderosa.

Pongamos las cosas en su punto, al menos, tal como las comprendemos.

***

Los sabios fabrican cada teoría, si se me permite esta palabra, *fabricar*, para los fenómenos que conocen y estudian en cada momento de la ciencia; y como la teoría explique los fenómenos para los cuales ha sido fabricada, y dentro de la esfera de dichos fenómenos determine sin contradicción sus valores numéricos y sus diversos accidentes y modalidades, y aun se anticipe á los hechos y prevea nuevas manifestaciones, siempre del mismo orden de fenómenos, los sabios, y la ciencia con ellos, dan por buena y aun consideran casi perfecta la teoría que elaboraron.

Y esto es natural y legítimo; ha sucedido siempre y seguirá sucediendo, y sería la muerte de la Ciencia, ó su empequeñecimiento, tomar el camino contrario por malestares de excepticismo.

Lo que hay es, que en cada uno de los momentos históricos de la Ciencia, conviene huir de dos extremos: en primer lugar, el de la excesiva confianza, y mejor dijéramos, el de

la excesiva soberbia. En ningún momento puede decirse: ya está construída la Ciencia total; ya hemos fabricado la teoría absoluta; ya está encerrado el Cosmos en unas cuantas fórmulas matemáticas.

No; tal teoría, por admirable que nos parezca, sólo será relativamente exacta; sólo será una aproximación; sólo abarcará una parte, siempre pequeña, de los fenómenos que comprende el universo.

Y si queremos llevar las fórmulas y las leyes, que la teoría contiene y explica, á la totalidad del Universo, sólo encontraremos fracasos, contradicciones y más de una humillación para nuestra vanidad.

Eran moldes buenos entre ciertos límites: esos moldes se rompen, se hacen añicos si en ellos pretendemos encerrar todos los infinitos de los mundos.

Hay que huir de este primer peligro; pero hay otro peligro tan grave ó más grave que el primero: el de anular, á cada adelanto de la ciencia, toda la ciencia anterior con sus leyes, con sus fórmulas, con sus resultados prácticos y hasta con los prestigios y las glorias de sus sabios.

La ciencia clásica, para algún espíritu pesimista, es nula, absurda, infantil, casi ridícula; hay que arrojarla como viejo harapo. La verdadera Ciencia empieza ahora.

Pues todo esto es mucho más absurdo, más funesto que todas las soberbias de la ciencia clásica.

Y de estas exageraciones de la crítica, de estos modernismos científicos, que á veces son hasta petulantes, hay que huir para no caer al fin y al cabo, y negación tras negación, en un excepticismo mortal.

La ciencia clásica quedará siempre como una primera evolución del pensamiento humano, como un escalón ó como un tramo de escalinata que nunca acaba de subir. Más aún; quedará como exacta dentro de cierto grado de aproximación para aquel orden de fenómenos, que sirvieron para construirla.

Estas son generalidades; pero que tienen su aplicación para el tema que vamos discutiendo.

Apliquemos, pues, lo que precede á la vieja mecánica.

La mecánica se fabricó, y permítaseme que continúe aplicando esta palabra, porque las teorías son instrumentos que se fabrican para trabajar sobre los fenómenos, como para labrar rocas, para abrir túneles, para penetrar en lo desconocido.

Se fabricó la mecánica, repito, para las masas ponderables, para las fuerzas que después se han medido por kilogramos, para el movimiento de los astros, para la caída ó el movimiento de los cuerpos sobre la tierra, para las máquinas que el hombre construye, para los sólidos ó conjunto de sólidos por de contado, y avanzando más aún, para los líquidos y para los gases.

Y para estos sistemas ponderables, y para estas fuerzas de gravitación, la mecánica es hoy una ciencia tan firme, tan exacta y tan matemática, como pudo serlo en su mayor apogeo.

Mientras no estudiemos más que problemas de movimiento ó equilibrio de materia ponderable y de fuerzas medidas por kilogramos, la vieja mecánica será, ó ha sido hasta el momento presente, irreemplazable, así en las regiones de la ciencia pura como en toda la industria humana.

Y la crítica, por mucho que se empeñe, ni conseguirá destruirla, ni tiene á mano una nueva ciencia que la sustituya con ventaja.

¿Es que ante la ciencia absoluta todos los conceptos de la vieja mecánica son pura luz?

Ni los de la mecánica, ni los de ninguna ciencia antigua ni moderna.

En todas hay que contentarse con ciertas aproximaciones: ante la vida, con ciertas utilidades; y ante el pensamiento, con ciertos simbolismos, y casi me atrevería á decir, con ciertas ilusiones, con tal que sean artísticas, que sean estéticas, que sean armónicas y hermosas.

Penetrar en lo absoluto, hasta ahora ha sido empresa imposible.

Nuestra razón es como es: no la forcemos, porque puede hacerse pedazos.

*
* *

Mientras no hubo que considerar más que masas ponderables y acciones entre estas masas, que casi siempre obedecían á la ley newtoniana, fuerza que se representaba por la fórmula

$$f \frac{mm'}{r^2},$$

en la que m y m' representaban dos masas ponderables, que no eran más que la materia ordinaria á que nuestros sentidos estaban acostumbrados, reconcentradas en dos puntos cuya distancia era r; mientras esta fuerza era central, es decir, que actuaba en la línea que unía ambos puntos; mientras se tenía confianza en el principio de la reacción igual y contraria á la acción; y, por último, mientras se suponía que la acción de la masa m sobre la masa m' y recíprocamente era instantánea; en suma, mientras se aceptaban estos principios, ó estas hipótesis, ó estos resultados experimentales, que bajo todos estos conceptos pueden considerarse, la Mecánica clásica tenía plena y absoluta aplicación y daba las leyes de los movimientos y equilibrios de la materia por medio de fórmulas matemáticas. La Mecánica clásica era eminentemente matemática.

Mas aparecieron nuevos fenómenos, distintos de aquellos á que los físicos estaban acostumbrados. En una palabra: aparecieron *los fenómenos eléctricos* y *magnèticos,* y éste era el momento lógico en que la vieja Mecánica debió sufrir su verdadera crisis, que bien podría decirse que ha venido apla-

zándose en toda la segunda mitad del siglo XIX, y que todavía se prolonga en estos últimos años.

Aquel era el momento, repetimos, en que los físicos debieron reconocer, que no se había elaborado la Mecánica de Newton, de Galileo y de sus ilustres sucesores, para uso de la electricidad, del magnetismo y de los nuevos fenómenos de uno y otro orden.

Mas no fué así.

Era tal el prestigio de la Mecánica, dominaba con tal fuerza y con tan indiscutible derecho sobre todos los fenómenos conocidos del mundo inorgánico, que al pronto nadie dudó que su dominio sobre la electricidad y el magnetismo fuera legítimo.

Y por enorme atrevimiento, seguido de atrevimientos aún mayores, quizá inconscientemente, se aplicaron las leyes de la antigua mecánica á las atracciones y repulsiones de los flúidos eléctricos y magnéticos.

Y al principio fueron tales los resultados, que debió creerse que esta aplicación de la Mecánica clásica á los nuevos flúidos era legítima y fecunda.

Díganlo, si no, la ley de Coulomb y las experiencias de Cavendish.

Dos cantidades de electricidad, ó ampliando el sentido de la palabra masa, dos masas eléctricas, por ejemplo e y e', se atraen ó se rechazan según la ley newtoniana

$$\frac{e\,e'}{r^2}.$$

Y estas fuerzas son centrales, van del punto que ocupa e al punto que ocupa e'.

Y son instantáneas, ó parecían serlo, ó por lo que sucede en el mundo de la materia ponderable, se suponía que lo eran en el seno de los fenómenos eléctricos.

Y, por último, se admitía el principio de la reacción igual y contraria á la acción.

Es decir, toda la Mecánica de Newton, con sólo extender el concepto de masa.

Y con una inconsciencia natural, sin esfuerzo alguno, se extendía este concepto.

Porque se pensaba, ó pensaban algunos, que así como hay diferencia de concentración entre las masas sólidas y las masas líquidas, y que dilatándose, por decirlo así la materia, el líquido se convertía en vapor y en gas; se pensaba, repetimos, ó podía pensarse, que los flúidos eléctricos y magnéticos serían algo así como materia aún más difusa, y en todo caso, una nueva especie de flúidos, obedeciendo á los principios de la Mecánica, de la única Mecánica que entonces existía.

Más aún; por la aplicación de esta Mecánica clásica, pudo constituirse sin esfuerzo y sin violencia toda la *Electro-estática,* es decir, todo equilibrio entre masas eléctricas; equilibrio que aún puede hacerse extensivo á las masas magnéticas, aunque estas últimas presenten caracteres especiales.

Y así la Mecánica clásica, al aplicarse á los nuevos fenómenos, afirmaba aún más su poder como instrumento universal, para todos los fenómenos del mundo inorgánico.

En la Mecánica clásica se englobaban, en cierto modo, no sólo las *masas ponderables,* sino las *masas eléctricas.*

Y á decir verdad, la aplicación de la Mecáníca á los fenómenos de la Electro-estática, no daba lugar ni á dificultades ni á conflictos, ni daba ocasión á que se desconfiase de la admirable ciencia, que habían creado grandes astrónomos, grandes físicos y grandes matemáticos.

***

Mientras los flúidos eléctricos y magnéticos (para concretar las ideas fijémonos en los primeros, y porque éste es

también el orden histórico, además de ser el orden lógico); mientras los fenómenos eléctricos, repetimos, fueron fenómenos de equilibrio; mientras sólo se trató de problemas de electro-estática, no hubo motivo para dudar de las virtualidades de la antigua Mecánica.

Pero la electricidad se puso en movimiento y aquí empezaron las dificultades, y los conflictos, y las contradicciones, y en una palabra, la crisis de la Mecánica clásica: al principio de una manera vaga, luego de una manera más concreta, en estos últimos años por negaciones formidables.

Fundadas, no hay para qué negarlo, pero de una exageración que con la injusticia se confunde y á veces la rebasa con brutales desbordamientos.

Es legítimo, que la crítica afirme que la mecánica racional clásica es impotente para resolver los problemas de la electricidad en movimiento, es decir, de la electrodinámica; pero es una injusticia, y aun en estas cuestiones cabe emplear tal palabra, que de esta deficiencia se deduzca su total anulación.

Porque no pueda resolver por completo los problemas de electrodinámica, no se deduce que no resuelva tampoco los problemas de Astronomía, que siempre ha resuelto, ó que no pueda aplicarse á los movimientos de masas ponderables, ni á las infinitas cuestiones que comprende la estática y la dinámica clásicas.

No; la vieja Mecánica no puede aplicarse, por lo menos, sin grandes modificaciones, á todos los problemas de la electricidad y del magnetismo en movimiento; pero no por eso deja de resolver los problemas que ya resolvía.

Bueno será atajar sus ambiciones de dominio universal; pero la crítica falta á su alta misión, negando á la Mecánica racional dominios que en buena ley le pertenecen.

Si se me permite, que faltando, en cierto modo, á la seriedad que toda una clase de Física Matemática trae consigo, recuerde un dicho vulgar y personifique la Mecánica y la

Crítica, pudiera aquélla dirigir contra ésta la protesta ya conocida: «Te hice ciento, te falté en una, como si no te hubiera hecho ninguna.»

Y á pesar de todo y de los ataques combinados á última hora contra la Mecánica, al pronto, quiero decir, al aparecer los primeros problemas de Eloctrodinámica, la desconfianza contra la Mecánica clásica no fué muy grande, no fué ni con mucho lo que hoy es.

Más aún, si bien se considera, en la misma teoría de la luz, no ya en la teoría de la electricidad, se aplicó sin desconfianza, sin recelo, obedeciendo á la tradición, pudiéramos decir, la teoría general de la dinámica, al movimiento vibratorio del éter, en las admirables teorías de Cauchy y de sus discípulos. En Francia, como en Alemania, se aplicaban las ecuaciones generales de la Mecánica, se aplicaban las ecuaciones clásicas

$$\begin{aligned} e\frac{d^2x}{dt_2} &= X, \\ e\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ e\frac{d^2z}{dt^2} &= Z, \end{aligned} \qquad [1]$$

al movimiento de una partícula de éter cuya masa se representaba por e, ni más ni menos que si se tratara del movimiento de una masa material m, para la cual legítimamente pueden emplearse estas tres ecuaciones

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned} \qquad [2]$$

Y como la cosa más natural y más lógica se equiparaba la masa eléctrica *e* á la masa ponderable *m*.

Y esto era gran atrevimiento, era una falta de respeto absoluto á la lógica y al método experimental, porque de las ecuaciones [2] no se deduce, que sean exactas las ecuaciones [1].

Y sin embargo, memorias admirables, libros que hoy son clásicos, maestros que hoy son inmortales en la ciencia, por ejemplo, Cauchy, con una confianza ciega aplicaba la dinámica de las masas ponderables á la dinámica del éter: atrevimiento que me llenaría de asombro, aunque yo fuese el único que se asombrara de tales atrevimientos.

Esto en el fondo es admitir como cierto que una *masa eléctrica e* puede manejarse en dinámica como una *masa ponderable m*.

Y esto sería legítimo, si el éter fuera materia ponderable, porque en este caso, bastaría suponer que *e* era una masa pequeñísima.

Si: siendo *e* de la misma naturaleza que *m*, siendo materia ponderable, tan legítimas son las ecuaciones [1] como las ecuaciones [2].

Pero durante un siglo han estado proclamando los físicos que el éter, que la electricidad, que el magnetismo, son substancias imponderables, que no están sujetas á la gravitación universal, que constituyen en la Naturaleza capítulo aparte, y en tal hipótesis, las ecuaciones [1] carecen de toda legitimidad.

Podrán en todo caso adquirir cierto crédito transitorio, atendiendo á la exactitud experimental de sus aplicaciones, es decir, porque sus resultados se hallen conformes con la experiencia, que es lo que ha sucedido con la teoría de Fresnel, con la teoría de Cauchy y de sus ilustres discípulos, por ejemplo de Briot, en su precioso libro titulado *Ensayos sobre la teoría matemática de la luz*. Libro, que no por ser antiguo, pues tal es hoy la velocidad de la vida, que á la an-

tigüedad pertenece una obra del año 1864, es menos digno de estudio, y que estudiaremos á ser posible, cuando su turno le llegue en estas conferencias enciclopédicas de Física Matemática.

***

Es tan agitada la evolución de la ciencia en estos últimos años, que las negaciones, y las negaciones de estas negaciones, y así sucesivamente, se precipitan en serie interminable.

Cualquier afirmación, aun de las más modernas, corre peligro de convertirse en negación rotunda, con sólo el transcurso de breve espacio de tiempo.

Acabo de decir, por ejemplo, que la electricidad es un flúido imponderable, lo cual hemos estado creyendo como artículo de fe, durante un siglo, y sin embargo, no hace muchos días he leído un artículo de un escritor serio, en que se aventura la hipótesis contraria.

Pero, en fin, como son opiniones aisladas, alrededor de las cuales no se han concrecionado grandes teorías, paso por alto este recuerdo que me asalta, y este pequeño escrúpulo, y continúo considerando á la electricidad y al éter como substancias imponderables; y continúo afirmando, que tomando como tipo las ecuaciones [2] de la dinámica, no pueden plantearse como indiscutibles las ecuaciones del grupo [1].

Y, sin embargo, algo tenemos que decir respecto á la electricidad, aun considerada en las teorías más modernas, en las de los iones y electrones, en las de los rayos catódicos, en la admirable teoría de Lorentz.

La mayor parte de las teorías modernas tienden á substituir al flúido ó á los flúidos eléctricos de las primitivas hipótesis, flúidos que en el pensamiento de sus creadores eran continuos, la hipótesis de la electricidad discontinua ó gra-

nular. Así el electrón negativo es la cantidad mínima de electricidad aislable. Es decir, con más exactitud, *el átomo de electricidad.*

Pero aquí no todos los autores están conformes.

Según unos, el electrón negativo es pura electricidad, el átomo eléctrico en sí.

Según otros, y entre ellos parece que está Lorentz, esta electricidad negativa va unida á la materia. El átomo eléctrico negativo lleva en su centro materia ponderable.

Y el que esto admita podrá triunfalmente decir, que á los fenómenos de la electrodinámica son aplicables las fórmulas del tipo [1]. Es decir, las fórmulas de la Mecánica ordinaria, puesto que la cantidad *e* del primer miembro contiene un núcleo de materia ponderable, una masa ponderable tan pequeña como se quiera, pero que hace legítimas dichas fórmulas [1].

La parte eléctrica que rodease al núcleo sólo serviría para que en ella hiciera presa, si vale la palabra, la tracción ó repulsión eléctrica de cargas exteriores.

Tanto es así, que en muchas experiencias efectuadas para determinar la relación de la *masa ponderable y de la parte eléctrica (m y e)*, de supuestos análogos á estos que acabamos de establecer, se ha partido.

Y, sin embargo, debe reconocerse que tales aplicaciones á la Mecánica clásica no pueden inspirar gran confianza.

Más aún, en buena lógica, debieran rechazarse.

Podrían admitirse si las velocidades de la masa eléctrica *e* fueran las velocidades ordinarias. Entonces las fórmulas [1], como aproximación del fenómeno, serían admisibles.

Pero si las velocidades de las masas eléctricas son comparables á la velocidad de la luz, la legitimidad de las fórmulas [1] desaparece por completo, porque la *dinámica del electrón es distinta y mucho más complicada que la dinámica de las masas ponderables.*

Y baste con esta indicación, que no podemos llevar más

lejos sin engolfarnos en grandes y difíciles teorías á que no podemos llegar en este curso.

Resumiendo, pues, las consideraciones que preceden, casi afirmamos, que por ahora al menos, y por mucho tiempo, y durante muchas generaciones de matemáticos y de físicos, la Mecánica clásica subsistirá para todos los fenómenos de la materia ponderable.

Y no pronunciamos la palabra *siempre*, aunque nos asalte la tentación de pronunciarla, porque es palabra peligrosa y soberbia con exceso en labios humanos.

Más aún, la Mecánica clásica, como toda ciencia humana, no expresa lo absoluto, sino *aproximaciones*, suficientes en cada época para la razón humana: lo repetimos una vez más.

*
* *

Y sin embargo, y á pesar de que en buena lógica la Mecánica de la electricidad y del magnetismo no puede ser la Mecánica clásica en su totalidad, sin modificaciones y transformaciones fundamentales, es tal la fuerza de la costumbre, es tal el empuje de la tradición ó puede tanto el instinto, que sabios de primer orden, que son verdaderas glorias de la ciencia moderna y además de espíritu grandemente severo, aplican las ecuaciones de la Mecánica á las hipótesis modernísimas sobre la electricidad.

Casi toda la Mecánica está condensada, como antes decíamos, en las admirables y ya clásicas ecuaciones de Lagrange.

Varias demostraciones, en el principio de las velocidades virtuales y en las ecuaciones de la Mecánica, se fundan.

Son ecuaciones, repetimos, que en buena lógica sólo podrían aplicarse á fenómenos del movimiento de la materia ponderable.

Y, sin embargo, un sabio de la altura de M. Poincaré,

maestro y creador y crítico en la ciencia matemática y en las que con ella se relacionan, no duda en aplicar en su gran obra sobre electricidad, magnetismo y óptica, con insistencia repetida, las ecuaciones de Lagrange á problemas de electricidad y magnetismo.

Concretemos más: las aplica, por ejemplo, á la teoría de Lorentz.

Y causa sorpresa, no ajena á cierta desconfianza, que esta aplicación de las ecuaciones de Lagrange á una de las hipótesis más atrevidas de la Física moderna, casi pudiéramos decir, á las teorías del creador de los *iones* y *electrones*, conduzca á ecuaciones en armonía y hasta concordantes con las de este sabio eminente.

Y aún se aplican las repetidas ecuaciones de Lagrange, *no para ver lo que resulta,* á modo de método matemático-experimental; no, repetimos, para ver si ecuaciones diferenciales, de la forma de las de Lagrange, pueden aplicarse sin contradición á los fenómenos de la electricidad en movimiento; sino que se aplican como piedra de toque, si vale la palabra, como teoría decisiva y juzgadora de una hipótesis. Y así el eminente matemático que antes citamos, al terminar su admirable análisis, como de él deduce que las ecuaciones obtenidas no satísfacen al principio clásico de la reacción igual y contraria á la acción, da por cierto, sin escrúpulo, que la teoría de Lorentz adolece de este defecto fundamental.

Pero de nuevo debemos detenernos, para no empezar una nueva digresión, que definitivamente nos separaría del programa que hemos anunciado y hemos de cumplir para las conferencias de este nuevo curso.

Nos consuela, sin embargo, pensar que cuanto llevamos expuesto en estas dos primeras conferencias tiende á demostrar la importancia decisiva que alcanza, no sólo para la ciencia clásica, sino para la ciencia moderna, tal como ésta se va desarrollando, el estudio de ciertos problemas de la

Mecánica clásica: concretando más, el estudio de las *ecuaciones generales de Lagrange, y podemos agregar que el de las ecuaciones canónicas de Hamilton.*

Por algo desde el primer curso de esta asignatura nos fijamos en las ecuaciones de Lagrange; y así las expusimos con algún desarrollo y dimos de ellas una demostración rápida y sencilla partiendo de puntos de vista muy fundamentales del mismo Hamilton.

En este sentido casi pudiéramos decir, que volvemos al punto de partida, porque quizás en la conferencia próxima, y si en ésta nos entretuviéramos con nuevas digresiones, en la cuarta conferencia al menos, y de una manera definitiva, á la demostración de las ecuaciones de Lagrange volveríamos.

Todavía, sin embargo, en la tercera conferencia algo tenemos que decir, que no ha tenido cabida en ésta; y como pensaba decirlo y no ha sido posible, aprovecharé la libertad que me concede el carácter propio de este curso y de mis conferencias, para satisfacer ciertas tendencias críticas que no me es dado dominar tan por completo como quisiera.

XIII.—Método para la extracción de raíces de los números sin el auxilio de logaritmos.

Por Vicente Ventosa.

I

Desde la admirable invención de los logaritmos, la resolución práctica de este problema es de una sencillez insuperable, supuesto que sabemos que el procedimiento se reduce á dividir el logaritmo del número dado por el índice de la raíz y hallar después el número correspondiente al logaritmo cociente de esta división. Parece, pues, inútil insistir sobre este punto.

Sin embargo, en multitud de obras que tratan del mismo problema se proponen diversos métodos, más ó menos complicados, para resolverlo directamente y sin valerse de logaritmos (*). No parecerá, por tanto, extraño, y se nos perdonará, que nosotros nos atrevamos á proponer también y explicar otro que, sobre creerlo nuevo, es, á juicio nuestro, prácticamente útil, y que una rara casualidad nos ha sugerido.

El Sr. D. Román Ayza y Maquén, teniente coronel retirado de Estado Mayor y doctor graduado en Ciencias exactas, presentó en el Congreso de Granada, celebrado en 1911 por

---

(*) Citaremos, entre otras, las siguientes:

Encyclopédie des Sciences Mathématiques, tomo I, vol. 4, fasc 2 (edición francesa).

Vorlesungen über numerisches Rechnen, von Dr. J. Lüroth. Leipzig, 1900.

iniciativa de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, un interesante trabajo titulado: *Teoría de los complementos y de las excedencias en aritmética,* en el cual el autor desenvuelve diversos procedimientos ingeniosos para abreviar y simplificar el cálculo en algunas operaciones aritméticas. Pero entre esos procedimientos hallamos uno que nos pareció notabilísimo, pues permite extraer directamente, con sencillez suma, la raíz *emésima* de un número en ciertos casos, ó cuando este número reune condiciones especiales.

Fúndanse las reglas propuestas por el Sr. Ayza en un importante teorema que demuestra rigurosamente para la raíz cúbica, y que por inducción lógica extiende á cualquier valor que tenga el índice de la raíz.

Sabido es que para extraer la raíz de un grado cualquiera de un número entero N, comiénzase por repartir ó dividir éste en períodos de tantas cifras como unidades tenga el índice de la raíz, á partir de la cifra de las unidades, ó sea de derecha á izquierda. Si m es el índice de la raíz y n el número de períodos *completos* de m cifras, podrá suceder que el último período, $n + 1$, de la izquierda sólo contenga r cifras, siendo $r < m$. Entonces, en general, el número N se compondrá de $mn + r$ cifras, y la raíz entera, de $n + 1$ cifras.

El Sr. Ayza ha limitado su investigación á los casos en que sea $r = 1$ ó $r = 0$, y, por consiguiente, que N conste de $mn + 1$ cifras, siendo las $n + 1$ de la izquierda de la forma $10^n + a$, ó bien que N tenga mn cifras, y las n de su izquierda sean de la forma $10^n - a$; pudiendo ser a, en el primer caso, un número menor que $m - 1$, y en el segundo, menor que m. Entonces la *raíz entera,* por exceso ó por defecto, *en menos de una unidad,* podrá expresarse, según el teorema demostrado por Ayza, mediante la fórmula

$$R = \frac{(m-1)\,10^n + V}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

donde V representa las $n+1$ ó n cifras, en cada caso, de la izquierda del número propuesto.

Así, tomando dos ejemplos de la Memoria del Sr. Ayza, obtendremos:

1.° $\sqrt{1.04345.67891} \begin{matrix} > 100 \\ < 101 \end{matrix}$ puesto que $V=2+1$ cifras, siendo $n=2$.

Y, en efecto, $R = \dfrac{4 \times 10^2 + 104,345}{5} = \dfrac{504,345}{5} = 100,869.$

El verdadero valor de la raíz es..... $= 100,854.$

2.° $\sqrt[5]{96346.23456} \begin{matrix} > 99 \\ < 100 \end{matrix}$ puesto que $V = 2$ cifras, siendo $n = 2$.

Efectivamente, $R = \dfrac{4 \times 10^2 + 96,346}{5} = \dfrac{496,346}{5} = 99,269.$

El valor verdadero de la raíz es..... ..... $= 99,258.$

Vese, pues, con creces justificado el método del Sr. Ayza.

Puede darse otra forma á la expresión (A) que nos servirá en lo sucesivo. Si α es una pequeña fracción comprendida entre los límites del teorema, y que, según los casos, sea positiva ó negativa, nos será lícito escribir $V = (1+\alpha)\,10^n$, con lo cual tendremos:

$$R = \frac{(m-1)\,10^n + (1+\alpha)\,10^n}{m} = \frac{(m-1)+(1+\alpha)}{m} \times 10^n =$$

$$= \frac{m+\alpha}{m} \times 10^n = \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) 10^n \quad \ldots \ldots \ldots \text{(B)}$$

Conforme se advierte en los dos ejemplos aducidos, el método del Sr. Ayza, en las condiciones por él consideradas y que acabamos de explicar, supera en sencillez y brevedad al mismo cálculo logarítmico No sucederá lo propio, ó, por lo menos, hasta ahora no se nos alcanza, cuando se quiera resolver el problema con toda generalidad, que es el fin que nos ha movido á emprender esta investigación. Sin embargo, quizá se considere el método que vamos á exponer no del todo descaminado, si bien no exento de imperfecciones, y

más sencillo en la práctica que otros muchos conocidos.

Dos clases de dificultades hay que vencer para conseguir el resultado apetecido. Primera: que las cifras del número N sean, en general, $mn + r$, y no precisamente mn ó $mn + 1$. Segunda: que N tenga un valor cualquiera y no el de ser poco diferente de una potencia de 10, por defecto ó por exceso. Hay, pues, que tratar de reducir el número N á una forma tal que permita aplicarle el método del Sr. Ayza.

Para ello, supongamos que se divide N por otro número A, de igual número de cifras, muy poco diferente de él, por defecto ó por exceso, y cuya estructura sea mucho más sencilla. Entonces podremos establecer la igualdad

$$\sqrt[m]{N} = \sqrt[m]{\frac{N}{A}} \times \sqrt[m]{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

En las condiciones indicadas, la división de N por A dará un cociente $\frac{N}{A} = 1 + \alpha$, siendo α una pequeña fracción positiva ó negativa. Con ésto, según el teorema de Ayza, tendremos:

$$R = \frac{(m-1) + \frac{N}{A}}{m} \sqrt[m]{A} =$$

$$= \frac{m+\alpha}{m} \sqrt[m]{A} = \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) \sqrt[m]{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$

siendo siempre R un valor aproximado de $\sqrt[m]{N}$. La pequeña fracción $\frac{\alpha}{m}$ disminuirá á medida que disminuya α ó que aumente m; y si fuera $\alpha = 0$, evidentemente $A = N$, y el resultado sería entonces exacto. De aquí se desprenden dos consecuencias interesantes: 1.ª, que el método dará resultados tanto más precisos cuanto mayor sea el índice de la raíz, y 2.ª, la conveniencia de hacer que α sea siempre una cantidad muy pequeña.

La experiencia nos ha enseñado que basta elegir para A un número compuesto de *dos cifras significativas* nada más, seguidas de ceros; de esta manera la división de N por A es una operación breve y sencillísima, y $\sqrt[m]{A}$ podrá tabularse sin dar gran extensión á los cuadros numéricos, según vamos á ver.

Dijimos que A es un número que consta, como N, de $mn + r$ cifras. Si llamamos A_1 á uno de los números de dos cifras significativas elegidos (y que por conveniencia para el cálculo supondremos formado por la cifra entera de las unidades seguida de otra cifra decimal), será

$$A = 10^{mn + r - 1} \times A_1,$$

de donde

$$\sqrt[m]{A} = 10^n \times \sqrt[m]{10^{r-1} A_1},$$

con lo que se tendrá:

$$R = \frac{m + \alpha}{m} 10^n \sqrt[m]{10^{r-1} A_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

En las tablas 2.ª y 3.ª adjuntas tómanse como argumentos los valores de A_1 comprendidos entre los límites 1,1 y 9,7; muy poco espaciados unos de otros al principio y mucho más al fin. De resultas de repetidos ensayos realizados, los valores de A_1 varían en las tablas de 0,1 en 0,1 desde 1,1 hasta 3,0; de 0,2 en 0,2 entre 3,0 y 7,0; y de 0,3 en 0,3 desde 7,0 á 9,7. Por excepción y conveniencia se ha agregado el argumento 1,05, primero de la serie, constando ésta, en totalidad, de 50 argumentos, ordenadamente colocados en la primera columna.

Frente á los argumentos, en las restantes columnas, se hallan las raíces cuadrada, cúbica, cuarta, quinta, sexta, séptima y undécima de cada uno de ellos con siete cifras decimales. Conviene advertir que, para no dar extensión

desmesurada á las tablas, cuyo empleo entonces dejaría de ser ventajoso, se ha descompuesto

$$\sqrt[m]{10^{r-1} A_1} = \sqrt[m]{10^{r-1}} \times \sqrt[m]{A_1}$$

en dos tablas, la 3.ª y la 4.ª, que han de usarse combinadamente, según sean los valores de A_1 y de r, mediante una doble multiplicación, que puede efectuarse por el método abreviado, despreciando así muchas cifras de orden inferior que no llegarán á influir en los resultados, dentro del grado de aproximación que nos sea factible obtener. Mas para las raíces cuadrada y cúbica, las más usuales, como los períodos constan á lo sumo de dos ó tres cifras, respectivamente, se ha preferido incluir en una tabla única, la 2.ª, los valores de

$$\sqrt{A_1} \text{ y } \sqrt{10 A_1},$$

en el primer caso, y de

$$\sqrt[3]{A_1} \quad \sqrt[3]{10 A_1} \text{ y } \sqrt[3]{10^2 A_1}$$

en el segundo, con lo cual bastará efectuar solamente una multiplicación. Dada la estructura de estas tablas, claro es que hay que tomar los números tabulados frente á los argumentos correspondientes sin efectuar interpolación alguna.

En rigor, las tablas deberían contener únicamente las raíces cuyo índice m fuera un número primo, pues las raíces de índice compuesto, $m = pq$, por ejemplo, siendo p y q números primos, podrían hallarse mediante dos operaciones consecutivas, recordando que,

$$\sqrt[pq]{N} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{N}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{N}}.$$

No obstante, hemos agregado los valores de las raíces

para $m = 2$, $= 3$, $= 4$, $= 5$, $= 6$, $= 7$, $= 11$, como de índice más bajo: los correspondientes á $m = 8 = 2 \times 4$, $m = 9 = 3 \times 3$, $m = 10 = 2 \times 5$, intermedios entre 7 y 11, exigirán dos operaciones, aunque poco habría costado agregarlas directamente, sin aumentar más que *dos páginas* á las tablas, que en la forma actual ocuparán sólo *cinco* en el tamaño 4.° español ó el común de las tablas de logaritmos.

Las raíces de los números auxiliares A_1 van expresadas —conforme antes dijimos—con siete cifras decimales, suficientes para hallar cada raíz de N con igual ó mayor aproximación que la que dan los logaritmos de siete cifras; habiéndonos parecido inútil calcular las raíces de orden superior al 11.°, menos frecuentes en la práctica, salvo casos especiales. Una cualidad característica y apreciable de nuestro método es que el cálculo *da de una vez todas las cifras de la raíz*, y no por tanteos, una por una, como en la mayor parte de los métodos conocidos. Como quiera que sea, este modesto trabajo no tiene otras pretensiones que la de ser un simple ensayo, susceptible, sin duda, de ser perfeccionado por otras más hábiles manos.

La expresión (D) de la página 295

$$R = \frac{m + \alpha}{m} \sqrt[m]{A}$$

no tiene en cuenta el error que se comete al calcular por ella el valor de la raíz, y sería ventajoso tomarlo en consideración para aumentar la precisión del resultado, si, como sucede felizmente, puede realizarse sin pérdida de tiempo apreciable.

Si á R, que es un primer valor aproximado de la raíz, le agregamos la corrección ε necesaria para obtener el valor exacto de aquélla, podremos escribir:

$$\sqrt[m]{N} = \frac{m + \alpha}{m} \sqrt[m]{A} + \varepsilon \; ;$$

pero, como se verá más adelante al tratar especialmente de este punto, la corrección ε es siempre sustractiva y de la forma

$$\varepsilon = -M\sqrt[m]{A}$$

de manera que se tendrá

$$\sqrt[m]{N} = \left(\frac{m+\alpha}{m} - M\right)\sqrt[m]{A} \quad \ldots \ldots \quad (F)$$

M es la suma de una serie, función de α y m, y cuyo valor, siempre muy pequeño, puede tabularse para cada valor del índice m, tomando como argumento el binomio $1 + \alpha$ entre convenientes límites. La tabla 1.ª contiene los valores de M. En esta forma el cálculo de la raíz se reduce á lo siguiente: comiénzase por efectuar la división de $\frac{N}{A} = 1 + \alpha$; con este argumento se interpola en dicha tabla, de simple entrada, y considerando nulas las segundas diferencias, el valor correspondiente de M. Después, con arreglo á la fórmula (F), se resta M del quebrado $\frac{m+\alpha}{m}$, y el resto se multiplica por $\sqrt[m]{A}$, efectuando la multiplicación por el método abreviado, y teniendo en cuenta que

$$\sqrt[m]{A} = 10^n \sqrt[m]{10^{r-1} A_1}$$

con el fin de poder utilizar la tabla 2.ª en las raíces cuadrada y cúbica, ó las 3.ª y 4.ª en las raíces superiores. Para mayor claridad, representaremos el orden de las operaciones que hay que efectuar por medio de la siguiente expresión esquemática:

$$\sqrt[m]{N} = \left(\frac{(m-1) + \frac{N}{A}}{m} - M\right) \times 10^n \sqrt[m]{10^{r-1} A_1} \quad \ldots \ldots \quad (G)$$

En todo número dado, N, podemos efectuar la división $\frac{N}{A}$ por cualquiera de los números auxiliares consecutivos A' y A'' entre los cuales esté comprendido N.

Si

$$A' < N, \ \frac{N}{A'} = 1 + \alpha' > 1 \text{ y } \alpha' > 0;$$

si

$$A'' > N, \ \frac{N}{A''} = 1 + \alpha'' < 1 \text{ y } \alpha'' < 0.$$

La elección es arbitraria, pero no del todo indiferente, porque siempre convendrá tomar el número A que más se aproxime á N por exceso ó por defecto, con el fin de que la fracción α sea lo más pequeña posible. Los ejemplos numéricos que exponemos á continuación harán comprender mejor cuanto acabamos de decir, y proporcionarán una idea de los resultados que por este método se consiguen (*).

II

Ejemplo 1.° Hallar

$$\sqrt[3]{624867943} = \sqrt[3]{N}.$$

Resolveremos este ejemplo simultáneamente por duplicado, tomando los números consecutivos inmediatos á N, uno

(*) No hemos considerado el caso en que fuera $N < 1$ ó un quebrado propio; entonces bastaría realizar las operaciones con un número N' tal que estuviese ligado al propuesto por una expresión de la forma $N' = 10^{mt} N$ donde t es un factor entero que se elegirá convenientemente para que N' se adapte á las tablas calculadas. Hecho esto, la raíz *emésima* de N será:

$$\sqrt[m]{N} = \frac{\sqrt[m]{N'}}{10^t}$$

menor y otro mayor que él, los cuales corresponderán á $A'_1 = 6,2$ y $A''_1 = 6,4$. Además tenemos: índice $m = 3$; número de grupos, exceptuando el de la izquierda, $n = 2$; número de cifras de éste, $r = 3$. Haciendo las operaciones por duplicado podremos confrontar los dos resultados obtenidos.

Tomemos, pues,

$$A'_1 = 6,2 \qquad\qquad A''_1 = 6,4$$

y será

$$\frac{624867943}{6200000000} = 1,007.85152 = 1 + \alpha' \quad \Big| \quad \frac{624867943}{640000000} = 0,976.35616 = 1 + \alpha''$$

Ahora la tabla 1.ª nos dará:

Para ..... 1,057.0000 ... $M' = 0,00000542$	Para ..... 0,976.000 ... $M' = 0,00006486$
» ..... 1,008.0000 ... $M'' = 0,00000708$	» ..... 0,977.000 .. $M'' = 0,00005953$
» ..... 1,007.8515 ... $M = 0,00000686$	» ..... 0,976.356 ... $M = 0,00006296$

Por otra parte tendremos:

$\frac{m+\alpha'}{m} = \frac{3,00785152}{3} = 1,00261717$	$\frac{m+\alpha''}{m} = \frac{2,97635616}{3} = 0,99211872$
$-M = -686$	$-M = -6296$
Valor corregido de.... $\frac{m+\alpha'}{m} = 1,00261031$	Valor corregido de.... $\frac{m+\alpha''}{m} = 0,99205576$

Como aquí tenemos

$$A = 10^2 \sqrt[3]{10^2 A_1}, \text{ (fórmula G)},$$

habrá que multiplicar los números últimamente obtenidos por los factores respectivos tomados en la tabla 2.ª,

$$10^2 \sqrt[3]{10^2 \times 6,2} \quad \text{y} \quad 10^2 \sqrt[3]{10^2 \times 6,4},$$

es decir,

0^2	$\sqrt[3]{620} =$	852,70189	10^2	$\sqrt[3]{640} =$	861,77388
	$\times \quad =$	1,00261031		$\times \quad =$	0,99205576
	$\sqrt[3]{N} =$	854,92771		$\sqrt[3]{N} =$	854,92774

Como se ve, los dos valores de la raíz sólo discrepan entre sí en 3 unidades del último orden. El que se halla con las mejores tablas de logaritmos de 7 cifras es 854,9277, sin pasar de aquí. Por otros procedimientos más complicados se obtiene el valor más preciso, 854,92775195 (*).

Ejemplo 2.° Hallar

$$\sqrt[7]{23456789000} = \sqrt[7]{N},$$

que resolveremos también por duplicado.

Aquí tenemos: $m = 7$, $n = 1$, $r = 4$. La fórmula (G) es en este caso

---

(*) Uno de los procedimientos aludidos en el texto, y que hemos ensayado, consiste en corregir el valor aproximado 854,9277 mediante la fórmula, aplicada á este caso y con nuestra notación,

$$\sqrt[3]{N} = R + \frac{N - R^3}{3R^2}$$

que se encuentra en la citada *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. I, vol. 4, fasc. 2, pág. 283 (edición francesa), y que da para la corrección de aquel valor + 0,00005195. Otro procedimiento, que conduce exactamente á los mismos resultados numéricos que el anterior, está basado en el conocido método que publicó el inglés *R. Flower* en 1771 para hallar con muchas cifras el logaritmo de un número y viceversa. Por este método con N puede hallarse log N; luego $\frac{\log N}{m} = \log \sqrt[m]{N}$, y, por último, con log $\sqrt[m]{N}$ el número $\sqrt[m]{N}$ que se busca. Ambos procedimientos son muy exactos, pero demandan mucho tiempo, y especialmente el de la corrección que recomienda la *Encyclopédie* resulta interminable para las raíces de orden superior al tercero.

$$\sqrt[7]{N} = \left(\frac{7+\alpha}{7} - M\right) \times 10 \sqrt[7]{10^3} \times \sqrt[7]{A_1}$$

Tomemos, pues,

$$A'_1 = 2{,}3 \qquad\qquad A''_1 = 2{,}4$$

y efectuando las operaciones por el mismo orden que en el ejemplo precedente, será:

$$1+\alpha' = \frac{23456789000}{23000000000} = 1{,}01986039 \quad \Big| \quad 1+\alpha'' = \frac{23456789000}{24000000000} = 0{,}97736621$$

y acudiendo á la tabla 1.ª tendremos:

Para 1,019.00 ... M' = 0,00002184	Para 0,977000 ... M' = 0,00003285
» 1,020.00 ... M'' = 0,00002419	» 0,978000 .. M'' = 0,00003004
« 1,019.86 ... M = 0,00002386	» 0,977366 ... M = 0,00003182

Ahora tenemos:

$\frac{m+\alpha'}{m} = \frac{7{,}01986039}{7} = 1{,}00283720$	$\frac{m+\alpha''}{m} = \frac{6{,}97736621}{7} = 0{,}99676660$
$-M = -2386$	$-M = -3182$
Valor corregido de ... $\frac{m+\alpha'}{m} = 1{,}00281334$	Valor corregido de .. $\frac{m+\alpha''}{m} = 0{,}99673478$
Multiplicado por $\sqrt[7]{2{,}3} = 1{,}1263553$	Multiplicado por .. $\sqrt[7]{2{,}4} = 1{,}1332243$ (Tab. 3.ª)
y por ..... $10\sqrt[7]{10^3} = 26{,}826958$	y por .... $10\sqrt[7]{10^3} = 26.826958$ (Tab. 4.ª)
resulta ..... $\sqrt[7]{N} = 30{,}3016961$	resulta ..... $\sqrt[7]{N} = 30{,}3016948$

Aquí el cálculo resulta algo más complicado que en el primer ejemplo, por tener que efectuar doble multiplicación.

Con las tablas de logaritmos de Schrön, de 7 decimales, empleadas con todas las precauciones que allí se recomiendan, se halla $\sqrt[7]{N} = 30{,}30169$, siendo ya dudosa la siguien-

te cifra. Por un método deducido de las tablas de Callet se obtiene el valor más preciso 30,3016957, casi igual é intermedio entre los dos hallados por nuestro método.

Ejemplo 3.º Sea

$$\sqrt{N} = \sqrt{48241206}$$

donde son $m=2$, $n=3$, $r=2$; luego, según la fórmula (G), tendríamos

$$\sqrt{N} = \left(\frac{2+\alpha}{2} - M\right) \times 10^3 \times \sqrt{10\,A_1},$$

de manera que la raíz constará de 4 cifras enteras. Tomando $A_1 = 4{,}8$, y haciendo las operaciones por el orden explicado en los dos ejemplos precedentes, se obtiene:

$$\sqrt{N} = 6945.58889.$$

Por el método ordinario ó directo se halla

$$\sqrt{N} = 6945{,}58896.$$

Por el método de Flower

$$\sqrt{N} = 6945{,}58896.$$

Por las tablas de Schrön de 7 decimales

$$\sqrt{N} = 6945{,}5887,$$

y nada más.

El valor proporcionado por nuestro método difiere solamente en 7 unidades de la 9.ª cifra *exacta* de la raíz, dada por el méfodo directo y el de Flower, y sostiene ventajosamente la comparación, como sucede en la gran mayoría de

los casos, con los resultados del método logarítmico, cuando las tablas no contienen más que 7 cifras decimales.

En cuanto al tiempo que exige el método que proponemos, sólo puede ser desventajoso frente al método explicado en los tratados de aritmética para la extracción de la raíz cuadrada; para la raíz cúbica, el método ordinario conduce ya á operaciones complicadas, y resulta impracticable para las raíces de orden superior. De aquí proceden los esfuerzos de los matemáticos desde tiempos antiguos (cuya reseña histórica está condensada en la reciente *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*), encaminados á rastrear métodos que conduzcan con más brevedad á la extracción de las raíces de los números, y entre los cuales merece citarse el que consiste en obtener por medio de una simple división las cifras restantes de la raíz, una vez que sean conocidas las primeras. Este método se funda en la fórmula

$$\sqrt[m]{N} = R + \frac{N - R^m}{mR^{m-1}},$$

que ya, aplicada á un caso particular, expusimos en la página 302 de esta Memoria; pero, además de la creciente complicación que su cálculo ofrece á medida que aumenta el valor del índice m, siempre se tropezará con la dificultad de hallar fácilmente dichas primeras cifras sin acudir á las tablas de logaritmos. A salvarla tiende, en lo posible, nuestro método.

Ejemplo 4.° Hallar

$$\sqrt[6]{N} = \sqrt[6]{2356479865 \times 10^6}$$

Este ejemplo puede resolverse de dos maneras: ó bien por una sola operación, tomando en nuestras tablas los datos correspondientes al índice $m = 6$, ó bien descomponiendo éste en sus factores primos 2 y 3, acudiendo entonces suce-

sivamente á los datos de las tablas referentes á las raíces cuadrada y cúbica en el orden que se quiera.

1.° Hallar la raíz 6.ª de una vez. Entonces tendremos $m = 6$, $n = 2$, $r = 4$; y será:

$$\sqrt[6]{A} = 10^2 \sqrt[6]{10^3 A_1} = 10^2 \sqrt[6]{10^3} \times \sqrt[6]{A_1}$$

Tomando $A_1 = 2{,}3$, será:

$$\sqrt[6]{A} = 10^2 \sqrt[6]{10^3} \times \sqrt[6]{2{,}3}$$

y, por tanto:

$$\frac{2356479865}{2300000000} = 1{,}02455646 = 1 + \alpha$$

$$\text{Para } m = 6 \text{ (tabla 1.ª)} \left\{ \begin{array}{l} \text{y } 1{,}024000 \ldots M' = 0{,}00003941 \\ 1{,}025000 \ldots M'' = 0{,}00004274 \\ 1{,}024556 \ldots M = 0{,}00004126 \end{array} \right.$$

Después:

$$\frac{6{,}02455646}{6} = 1{,}00409274$$

$$-M = -0{,}00004126$$

$$1{,}00405148$$

$$\sqrt[6]{2{,}3} = 1{,}1489152 \text{ (tabla 3.ª)}$$

$$\times \sqrt[6]{10^3} = 3{,}1622777 \text{ (tabla 4.ª)}$$

$$\text{Producto} \ldots = 3{,}6331889$$

$$1{,}00405148$$

$$\times\ 363{,}31889 \ldots = 10^2 \sqrt[6]{10^3 \times 2.3}$$

$$\text{Producto} = 364{,}79087 \ldots = \sqrt[6]{N}$$

Las tablas de logaritmos de 7 cifras decimales dan 364,7909.

2.° Hallar la raíz 6.ª en dos operaciones. Haciendo

$$\sqrt[6]{N} = \sqrt{\sqrt[3]{N}},$$

extraigamos primeramente la raíz cúbica.

Será, como antes,

$$1 + \alpha = 1{,}02455646 \quad \text{y} \quad m = 3,\ n = 5,\ r = 1.$$

$$\text{Para } m = 3 \begin{cases} \text{y } 1{,}024000 \ldots M' = 0{,}00006315 \\ 1\,025000 \ldots M'' = 0{,}00006849 \\ 1{,}024556 \ldots M = 0{,}00006612 \end{cases}$$

$$\frac{3{,}02455646}{3} = 1{,}00818549$$

$$-M = -\underline{0{,}00006612}$$

$$1{,}00811937$$

$$\times \ldots \underline{132000{,}61} = 10^5 \sqrt[3]{2{,}3} \qquad \text{(Tabla 2.ª)}$$

$$\text{Producto.} = 133072{,}372 = \sqrt[3]{N}$$

El valor más preciso de esta raíz es.... 133072,377

Ahora es necesario hallar

$$\sqrt{133072{,}372},$$

donde

$$m = 2,\ n = 2,\ r = 2 \quad \text{y} \quad \sqrt{A} = 10^2 \sqrt{10\,A_1}.$$

Tomando $A_1 = 1{,}3$ será:

$$\frac{133072372}{130000000} = 1{,}02363363.$$

$$\text{Para } m = 2 \begin{cases} \text{y } 1{,}023000 \ldots M' = 0{,}00006537 \\ 1{,}024000 \ldots M'' = 0{,}00007114 \\ 1{,}023633 \ldots M = 0{,}00006902 \end{cases}$$

y con esta preparación tendremos:

$$\frac{2{,}02363363}{2} = 1{,}01181681$$

$$-M = -\ \underline{0{,}00006902}$$

$$1{,}01174779$$

$$\times\ \underline{360{,}55513} = 10^2 \sqrt{10 \times 1{,}3}$$

$\sqrt[6]{N}$ = Producto = 364,79086 que apenas discrepa del valor obtenido primeramente.

El valor más exacto es.. 364,790863.

Terminaremos esta parte de nuestro trabajo resolviendo algunos ejemplos del interesante libro, varias veces citado, de M. Lüroth, *Vorlesungen*, etc.

1.º Sea

$$\sqrt{N} = \sqrt{100378925}$$

El autor emplea, modificado por él, el método propuesto por Fourier para evitar las divisiones por números, cada vez crecientes, á medida que se avanza en el cálculo, y que exige el método ordinario para la extracción de raíces. Así y todo, como puede verse en las páginas 145 y siguientes el cálculo resulta todavía, por dicho método, bastante complicado. El ejemplo que hemos extractado es de los que pueden resolverse con sencillez suma, pues entra en el caso de los resueltos por el Sr. Ayza, aplicando además á la fracción $\frac{2+\alpha}{2}$ la corrección M. Será, pues:

$$m = 2,\ n = 4,\ r = 1$$

luego

$$\sqrt{A} = 10^4 \sqrt{A_1} \quad \text{según la fórmula (G)}$$

$$1{,}00378925 = 1 + \alpha$$

$$\text{Para...} \begin{cases} 1{,}003000 \ldots M' = 0{,}00000113 \\ 1{,}004000 \ldots M'' = 0{,}00000200 \\ 1{,}003789 \ldots M = 0{,}00000181 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2{,}00378925}{2} = \quad 1{,}00189462 \\ -M = -\ 0{,}00000181 \\ \hline 1{,}00189281 \end{array} = \frac{2+\alpha}{2} - M.$$

Multiplicando la expresión $\frac{2+\alpha}{2} - M$ por 10^4 resulta:

$$\sqrt{N} = 10018{,}9281.$$

El valor más aproximado es 10018,9283, que obtiene M. Lüroth con más trabajo.

2.º ejemplo. Hallar

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{7999}.$$

Aquí el autor hace uso del método de M. Darboux, en cuya descripción no podemos detenernos, pero que, á pesar de sus ventajas sobre el método ordinario, es todavía bastante laborioso, tanto que M. Lüroth se contenta con indicar las tres primeras cifras de la raíz, 19,9, sin continuar la operación.

En este ejemplo tenemos $m = 3$, $n = 1$, $r = 1$, de manera que

$$\sqrt[3]{A} = 10\sqrt[3]{A_1}$$

Los números de la tabla 2.ª más aproximados á 7999 son 7900 y 8200, ó lo que es igual, $10^3 \times 7{,}9$ y $10^3 \times 8{,}2$; de suerte que parece lo natural que tomáramos $A_1 = 7{,}9$ como más cercano al número propuesto (dividido por 10^3). Pero en esta ocasión se nos presenta un medio más sencillo para resolver el problema, que es tomar $A_1 = 8{,}0$, que no figura en la lista de argumentos de la tabla 2.ª, pero que tiene la raíz cúbica conmensurable igual á 2; circunstancia preciosa para la multiplicación que hay que efectuar. Procediendo así, tendremos:

$$\frac{7999}{8000} = 0{,}999875 \qquad \text{Para...} \left\{ \begin{array}{ll} 0{,}999000 \ldots M' & = 0{,}000000110 \\ 1{,}000000 \ldots M'' & = 0{,}000000000 \\ 0{,}999875 \ldots M & = 0{,}000000014 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2{,}999875}{3} & = & 0{,}999958333 \\ -M & = & -\,0{,}000000014 \\ \hline & & 0{,}999958319 \\ \times 2 \times 10 & = & 19{,}99916638 \;=\; \sqrt[3]{N} \end{array}$$

Por el método más preciso de Flower, se tiene

$$= 19{,}99916663;$$

es decir, que las ocho primeras cifras son exactas.

3.° ejemplo, de M. Lüroth:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{4410944}.$$

Este ejemplo está escogido de antemano, porque el número propuesto es el cubo exacto de 164.

El autor, empleando el método de aproximaciones sucesivas, de M. Darboux, como antes, halla una á una, por tanteos, las tres cifras de la raíz mediante un cálculo bastante laborioso, y, á juicio nuestro, expuesto á equivocaciones. Apliquemos ahora á este caso nuestro procedimiento.

Aquí tenemos $m = 3$, $n = 2$, $r = 1$, y de consiguiente

$$\sqrt[3]{A} = 10^2 \sqrt[3]{A_1}$$

Tomaremos $A_1 = 4{,}4$, y será sucesivamente:

$$\frac{4410944}{4400000} = 1{,}0024872727 \ldots = 1 + \alpha$$

$$\text{Para } m = 3 \ldots \left\{ \begin{array}{lll} \text{y } 1{,}002000 \ldots & M' & 0{,}00000044 \\ 1{,}003000 \ldots & M'' & 0{,}00000100 \\ 1{,}002487 \ldots & M & 0{,}00000071 \end{array} \right.$$

$$\frac{3{,}0024872727}{3} = 1{,}00082909 \qquad 10^2 \sqrt[3]{4{,}4} = 163{,}86426$$

$$-M = -0{,}00000071$$

$$1{,}00082838 \times 163{,}86426 = 164{,}0000018 = \sqrt[3]{N}.$$

Obsérvese que, en general, se obtienen exactas las *ocho* primeras cifras de la raíz por nuestro metodo.

Nada dice Lüroth de las raíces de orden superior al 3.°

III

Antes de terminar esta Memoria vamos á ocuparnos en la deducción de la fórmula de la corrección ε que hay que aplicar al cálculo para obtener con la aproximación posible la raíz. En la página 298 planteamos la siguiente expresión exacta:

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)\sqrt[m]{A}+\varepsilon=\sqrt[m]{N}\ldots. \qquad [1]$$

Como precisamente $\sqrt[m]{N}$ es la raíz *desconocida* que tratamos de determinar, elevaremos la expresión [1] á la potencia m, y será, dando al radical la forma exponencial para más comodidad en la escritura:

$$\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)A^{\frac{1}{m}}+\varepsilon\right]^m=N\ldots \qquad [2]$$

En esta fórmula ya no queda otra incógnita que ε. Desarrollando el primer miembro por la fórmula del binomio, y considerando α y ε como pequeñas cantidades de primer orden, si nos detenemos en los términos de cuarto orden en α, y de segundo orden en ε, resultará primeramente:

$$=\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m A+m\varepsilon\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}A^{\frac{m-1}{m}}+\frac{m(m-1)}{2}\varepsilon^2\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-2}A^{\frac{m-2}{m}}+\ldots;$$

de donde, si se despeja el valor lineal de ε, obtendremos:

$$=\frac{N-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m A}{m\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}A^{\frac{m-1}{m}}}-\frac{\frac{m(m-1)}{2}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-2}A^{\frac{m-2}{m}}}{m\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}A^{\frac{m-1}{m}}}\varepsilon^2\ldots.. \qquad [3]$$

Conviene dejar para más adelante la consideración del término en ε^2 y desarrollar ante todo las potencias indicadas en los binomios del primer término, tanto en el numerador

como en el denominador, y será, dentro de los límites que nos hemos impuesto:

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m = 1 + m\frac{\alpha}{m} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}\frac{\alpha^2}{m^2} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}\frac{\alpha^3}{m^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{\underline{|4}}\frac{\alpha^4}{m^4} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \alpha + \frac{m-1}{\underline{|2}\,m}\alpha^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{\underline{|3}\,m^2}\alpha^3 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{\underline{|4}\,m^3}\alpha^4 + \ldots.$$

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1} = 1 + (m-1)\frac{\alpha}{m} + \frac{(m-1)(m-2)}{\underline{|2}}\frac{\alpha^2}{m^2} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{m-1}{m}\alpha + \frac{(m-1)(m-2)}{\underline{|2}\,m^2}\alpha^2 + \ldots\ldots$$

Este segundo desarrollo, que corresponde al denominador de [3], no hace falta prolongarlo más allá de los términos de segundo orden, porque los de tercero solamente podrían dar origen á otros de quinto, que no nos proponemos calcular. Así, pues, la expresión [3], dejando aparte el término en ε^2, tomará la forma

$$\varepsilon = \frac{N - (1+\alpha)A - \frac{m-1}{2m}\alpha^2 A - \frac{(m-1)(m-2)}{6m^2}\alpha^3 A - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{24m^3}\alpha^4 A \ldots}{m\left\{1 + \frac{m-1}{m}\alpha + \frac{(m-1)(m-2)}{2m^2}\alpha^2\right\} A^{\frac{m-1}{m}}}$$

Obsérvese que por ser $\frac{N}{A} = 1 + \alpha$ desaparecen los dos primeros términos del numerador, de manera que la corrección ε sólo depende de los términos de segundo orden y superiores en α, y es, además, como anteriormente indicamos, siempre negativa, con lo que resulta al cabo:

$$\varepsilon = -\frac{\left\{\frac{m-1}{2m}\alpha^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{6m^2}\alpha^3 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{24m^3}\alpha^4\right\} A^{\frac{1}{m}}}{m\left\{1 + \frac{m-1}{m}\alpha + \frac{(m-1)(m-2)}{2m^2}\alpha^2\right\}} \ldots\ldots [4]$$

Al efectuar ahora la división del numerador por el denominador, si se tiene en cuenta la forma de los coeficientes de α y de sus potencias sucesivas en ambos términos del quebrado, podemos por brevedad escribir

$$P = \frac{m-1}{m}; \; Q = \frac{(m-1)(m-2)}{2m^2}; \; S = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6m^3}$$

y la expresión [4] será de este modo:

$$\varepsilon = -\frac{\left\{ \frac{P}{2}\alpha^2 + \frac{Q}{3}\alpha^3 + \frac{S}{4}\alpha^4 \right\} A^{\frac{1}{m}}}{m\left\{1 + P\alpha + Q\alpha^2\right\}},$$

la cual, después de realizada dicha división de los dos polinomios, se convierte en

$$\varepsilon = -\frac{1}{m}\left\{ \frac{P}{2}\alpha^2 - \left(\frac{P^2}{2} - \frac{Q}{3}\right)\alpha^3 + \left(\frac{P^3}{2} - \frac{5PQ}{6} + \frac{S}{4}\right)\alpha^4 \right\} A^{\frac{1}{m}}$$

Sustituyendo ahora los valores de P, Q y S, después de varias fáciles transformaciones, se llega á la siguiente expresión:

$$\varepsilon = -\left\{ \frac{m-1}{2m^2}\alpha^2 - \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^3}\alpha^3 + \frac{(m^2-1)(3m-2)}{24m^4}\alpha^4 \right\} A^{\frac{1}{m}} \quad \ldots \quad [5]$$

Esta expresión no es completa, porque el término en ε^2 de de la fórmula [3] debe dar, por lo menos, otro término en α^4, que habrá que sumarle con el de la [5]. Llamando B al término en ε^2, será:

$$B = -\frac{\frac{m(m-1)}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{m-2} A^{\frac{m-2}{m}}}{m\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^{m-1} A^{\frac{m-1}{m}}}\varepsilon^2 = \frac{-(m-1)}{2\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) A^{\frac{1}{m}}}\varepsilon^2$$

Aquí podrá sustituirse el valor ε^2 elevando al cuadrado el primer término de la fórmula [5], pues los restantes darán

términos en α^5, α^6, etc.; de consiguiente

$$\varepsilon^2 = \frac{(m-1)^2 \alpha^4}{4m^4} A^{\frac{2}{m}}$$

y por tanto

$$B = -\frac{(m-1)(m-1)^2 \alpha^4 A^{\frac{2}{m}}}{8m^4\left(1+\frac{\alpha}{m}\right) A^{\frac{1}{m}}} = -\frac{(m-1)^3 \alpha^4 A^{\frac{1}{m}}}{8m^4\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)} = -\frac{(m-1)^5 \alpha^4 A^{\frac{1}{m}}}{8m^4}$$

próximamente, despreciando el factor $\frac{\alpha}{m}$ del denominador, que sólo podría producir pequeños términos en α^5, α^6, etc.

El término completo de cuarto orden de la expresión que da ε, será, en consecuencia,

$$\frac{(m^2-1)(3m-2)-3(m-1)^3}{24m^4} \alpha^4 A^{\frac{1}{m}} = \frac{(m-1)(7m-5)}{24m^4} \alpha^4 A^{\frac{1}{m}}$$

y por fin tendremos

$$\varepsilon = -\left\{ \frac{m-1}{2m^2} \alpha^2 - \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^3} \alpha^3 + \frac{(m-1)(7m-5)}{24m^4} \alpha^4 \right\} A^{\frac{1}{m}} \quad \ldots\ldots \quad [6]$$

En esta fórmula, el término en α^3 afecta diferente signo que los otros dos cuando $\alpha > 0$, y el mismo signo cuando $\alpha < 0$; pero el signo de ε depende del que tiene el término en α^2, y, por consiguiente, ε es siempre negativo, como ya advertimos. Llamando

$$M = \frac{m-1}{2m^2} \alpha^2 - \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^3} \alpha^3 + \frac{(m-1)(7m-5)}{24m^4} \alpha^4 \ldots\ldots \quad [7]$$

los valores de esta serie han sido calculados numéricamente para los diferentes valores de α y m, y escritos en la Tabla 1.ª Con lo cual se puede aplicar la corrección al primer valor de la raíz mediante la fórmula

$$\sqrt[m]{N} = \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) - M \right\} \sqrt[m]{A},$$

de que nos hemos valido en la resolución de los precedentes ejemplos.

El cálculo de la serie [7] se ha podido efectuar con suma facilidad. Hemos comenzado por tomar como límites de α en la Tabla 1.ª $\alpha = \pm 0{,}048$, ó lo que es igual, entre $1 + \alpha = 0{,}952$ y $1 + \alpha = 1{,}048$. Después ha sido calculada directamente la tercera parte de los términos de la serie, con ocho cifras decimales, es decir, 0,952, 0,955, 0,958, etc., y de manera que la última cifra decimal sólo pudiera ser errónea en media unidad á lo sumo. Hecho esto, la interpolación de los dos términos intermedios era muy sencilla, porque si designamos por $\triangle_1$ y $\triangle_2$, respectivamente, las primeras y segundas diferencias de la serie formada por los términos directamente calculados, las mismas diferencias en la serie completa habían de ser $\frac{\triangle_1}{3}$ y $\frac{\triangle_2}{9}$, tomando las segundas, para interpolar, con signo contrario. En la interpolación se emplearon, como en el cálculo directo, *nueve* cifras decimales, para asegurar la exactitud de la 8.ª

Las segundas diferencias de la serie completa puede decirse que son constantes, y, por tanto, sensiblemente nulas las terceras diferencias, como lo prueba el estado adjunto que contiene los valores extremos de aquéllas, ó los correspondientes al principio y al fin de la serie. Van expresadas en unidades de la cifra 8.ª decimal y fracción de la misma.

Segundas diferencias de M.

$1 + \alpha$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 11$
0,952	+ 26,7	+ 23,9	+ 20,2	+ 17,3	+ 15,1	+ 13,5	+ 9,0
1,048	+ 23,2	+ 20,6	+ 17,2	+ 14,6	+ 12,6	+ 11,1	+ 7,6

Según se ve en este cuadro, las mayores diferencias se-

gundas son las correspondientes al índice $m = 2$, y van decreciendo á medida que el índice aumenta. Adviértese, además, cuán poco varían uno de otro los valores extremos en cada columna; de manera que, siendo 50 los argumentos verticales de la tabla 1.ª, entre dos términos consecutivos de la misma las diferencias terceras, aún en el caso más desfavorable, no llegan á valer 0,1, ó la *décima parte* de una unidad de la octava cifra decimal.

Por otra parte, al interpolar entre dos términos consecutivos de la tabla 1.ª, en cualquier columna de ella, la máxima corrección que habría que aplicar por las diferencias segundas al valor de M sería para la mitad del intervalo, y entonces aquella asciende nada más que á la *octava parte* de dichas diferencias; así, para $m=2$, tendríamos á lo sumo $\frac{26,7}{8} = 3,3$; es decir, que la corrección apenas pasaría de tres unidades de la octava cifra decimal. Este resultado nos movió á prescindir en el cálculo de M de las diferencias segundas, como si fueran nulas, deseosos, en primer lugar, de simplificar las operaciones. Sin embargo, con el auxilio del estado ó tablita precedente se podría tenerlas en cuenta.

No hemos intentado el agregar á los valores de M la novena cifra decimal, porque esto habría exigido atender en la interpolación á las segundas diferencias, y extender la serie M hasta los términos de quinto orden en α inclusive, complicando notablemente el cálculo. Además, esta reforma acarrearía la de aumentar lo menos otra cifra decimal á los valores de $\sqrt[m]{A}$ tabulados en los cuadros 2.°, 3.° y 4.° Tal como aparecen en ellos, con siete cifras decimales, se calcularon empleando logaritmos de nueve y, en algunos casos, hasta de diez cifras, para asegurar el resultado en menos de media unidad de la séptima, como creemos haber conseguido en general.

Madrid 1.° de Diciembre de 1912.

TABLA PRIMERA

Corrección sustractiva $\left(\varepsilon = -M\sqrt[m]{A}\right)$ **á la raíz hallada.**

Valores de M

$1+a$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=11$
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,952	29504	26291	22211	18967	16472	14528	09813
0,953	28273	25193	21283	18174	15784	13920	09402
0,954	27069	24119	20375	17399	15110	13326	09001
0,955	25892	23069	19487	16641	14452	12745	08608
0,956	24741	22043	18620	15900	13808	12178	08225
0,957	23617	21041	17773	15176	13180	11623	07850
0,958	22520	20062	16946	14470	12566	11082	07485
0,959	21450	19108	16140	13781	11968	10554	07128
0,960	20406	18177	15353	13109	11384	10040	06780
0,961	19389	17270	14586	12455	10816	09538	06442
0,962	18398	16387	13840	11817	10262	09050	06112
0,963	17433	15527	13113	11197	09723	08574	05791
0,964	16495	14691	12407	10593	09199	08112	05478
0,965	15584	13878	11721	10007	08690	07663	05175
0,966	14699	13089	11054	09438	08195	07227	04880
0,967	13840	12324	10407	08885	07716	06804	04595
0,968	13007	11582	09780	08350	07251	06394	04318
0,969	12201	10863	09173	07832	06801	05997	04050
0,970	11421	10168	08586	07330	05365	05613	03790
0,971	10667	09496	08019	06846	05944	05242	03539
0,972	09939	08848	07471	06378	05538	04883	03297
0,973	09237	08222	06942	05927	05146	04538	03064
0,974	08561	07620	06434	05493	04769	04206	02840
0,975	07911	07041	05945	05075	04407	03886	02624
0,976	07287	06486	05476	04675	04059	03579	02417

TABLA PRIMERA (continuación).

Corrección sustractiva $\left(\varepsilon = -M\sqrt[m]{A}\right)$ á la raíz hallada.

Valores de M

$1+\alpha$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=11$
	0,000	0,000	0,000	0,000	0 000	0,000	0,000
0,976	07287	06486	05476	04675	04059	03579	02417
0,977	06689	05953	05026	04291	03725	03285	02218
0,978	06117	05444	04596	03923	03406	03004	02028
0,979	05571	04957	04185	03573	03102	02735	01847
0,980	05050	04494	03794	03239	02812	02479	01674
0,981	04556	04054	03422	02921	02536	02236	01510
0,982	04087	03636	03069	02620	02275	02006	01354
0,983	03643	03242	02736	02336	02028	01788	01207
0,984	03226	02870	02422	02068	01795	01583	01069
0,985	02834	02521	02128	01816	01577	01390	00939
0,986	02467	02195	01853	01581	01373	01210	00817
0,987	02126	01891	01596	01363	01183	01043	00704
0,988	01811	01611	01359	01160	01007	00888	00600
0,989	01521	01353	01142	00974	00846	00746	00504
0,990	01256	01117	00943	00805	00699	00616	00416
0,991	01017	00904	00763	00651	00566	00499	00337
0,992	00803	00714	00603	00514	00447	00394	00266
0,993	00615	00547	00461	00394	00342	00301	00203
0,994	00451	00401	00339	00289	00251	00221	00149
0,995	00313	00279	00235	00201	00174	00154	00104
0,996	00200	00178	00150	00128	00111	00098	00066
0,997	00113	00100	00085	00072	00063	00055	00037
0,998	00050	00045	00038	00032	00028	00025	00017
0,999	00013	00011	00009	00008	00007	00006	00004
1,000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000

TABLA PRIMERA (continuación).

Corrección sustractiva $\left(\varepsilon = -M\sqrt[m]{A}\right)$ **á la raíz hallada.**

Valores de M

$1+\alpha$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=11$
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
1,001	00013	00011	00009	00008	00007	00006	00004
1,002	00050	00044	00038	00032	00028	00024	00017
1,003	00113	00100	00084	00072	00062	00055	00037
1,004	00200	00177	00150	00128	00111	00098	00066
1,005	00312	00277	00234	00199	00173	00153	00103
1,006	00449	00399	00336	00287	00249	00220	00148
1,007	00610	00542	00458	00390	00339	00299	00202
1,008	00797	00708	00597	00510	00442	00390	00263
1,009	01008	00895	00755	00644	00559	00493	00333
1,010	01244	01105	00932	00795	00690	00608	00411
1,011	01504	01336	01127	00962	00835	00736	00496
1,012	01789	01589	01341	01144	00993	00875	00590
1,013	02099	01864	01572	01341	01164	01026	00693
1,014	02433	02161	01823	01555	01350	01189	00803
1,015	02791	02479	02091	01784	01548	01365	00921
1,016	03175	02819	02378	02028	01760	01552	01047
1,017	03582	03181	02683	02288	01986	01751	01181
1,018	04014	03564	03006	02564	02225	01961	01323
1,019	04470	03969	03347	02855	02478	02184	01474
1,020	04950	04395	03706	03162	02744	02419	01632
1,021	05455	04843	04084	03484	03023	02665	01798
1,022	05984	05312	04480	03821	03316	02923	01972
1,023	06537	05803	04893	04174	03622	03193	02154
1,024	07114	06315	05325	04542	03941	03474	02344

TABLA PRIMERA (continuación).

Corrección sustractiva $\left(\varepsilon = -M\sqrt[m]{A}\right)$ á la raíz hallada.

Valores de M

$1+\alpha$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=11$
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,024	07114	06315	05325	04542	03941	03474	02344
1,025	07716	06849	05774	04925	04274	03768	02542
1,026	08341	07403	06242	05324	04620	04072	02747
1,027	08991	07979	06727	05738	04979	04389	02961
1,028	09664	08577	07231	06167	05352	04717	03182
1,029	10362	09195	07752	06612	05737	05057	03411
1,030	11083	09835	08291	07071	06136	05408	03648
1,031	11829	10495	08847	07546	06548	05771	03893
1,032	12598	11177	09422	08036	06973	06146	04145
1,033	13391	11880	10014	08540	07411	06532	04406
1,034	14207	12604	10624	09060	07862	06929	04674
1,035	15048	13349	11252	09595	08326	07338	04950
1,036	15912	14115	11897	10145	08803	07759	05233
1,037	16800	14902	12560	10710	09293	08190	05524
1,038	17712	15709	13240	11290	09796	08634	05823
1,039	18647	16538	13938	11885	10312	09088	06130
1,040	19606	17387	14653	12495	10841	09555	06444
1,041	20588	18257	15385	13120	11383	10032	06766
1,042	21594	19148	16136	13759	11937	10521	07095
1,043	22624	20059	16903	14413	12505	11021	07432
1,044	23676	20991	17688	15082	13085	11532	07777
1,045	24753	21944	18491	15766	13678	12054	08129
1,046	25852	22918	19310	16464	14284	12588	08489
1,047	26975	23911	20147	17178	14903	13133	08856
1,048	28121	24926	21001	17905	15534	13689	09231

TABLA SEGUNDA

Números auxiliares. A_1	Factores para la raíz cuadrada		Factores para la raíz cúbica		
	$\sqrt{A_1}$	$\sqrt{10 A_1}$	$\sqrt[3]{A_1}$	$\sqrt[3]{10 A_1}$	$\sqrt[3]{10^2 A_1}$
1,05	1,0246951	3,2403704	1,0163964	2,1897596	4,7176940
1,1	1,0488089	3,3166248	1,0322801	2,2239801	4,7914199
1,2	1,0954451	3,4641016	1,0626586	2,2894285	4,9324242
1,3	1,1401754	3,6055513	1,0913929	2,3513347	5,0657970
1,4	1,1832159	3,7416574	1,1186889	2,4101422	5,1924941
1,5	1,2247449	3,8729833	1,1447142	2,4662120	5,3132928
1,6	1,2649111	4,0000000	1,1696071	2,5198421	5,4288353
1,7	1,3038405	4,1231057	1,1934832	2,5712816	5,5396583
1,8	1,3416408	4,2426407	1,2164404	2,6207414	5,6462162
1,9	1,3784049	4,3588989	1,2385623	2,6684016	5,7488970
2,0	1,4142135	4,4721354	1,2599210	2,7144176	5,8480353
2,1	1,4491377	4,5825756	1,2805792	2,7589242	5,9439220
2,2	1,4832397	4,6904158	1,3005914	2,8020393	6,0368107
2,3	1,5165751	4,7958316	1,3200061	2,8438670	6,1269256
2,4	1,5491933	4,8989795	1,3388659	2,8844991	6,2144650
2,5	1,5811388	5,0000000	1,3572088	2,9240177	6,2993053
2,6	1,6124515	5,0990195	1,3750689	2,9624961	6,3825043
2,7	1,6431677	5,1961524	1,3924766	3,0000000	6,4633041
2,8	1,6733200	5,2915026	1,4094597	3,0365890	6,5421327
2,9	1,7029386	5,3851648	1,4260432	3,0723168	6,6191060
3,0	1,7320508	5,4772256	1,4422496	3,1072325	6,6943295
3,2	1,7888544	5,6568542	1,4730126	3,1748021	6,8399038
3,4	1,8439089	5,8309519	1,5036946	3,2396118	6,9795320
3,6	1,8973666	6,0000000	1,5326189	3,3019272	7,1137865
3,8	1,9493589	6,1644140	1,5604908	3,3619754	7,2431564

TABLA SEGUNDA (continuación).

Números auxiliares. A_1	Factores para la raíz cuadrada		Factores para la raíz cúbica		
	$\sqrt{A_1}$	$\sqrt{10 A_1}$	$\sqrt[3]{A_1}$	$\sqrt[3]{10 A_1}$	$\sqrt[3]{100 A_1}$
4,0	2,0000000	6,3245553	1,5874010	3,4199519	7,3680630
4,2	2,0493902	6,4807407	1,6134287	3,4760266	7,4888724
4,4	2,0976177	6,6332496	1,6386426	3,5303483	7,6059049
4,6	2,1447610	6,7823300	1,6631035	3,5830479	7,7194426
4,8	2,1908902	6,9282032	1,6868653	3,6342411	7,8297353
5,0	2,2360680	7,0710678	1,7099759	3,6840315	7,9370053
5,2	2,2803503	7,2111026	1,7324782	3,7325111	8,0414515
5,4	2,3237900	7,3484693	1,7544106	3,7797631	8,1432529
5,6	2,3664319	7,4833147	1,7758080	3,8258624	8,2425706
5,8	2,4083189	7,6157732	1,7967018	3,8708766	8,3395510
6,0	2,4494897	7,7459667	1,8171206	3,9148676	8,4343267
6,2	2,4899799	7,8740079	1,8370905	3,9578916	8,5270189
6,4	2,5298222	8,0000000	1,8566355	4,0000000	8,6177388
6,6	2,5690465	8,1240384	1,8757775	4,0412400	8,7065877
6,8	2,6076810	8,2462113	1,8945365	4,0816551	8,7936593
7,0	2,6457513	8,3666003	1,9129312	4,1212853	8,8790401
7,3	2,7018512	8,5440038	1,9398774	4,1793392	9,0041134
7,6	2,7568097	8,7177978	1,9660951	4,2358236	9,1258052
7,9	2,8106938	8,8881944	1,9916317	4,2908404	9,2443355
8,2	2,8635642	9,0553850	2,0165297	4,3444815	9,3599016
8,5	2,9154759	9,2195444	2,0408276	4,3968297	9,4726823
8,8	2,9664794	9,3808316	2,0645602	4,4479602	9,5828397
9,1	3,0166206	9,5393920	2,0877595	4,4979414	9,6905211
9,4	3,0659419	9,6953596	2,1104543	4,5468360	9,7958611
9,7	3,1144823	9,8488579	2,1326712	4,5947009	9,8989829

TABLA TERCERA

Números auxiliares. A_1	Factores para diversas raíces en combinación con los de la Tabla cuarta				
	$\sqrt[4]{A_1}$	$\sqrt[5]{A_1}$	$\sqrt[6]{A_1}$	$\sqrt[7]{A_1}$	$\sqrt[11]{A_1}$
1,05	1,0122722	1,0098058	1,0081648	1,0069944	1,0044453
1,1	1,0241137	1,0192449	1,0160119	1,0137089	1,0087022
1,2	1,0466351	1,0371373	1,0308533	1,0263881	1,0167128
1,3	1,0677900	1,0538740	1,0446975	1,0381919	1,0241380
1,4	1,0877573	1,0696104	1,0576809	1,0492414	1,0310610
1,5	1,1066819	1,0844718	1,0699132	1,0596340	1,0375482
1,6	1,1246826	1,0985605	1,0814837	1,0694488	1,0436536
1,7	1,1418584	1,1119616	1,0924666	1,0787512	1,0494214
1,8	1,1582922	1,1247461	1,1029236	1,0875957	1,0548886
1,9	1,1740549	1,1369745	1,1129072	1,0960287	1,0600863
2,0	1,1892071	1,1486984	1,1224621	1,1040895	1,0650411
2,1	1,2038013	1,1599623	1,1316268	1,1118119	1,0697755
2,2	1,2178833	1,1708049	1,1404348	1,1192253	1,0743093
2,3	1,2314930	1,1812602	1,1489152	1,1263553	1,0786594
2,4	1,2446660	1,1913579	1,1570037	1,1332243	1,0828409
2,5	1,2574334	1,2011244	1,1649931	1,1398523	1,0868669
2,6	1,2698234	1,2105833	1,1726333	1,1462567	1,0907491
2,7	1,2818610	1,2197554	1,1800325	1,1524535	1,0944978
2,8	1,2935687	1,2286597	1,1872067	1,1584565	1,0981224
2,9	1,3049669	1,2373131	1,1941705	1,1642784	1,1016311
3,0	1,3160740	1,2457309	1,2009369	1,1699308	1,1050315
3,2	1,3374806	1,2619147	1,2139245	1,1807672	1,1115339
3,4	1,3579061	1,2773084	1,2262523	1,1910378	1,1176769
3,6	1,37 74493	1,2919940	1,2379899	1,2008031	1,1234997
3,8	1,3961944	1,3060407	1,2491960	1,2101138	1,1290355

TABLA TERCERA (continuación).

Números auxiliares A_1	Factores para diversas raíces en combinación con los de la Tabla cuarta				
	$\sqrt[4]{A_1}$	$\sqrt[5]{A_1}$	$\sqrt[6]{A_1}$	$\sqrt[7]{A_1}$	$\sqrt[11]{A_1}$
4,0	1,4142136	1,3195085	1,2599210	1,2190137	1,1343125
4,2	1,4315691	1,3324467	1,2702081	1,2275399	1,1393549
4,4	1,4483155	1,3449017	1,2800947	1,2357249	1,1441836
4,6	1,4645003	1,3569116	1,2896137	1,2435971	1,1488166
4,8	1,4801656	1,3685109	1,2987938	1,2511811	1,1532701
5,0	1,4953488	1,3797296	1,3076605	1,2584989	1,1575579
5,2	1,5100831	1,3905950	1,3162364	1,2655701	1,1616926
5,4	1,5243982	1,4011310	1,3245417	1,2724118	1,1656851
5,6	1,5383211	1,4113594	1,3325945	1,2790396	1,1695454
5,8	1,5518759	1,4212995	1,3404110	1,2854676	1,1732824
6,0	1,5650846	1,4309691	1,3480062	1,2917083	1,1769040
6,2	1,5779670	1,4403842	1,3553931	1,2977732	1,1804174
6,4	1,5905414	1,4495593	1,3625841	1,3036727	1,1838293
6,6	1,6028245	1,4585079	1,3695903	1,3094162	1,1871456
6,8	1,6148316	1,4672421	1,3764216	1,3150124	1,1903718
7,0	1,6265765	1,4757732	1,3830876	1,3204692	1,1935128
7,3	1,6437309	1,4882112	1,3927948	1,3284091	1,1980747
7,6	1,6603644	1,5002468	1,4021751	1,3360740	1,2024692
7,9	1,6765124	1,5119082	1,4112518	1,3434838	1,2067087
8,2	1,6922069	1,5232205	1,4200457	1,3506563	1,2108044
8,5	1,7074765	1,5342064	1,4285754	1,3576072	1,2147660
8,8	1,7223471	1,5448863	1,4368578	1,3643510	1,2186025
9,1	1,7368421	1,5552789	1,4449081	1,3709004	1,2223219
9,4	1,7509831	1,5654009	1,4527403	1,3772674	1,2259314
9,7	1,7647896	1,5752676	1,4603668	1,3834625	1,2294377

TABLA CUARTA

Lugares		Factores para diversas raíces en combinación con los de la Tabla tercera				
$mn+r$	10^{r-1}	$\sqrt[4]{10^{r-1}}$	$\sqrt[5]{10^{r-1}}$	$\sqrt[6]{10^{r-1}}$	$\sqrt[7]{10^{r-1}}$	$\sqrt[11]{10^{r-1}}$
mn+1	10^{0}	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
mn+2	10^{1}	1,7782794	1,5848932	1,4677993	1,3894955	1,2328467
mn+3	10^{2}	3,1622777	2,5118864	2,1544347	1,9306977	1,5199112
mn+4	10^{3}	5,6234132	3,9810717	3,1622777	2,6826958	1,8738174
mn+5	10^{4}		6,3095734	4,6415888	3,7275937	2,3101297
mn+6	10^{5}			6,8129205	5,1794746	2,8480359
mn+7	10^{6}				7,1968568	3,5111917
mn+8	10^{7}					4,3287613
mn+9	10^{8}					5,3366991
mn+10	10^{9}					6,5793322
mn+11	10^{10}	»				8,1113083

La combinación de las Tablas tercera y cuarta está basada en la transformación siguiente:

$$\sqrt[m]{10^{r-1} A_1} = \sqrt[m]{10^{r-1}} \times \sqrt[m]{A_1}$$

XIV.—Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Miukowski.

Por B. Cabrera.

CAPITULO I

1. *Diferentes clases de magnitudes.* — Las condiciones de simetría de los diferentes fenómenos y cualidades físicas conducen á clasificarlas en tres grupos, á cada uno de los cuales corresponde un orden distinto de magnitudes utilizadas en su medida: fenómenos, cualidades ó magnitudes *escalares, vectoriales* y *tensoriales.* En los primeros basta determinar la intensidad ó magnitud para que desaparezca toda ambigüedad en su conocimiento: cuando fijamos el valor de la densidad en un punto de un cuerpo heterogéneo, ó el potencial de un conductor electrizado, ó la iluminación de una región del espacio, ó la temperatura de un recinto, nada queda por averiguar del fenómeno, considerado como un hecho concreto. La determinación de este valor supone siempre la fijación de una escala más ó menos arbitraria, y de aquí su nombre. Su simetría característica es la correspondiente á la uniformidad más absoluta: un lugar del espacio en que se encuentra localizada una de aquellas magnitudes, que posee un mismo valor en todos sus puntos, carece de direcciones privilegiadas. Si el valor cambia, es evidente que tales cambios pueden introducir diferencias entre las distintas direcciones, pero es dable elegir el volumen suficientemente pequeño para eliminarlas.

No ocurre lo mismo en los otros dos grupos establecidos: en ellos la disimetría aparece siempre en mayor ó menor

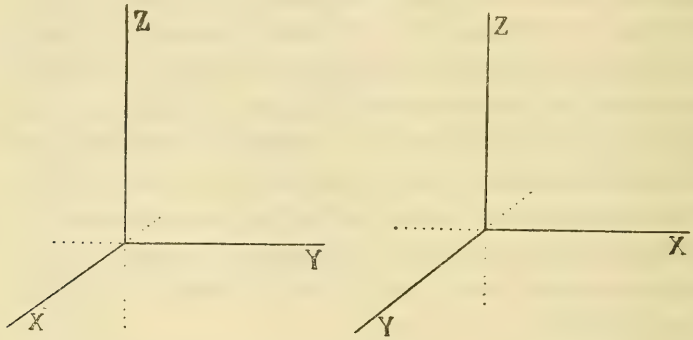
grado, y esto con independencia de que el fenómeno afecte por igual á una región del espacio; de suerte que es insuficiente dar su valor numérico. Imaginemos el seno de un líquido agitado ó un conductor atravesado por corrientes eléctricas; si conocemos el valor de la velocidad del líquido, ó de la intensidad de la corriente en un punto, tendremos aún una infinidad de estados posibles, cada uno de los cuales corresponde á una orientación distinta de aquella velocidad ó esta intensidad. En otros términos: no basta un número, una escala: es necesaria una magnitud geométrica, dotada además de dirección y sentido bien definidos, magnitud que se denomina *vector*. Los fenómemos representables por un vector poseen una dirección privilegiada, un eje de simetría, en el cual, además, los dos sentidos no son equivalentes.

Consideremos en segundo lugar un cilindro de un cuerpo elástico torcido ó comprimido. También aquí existe una dirección privilegiada, pero en ella no es posible distinguir los dos sentidos; de suerte que estos fenómenos son más simétricos que los vectoriales. Voigt ha introducido las magnitudes correspondientes con el nombre de *tensores*. Por el número de sus elementos de simetría parece natural colocarlos antes que los vectores, pero ello no corresponde á su verdadera naturaleza. Estos fenómenos, en efecto, se presentan siempre como resultado de la presencia de fenómenos vectoriales.

2. *Magnitudes escalares y pseudoescalares.* — Aquí sólo hemos de ocuparnos de las escalares en sus relaciones con los vectores y tensores, para cuyo fin nos conviene insistir un poco sobre sus elementos característicos, en el caso en que sean la medida de un fenómeno continuo y, por tanto, función de las coordenadas. En efecto; una escalar puede presentarse como el valor numérico de un fenómeno directamente medible, cual la temperatura; pero puede también aparecer como una cierta función de elementos medibles, cual la densidad, límite del cociente de una masa por un

volumen, y en este caso el reconocimiento de su naturaleza puede ofrecer á simple vista ciertas dificultades. Sin embargo, es fácil señalar un carácter que permite reconocerlas inmediatamente, fundándose en su simetría característica. Hemos dicho que un fenómeno ó magnitud de este género debe poseer una simetría absoluta, de suerte que si cambiamos la orientación de los ejes coordenados que definen los puntos del espacio, el valor de la función de las coordenadas que les sirve de medida debe permanecer el mismo; ó, en otros términos: *todo fenómeno escalar está medido por un invariante, y recíprocamente.*

Conviene insistir un poco más. Supondremos siempre el sistema coordenado de referencia trirrectángulo; pero, después de esta primera determinación, cabe elegirlo siguiendo uno de los dos esquemas adjuntos (figuras 1.ª y 2.ª). En el



Figuras 1.ª y 2.ª

primero, una rotación que permuta circularmente los ejes en el orden x y z se verifica en el sentido contrario de las agujas de un reloj, y en el segundo, en sentido opuesto. Nosotros supondremos siempre los ejes como en la figura 1.ª Además en esta elección se supone siempre contenida la del sentido positivo de las rotaciones: así, una rotación será positiva para cualquier sistema de ejes cuando se efectúa en el mismo sentido que la permutación x y z.

Esto dicho, un cambio de ejes puede realizarse permaneciendo siempre dentro de la misma clase ó pasando á la otra; en este último caso se llama *inversión*. La primera clase de transformaciones se reduce siempre á una rotación alrededor de un eje que pasa por el origen; la segunda es una superposición de la anterior operación con un cambio de signo en uno ó los tres ejes. Ahora bien; según lo que hemos dicho arriba, de acuerdo con la definición de magnitudes escalares, éstas son invariantes de todas las transformaciones. Pero además de estas funciones se presentan frecuentemente otras que, siendo invariantes en las rotaciones, conservan su valor, pero cambian de signo en las inversiones Estas magnitudes se las denomina *pseudoescalares*, y su simetría es algo inferior á la que corresponde á las escalares, puesto que no admiten centro ni, por ende, planos de simetría. Empleando el lenguaje de la cristalografía, podríamos decir que los fenómenos pseudoescalares forman el grupo enantiomórfico del sistema de infinitos ejes de simetría de orden superior, cuyo grupo holoédrico está constituído por las escalares. El poder rotatorio de los cuerpos activos es el ejemplo clásico de esta clase de fenómenos, que, siguiendo á Lagevin, representaremos por una letra cualquiera con un punto en su parte inferior: $\dot{a}$.

3. *Vectores: su división y notaciones.* — Hemos visto que un *vector* es una magnitud caracterizada por su *valor numérico* y su *dirección* y *sentido*. Estos elementos intervienen á veces separadamente en los cálculos, por lo cual se suele considerar aisladamente el primero, con el nombre de *módulo*, y el conjunto de los dos restantes, constituyendo el *argumento*. Gráficamente, atendida la existencia del eje de simetría, se les representa por un segmento rectilíneo, cuya longitud es igual al módulo y cuyo sentido se indica por una flecha. Pero al eje de simetría pueden aún agregarse otros elementos compatibles con él, y según sean ellos se distinguen dos clases de vectores. En el primero todos los planos

que pasan por el eje son planos de simetría; á esta clase, que Curie ha representado por el esquema de la figura 3.ª, corresponde la velocidad lineal, la fuerza, el campo eléctrico, etc., y, en general, se le denomina *vector polar*. En el segundo existe un plano de simetría normal al eje, y, por tanto, un centro en el punto de intersección: á él pertenecen la velocidad angular, el par, el campo magnético, etc. Curie le esquematiza por la figura 4.ª y se le distingue con el nombre de *vector axial*.

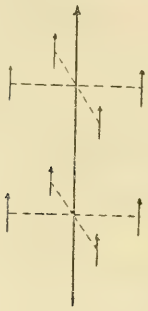


Figura 3.ª

Figura 4.ª

Estas dos clases de vectores son completamente heterogéneos y no se los puede combinar por suma, aunque sí por producto. Basta recordar las definiciones de estos algoritmos para comprenderlo.

Lagevin cree que sería más racional representar los vectores axiales por un área plana con un sentido de rotación alrededor de un eje normal á él; sin embargo, tal representación es incómoda para las construcciones, por lo cual su propio autor la desecha. Acaso se podría conservar la ordinaria agregándole una pequeña flecha circular cuando convenga poner de manifiesto su naturaleza (figura 5.ª). Esta representación es análoga á la empleada por Voigt.

En cambio, es un acierto completo el sistema de notación propuesto por el físico citado, que con-

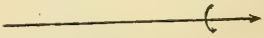


Figura 5.ª

siste en colocar sobre una letra ordinaria una flecha rectilínea ó curvilínea, según se trate de un vector polar ó axial: $\vec{a}$, $\overset{\frown}{a}$. El módulo se representa por la misma letra que el vector, sin flecha, y el argumento agregando al símbolo del vector el exponente 0: $\vec{a}^0$, $\overset{\frown}{a}^0$.

Aparte de esta notación, se han propuesto y utilizado otras varias: unos emplean caracteres griegos, otros góticos ó negrillas; por último, algunos, en vez de las flechas, colocan uno ó dos trazos horizontales sobre los caracteres ordinarios. De otra clase completamente distinta es la notación de Grasmann, que aún preconizan algunos autores, principalmente cuando se estudia la generación de los vectores como magnitudes geométricas. Considerado un vector como un segmento recorrido por un punto desde su origen A hasta su extremidad B, su módulo será la longitud $OB - OA$, donde O es un punto arbitrario sobre la recta base del vector, longitud que puede escribirse también $B - A$, puesto que la elección del punto O no puede influir en la anterior cantidad.

Además del módulo, el argumento que-da también determinado, puesto que el orden de las letras señala el sentido, mientras la recta es base de la dirección. La notación de Grasmann ha tropezado con grandes dificultades por su excesiva complicación para los cálculos.

4. *Suma de vectores.* — Si en un punto del espacio se determina la producción simultánea de varios fenómenos vectoriales de idéntica naturaleza, es evidente que un observador percibirá un fenómeno único, de la misma naturaleza que los anteriores, pero cuyo argumento y módulo difieren de ellos: la operación vectorial que tiene por objeto la determinación de este vector *resultante* se llama *suma geométrica* (figura 6.ª). Supongamos existan sólo dos de estos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$; por definición la *suma de estos dos vectores se obtendrá uniendo el origen común con la extremidad de una*

recta paralela á $\vec{b}$, *que pase por la extremidad de* $\vec{a}$. Esta regla, que es una generalización de la composición de movimientos en cinemática, no conduce á ninguna contradicción y los resultados obtenidos partiendo de ella se confirman experimentalmente; caracteres necesarios y suficientes para servir de base al cálculo.

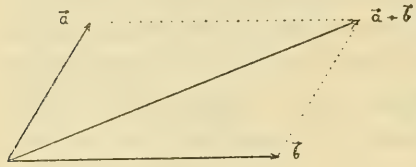


Figura 6.ª

De la definición anterior se deduce inmediatamente que la suma de dos vectores es independiente del orden en que se tomen los dos sumandos, de suerte que la operación anterior es *conmutativa.*

También se deduce de aquella definición la posibilidad de generalizarla á un número cualquiera de vectores, cuyo valor será evidentemente el mismo sea cual fuere el orden de los sumandos; puesto que, si se pueden permutar dos consecutivos, en virtud del anterior colorario, podrá hacerse lo mismo con dos cualesquiera. En definitiva, la suma geométrica, como la algébrica, es una operación asociatíva y conmutativa.

En algunos casos conviene determinar á qué queda reducido un fenómeno resultante cuando se suprime uno de los que han contribuido á engendrarlo: la operación que resuelve este problema es la *resta geométrica. Para realizarlo basta superponer al vector resultante en cuestión,* $\vec{\rho}$, *otro de la misma dirección y módulo, pero de sentido contrario al que queremos restarle,* $\vec{\alpha}$; *la suma de ambos representa el nuevo fenómeno.* En efecto: sustituyendo al vector $\vec{\rho}$ el conjunto de los que le integran $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ....., el problema se reduce á determinar la suma $\vec{\alpha} + \vec{\rho} + \vec{\gamma} + \ldots\ldots - \vec{\alpha}$; y como la operación

es conmutativa, podemos comenzar trazando por el extremo de $\vec{\alpha}$ una paralela igual á $-\vec{\alpha}$, que nos vuelve al origen; de suerte que dicha suma es igual á $\vec{\beta} + \vec{\gamma} + \ldots\ldots$ según queríamos demostrar.

5. Como caso particular, supondremos se trata de sumar varios vectores iguales en módulo y argumento. Aplicando la regla anterior, es evidente que el vector resultante se obtendrá multiplicando el *módulo de uno de los sumandos por el número de ellos y conservando al producto el argumento común.* De otra manera, podemos afirmar, como consecuencia de la definición de suma geométrica, que para multiplicar un vector por un número entero basta multiplicar el módulo por dicho número. Esta proposición se puede generalizar al caso en que el factor sea un número cualquiera, y, por consiguiente, una magnitud escalar. En efecto; basta observar que dividir el módulo por un número entero, equivale á descomponer el vector en otros iguales entre sí y del mismo argumento, con lo cual resulta que el producto por un número fraccionario se reduce á una serie de sumas y restas; por último, el caso de los números inconmensurables es límite de dos fraccionarios que le comprenden.

Una consecuencia interesante de lo que acabamos de indicar es la posibilidad de separar en un vector, para los efectos del cálculo, su módulo de su argumento. Es para ello suficiente considerar al vector como producto del número que mide su módulo por un vector de módulo unidad, con el mismo argumento que el dado.

Así

$$\vec{a} = a \cdot \vec{a}^0.$$

Esta proposición explica el origen de la notación utilizada para el argumento, pues es sabido por el análisis ordinario que toda cantidad elevada á 0 es la unidad.

6. *Componentes de un vector.* — A veces conviene em-

plear el análisis ordinario en el cálculo vectorial, para cuyo fin basta descomponer cada vector según tres direcciones fijas en el espacio. Estas direcciones conviene sean rectangulares y se suelen disponer en la forma de los ejes coordenados de la figura 1.ª: á veces se designan los argumentos de estas direcciones con las notaciones $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, que coinciden con los ejes x, y, z. Las componentes, según estos ejes, del vector a, tienen módulos a_x, a_y, a_z, de suerte que

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Por otra parte es evidente, dada la definición de la suma, que

$$a_x = a\lambda, \quad a_y = a\mu, \quad a_z = a\nu,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

donde λ, μ, ν, son los cosenos directores de a.

7. Aquí, como en el caso de las magnitudes escalares, conviene poseer un criterio que nos permita averiguar si tres funciones de las coordenadas son ó no componentes de un vector. Para tal fin, consideraremos separadamente las dos clases de vectores, comenzando por los polares.

Las componentes de un vector de este género son sus proyecciones sobre los ejes, y, por ende, han de comportarse de forma análoga que las coordenadas de un punto. Así, pues, suponiendo que se cambie de sistema de coordenadas, conservándoles trirectángulos, los nuevos valores se deducirán de los antiguos por igual procedimiento que se ejecuta el cambio en las coordenadas, esquemáticamente representado por

	a_x	a_y	a_z
$a_{x'}$	α_1	α_2	α_3
$a_{y'}$	β_1	β_2	β_3
$a_{z'}$	γ_1	γ_2	γ_3

donde $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ son los tres cosenos directores de x' respecto de los antiguos ejes, y, análogamente, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ los de y' y z'.

Si se trata de un vector axial $\overset{\curvearrowright}{A}$, recordemos que su representación geométrica más acabada la suministra un área plana con un sentido de rotación positivo; aquél que corresponde á la rotación positiva sobre el vector como eje. Sus componentes estarán medidas por las proyecciones de aquella área sobre los planos coordenados. Para encontrar la forma en que estas componentes se transforman bastará escoger la expresión más sencilla de un área; el área de un paralelógramo, cuyas proyecciones son también paralelógramos, que tienen por valores

$$A_x = \delta x \delta' y - \delta' x\, \delta y$$
$$A_y = \delta y \delta' z - \delta' y \delta z$$
$$A_z = \delta z \delta' x - \delta' z \delta x$$

donde llamamos $\delta x, \delta y, \delta z$ las proyecciones sobre los ejes del primer lado del paralelógramo, y $\delta' x, \delta' y, \delta' z$ las correspondientes al segundo lado. Ahora bien: cambiando de sistema de referencia se deduce para A_x, por ejemplo

$$A_x = \delta y\, \delta' z - \delta' y\, \delta z =$$
$$= (\alpha_2 \delta x' + \beta_2 \delta' y' + \gamma_2 \delta z')(\alpha_3 \delta' x' + \beta_3 \delta' y' + \gamma_3 \delta' z') -$$
$$- (\alpha_2 \delta' x' + \beta_2 \delta' y' + \gamma_2 \delta' z')(\alpha_3 \delta x' + \beta_3 \delta y' + \gamma_3 \delta z') =$$
$$= (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2)(\delta y' \delta' z' - \delta' y' \delta z') +$$
$$+ (\gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2)(\delta z' \delta' x' - \delta' z' \delta y') +$$
$$+ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)\delta x' \delta' y' - \delta' x' \delta y')$$

Pero de los grupos de condiciones que definen el carácter trirectángulo de los ejes se deduce inmediatamente, por simple aplicación de la regla de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, que, siendo Δ el determinante de los cosenos directores

$$\alpha_1 \Delta = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2$$
$$\alpha_2 \Delta = \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3$$
$$\alpha_3 \Delta = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1$$
$$\beta_1 \Delta = \alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Así, la última ecuación se puede escribir

$$A_x = (\alpha_1 \Delta) A_{x'} + (\beta_1 \Delta) A_{y'} + (\gamma_1 \Delta) A_{z'}$$

y análogamente para las otras dos componentes; de suerte que para estos vectores el esquema de la transformación se puede escribir en la siguiente forma:

	A_x	A_y	A_z
$A_{x'}$	$\alpha_1 \cdot \Delta$	$\alpha_2 \cdot \Delta$	$\alpha_3 \cdot \Delta$
$A_{y'}$	$\beta_1 \cdot \Delta$	$\beta_2 \cdot \Delta$	$\beta_3 \cdot \Delta$
$A_{z'}$	$\gamma_1 \cdot \Delta$	$\gamma_2 \cdot \Delta$	$\gamma_3 \cdot \Delta$

Este esquema se confunde con el correspondiente á los vectores laminares cuando $\Delta = +1$, pero se distingue totalmente de él cuando $\Delta = -1$. En resumen, podemos traducir al lenguaje ordinario el contenido del párrafo presen-

te, diciendo: *tres funciones de x, y, z pueden considerarse como las componentes de un vector polar, cuando se transforman como las coordenadas en todo cambio de ejes, y de un vector axial, cuando en las transformaciones haya que reemplazar los cosenos directores de los nuevos ejes, por sus respectivos productos por el valor del determinante.*

De aquí se deduce fácilmente que el módulo de un vector cualquiera $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ es una invariante, y, por consiguiente, una magnitud escalar pura.

8. Conviene insistir un poco sobre el esquema de transformación de los vectores axiales, pues ello nos suministra una regla fácil para distinguir un vector de esta clase de un vector polar.

Para ello, recordemos brevemente algunas propiedades del determinante de los cosenos directos de los ejes. En primer término, de las relaciones generales que ligan estos cosenos, por ser los ejes trirrectángulos, se deduce inmediatamente

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \Delta^2 = +1$$

y, por consiguiente, en todo caso $\Delta = \pm 1$.

En segundo lugar, vamos á demostrar que $\Delta = +1$ siempre que se pueda pasar del primer sistema al segundo por una simple rotación, y $\Delta = -1$ cuando sea indispensable alguna inversión. En efecto, la rotación simple á que se refiere la primera parte de este teorema, podemos siempre descomponerla en tres rotaciones parciales alrededor de los ejes de uno de los sistemas; por ejemplo: rotación alrededor de x hasta llevar z' á z'' en el plano xz, rotación sobre y hasta que z'' se confunda con z y rotación sobre z hasta que se confundan los dos sistemas. Ahora bien, cada uno de estos cambios se define por ecuaciones de la forma

$$x = x'$$
$$y = y' \cos \alpha - z' \operatorname{sen} \alpha$$
$$z = y' \operatorname{sen} \alpha + z' \cos \alpha$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix} = 1$$

y como el determinante de la rotación completa es el producto de estos determinantes parciales, se tendrán necesariamente

$$\Delta = +1$$

Cuando existe inversión, podemos llevar los ejes primitivos, por una simple rotación, á confundirse con las prolongaciones de los nuevos, y á continuación invertir éstos. Entonces

$$\Delta = \Delta' \cdot \Delta'' = \Delta'',$$

puesto que el determinante Δ' de la rotación es $+1$. Pero en la inversión directa de los ejes los cosenos directores son

$$\alpha_1 = -1, \beta_2 = -1, \gamma_3 = -1$$
$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

de suerte que

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Según lo que acabamos de decir, y lo demostrado en los párrafos anteriores, si aplicamos una inversión á los ejes de

referencia, las componentes de un vector polar cambiarán de signo y las de un vector axial no. He aquí el criterio de distinción á que nos referiamos en el comienzo del párrafo.

9. *Producto de vectores.* — De igual manera que cuando varios fenómenos vectoriales de idéntica naturaleza tienden á producirse en un mismo punto del espacio, se produce un fenómeno único, representado por la suma geométrica de los vectores correspondientes, ocurre con frecuencia que la existencia simultánea de dos fenómenos vectoriales heterogéneos, engendre la aparición de nuevos fenómenos ó magnitudes físicas, que derivan de aquéllas mediante operaciones esencialmente análogas á la multiplicación ordinaria.

Dos casos ocurren: 1.° La nueva magnitud está expresada por el producto de los módulos de los dos vectores y del coseno del ángulo comprendido, cual ocurre con el trabajo realizado por una fuerza aplicada sobre un punto material, que se mueve según una trayectoria cualquiera. 2.° La nueva magnitud tiene por valor numérico el área del paralelógramo construído sobre los dos vectores, ó sea el producto de estos vectores por el seno del ángulo comprendido, según se ve para el caso del momento de un par. El primero de estos productos se ha llamado por unos, siguiendo á Grassmann, *producto interior*; otros, derivándolo de la teoría de los cuaterniones de Hamilton, *producto escalar*, teniendo en cuenta que, según veremos inmediatamente, se trata de una magnitud escalar. Al segundo le llamó Grasmann, y con él sus discípulos, *producto exterior*, y Hamilton, seguido por la mayoría de los físicos, *producto vector;* pues se trata de un vector, como demostraremos más abajo.

10. *Producto escalar.* — El producto escalar se ha representado simbólicamente por las notaciones siguientes: $[a \mid b]$, de Grassmann; — Sab, de Hamilton; $a \cdot b$, de Gibbs; ab, de Heaviside; $a \times b$, de Burali-Forti y Marcolongo. Nosotros elegiremos con Langevin la notación $\vec{a}\,\vec{b}$. El carácter escalar de este producto se reconoce inmediatamente, aplicando el

criterio de la transformación de coordenadas á su valor numérico

$$\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Es evidente, en efecto, que se trata de un invariante.

Si los dos vectores son de distinta clase, ambos laminares ó solenoidales, se trata de una escalar absoluta; pero si son de clases diferentes será una pseudoescalar, puesto que al invertir los ejes uno solo de los factores de cada término cambiará de signo.

También resulta inmediatamente de su expresión, que este producto es conmútativo y distributivo; esto es:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$$

$$\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}.$$

Por el contrario, difiere esta operación de la multiplicación ordinaria en no ser asociativa, puesto que

$$\vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c}) \lessgtr (\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c} \lessgtr (\vec{a}\,\vec{c})\,\vec{b},$$

ya que cada uno de estos productos se reduce á la multiplicación de una magnitud escalar por un vector, y en los tres casos el módulo del resultado de la operación y los argumentos difieren completamente.

Como casos especiales interesantes del producto escalar, se puede citar el de dos vectores perpendiculares, cuyo valor es cero por serlo $\cos\theta$, y el cuadrado escalar de un vector, evidentemente igual al cuadrado de su módulo. Así, pues, en este último caso, si se tratase de un argumento $\vec{a}^{o\,2} = 1$, de donde se deduce para los vectores fundamentales

$$\vec{i}^2 = 1 \quad \vec{j}^2 = 1 \quad \vec{k}^2 = 1$$

Del primero de los casos citados se obtiene

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Con estas condiciones se puede escribir el producto escalar en la siguiente forma:

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

Por último, cuando uno de los factores es el argumento de un vector, $\vec{b}^0$, el producto $\vec{a}\,\vec{b}^0$ representa la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}^0$.

11. *Producto vector.* — El producto vector se le ha representado por una de las notaciones siguientes: $[ab]$, de Grassmann; $|ab|$, de Abraham; $V\,ab$, de Hamilton; $a \times b$, Gibbs; $a \vee b$, de Burali-Forti y Marcolongo. Nosotros eligiremos la notación de Abraham, que nos parece la más cómoda:

$$|\vec{a}\,\vec{b}|$$

El carácter vectorial del producto que estudiamos se reconoce inmediatamente observando que el área en cuestión no es una magnitud escalar, puesto que si se invierte el orden en que se toman los factores, y, por consiguiente, en que supone descrito el ángulo $a\,b$, el producto cambia de signo, por cambiar sen θ. Por otra parte,

$$|\vec{a}\,\vec{b}|^2 = a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \theta = (a_y b_z - a_z b_y)^2 + \\ + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2,$$

donde los paréntesis del último miembro son las proyecciones del área en cuestión sobre cada uno de los planos coordenados. Así el cuadrado del producto vector se expresa por las proyecciones del área en igual forma que el cuadrado de un vector por sus componentes.

Por consiguiente, el producto vector es un vector, cuyo módulo tiene el valor $a\ b$ sen θ y su argumento es normal al plano de los factores, y de sentido tal, que un tornillo cuyo eje coincide con el producto, avanza cuando la rotación se produce pasando del primer factor al segundo.

Cuando los factores son vectores de la misma clase, $|\vec{a}\ \vec{b}|$ ó $|\overset{\frown}{a}\ \overset{\frown}{b}|$, una inversión de los ejes deja invariable las componentes del producto, que será, por tanto, un vector axial; mientras que si los factores son de clase diferente, $|\vec{a}\ \overset{\frown}{b}|$ las componentes cambian de signo con la inversión y el vector es polar.

Según lo dicho hace un momento, es evidente que el producto vector no satisface á la ley conmutativa, al contrario de lo que ocurre con el producto escalar. En cambio, éste como aquél satisface á la ley distributiva. En efecto; sea el producto $|\vec{a}\ \vec{b}|$ en el cual suponemos que $\vec{b} = \vec{e} + \vec{d}$ vamos á demostrar que

$$|\vec{a}\ \vec{b}| = |\vec{a}\ \vec{e}| + |\vec{a}\ \vec{d}|.$$

Considerando separamente los tres productos que figuran en la ecuación anterior, es evidente que los argumentos respectivos están en un plano, puesto que todos ellos son perpendiculares al $\vec{a}^{o}$. Por otra parte, siendo $\vec{b} = \vec{e} + \vec{d}$, las proyecciones sobre un plano cualquiera de los paralelógramos construídos sobre $\vec{a}, \vec{c}$ y $\vec{a}, \vec{d}$ tienen por suma la proyección del construído sobre $\vec{a}, \vec{b}$, puesto que estos tres paralelógramos forman el área lateral de un prisma de haces triangulares y paralelos.

Luego el vector $|\vec{a}\ \vec{b}|$ será la suma geométrica de $|\vec{a}\ \vec{c}|$ y $|\vec{a}\ \vec{d}|$, según queríamos demostrar.

Casos interesantes del producto vector son el cuadrado vector y el producto de dos vectores iguales, perpendiculares entre sí. El primero es evidentemente cero, puesto que sen $\theta = 0$, y el segundo un vector perpendicular á los otros dos y de módulo igual á su cuadrado, puesto que sen $\theta = 1$. En particular, para los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, se tendrá

$$|\vec{i}|^2 = |\vec{j}|^2 = |\vec{k}|^2 = 0$$

$$|\vec{i}\,\vec{j}| = \vec{k} \qquad |\vec{j}\,\vec{k}| = \vec{i} \qquad |\vec{k}\,\vec{i}| = \vec{j}\,|\,;$$

cumplidas cuyas condiciones podemos escribir el producto vector en la siguiente forma

$$\vec{a}\,\vec{b}\,| = |(a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k})\,(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k})$$

12. *Productos de tres factores.* — Consideremos ahora los productos posibles de tres vectores. Son éstos:

$$(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c}, \qquad |\vec{a}\,\vec{b}|\,\vec{c}, \qquad \{|\vec{a}\,\vec{b}|\,\vec{c}\}.$$

Del primero nos hemos ocupado ya y hemos visto que su valor no es independiente de la manera de asociar los factores, en cuya virtud, y para evitar confusiones, encerraremos siempre en un paréntesis los dos factores cuyo producto escalar ha de multiplicarse por el tercer factor.

En el segundo caso, siendo un producto escalar, se puede escribir también como la suma de los productos de sus componentes homólogas,

$$)a_y\,b_z - a_z\,b_y)\,c_x + (a_z\,b_x - a_x\,b_z)\,c_y + (a_x\,b_y - a_y\,b_x)\,c_z =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

expresión que demuestra que el valor de este producto no se altera si se permutan circularmente sus factores.

$$|\vec{a}\ \vec{b}|\ \vec{c} = |\vec{b}\ \vec{c}|\ \vec{a} = |\vec{c}\ \vec{a}|\ \vec{b}$$

Este producto expresa el volumen del paralelepípedo construído sobre los tres factores.

El tercero de los productos anteriores es un vector cuyas componentes se forman según la regla ordinaria: así para la componente x

$$\left\| |\vec{a}\ \vec{b}|\ \vec{c} \right\|_x = (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\, c_z - (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\, c_y =$$
$$= (a_y\, c_y + a_z\, c_z)\, b_x - (b_y\, c_y + b_z\, c_z)\, a_x$$

de donde sumando y restando $a_x\, b_x\, c_x$,

$$\left\| |\vec{a}\ \vec{b}|\ \vec{c} \right\|_x = (\vec{a}\ \vec{c})\, b_x - (\vec{b}\ \vec{c})\, a_x.$$

Expresiones análogas se obtienen para las otras dos componentes, de suerte que en definitiva

$$\left\| |\vec{a}\ \vec{b}|\ \vec{c} \right\| = (\vec{a}\ \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{b}\ \vec{e})\ \vec{a}$$

que nos demuestra que tampoco en este caso es indiferente el orden de los sumandos.

(Continuará.)

XV. — Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general.

Por Antonio Torroja y Miret.

(Continuación.)

III. Curvatura en puntos y planos tangentes particulares.

Supongamos ahora que

por el punto A pasan, además de la generatriz rectilínea α, otras dos rectas β y γ que son aristas de haces de planos que producen en la superficie S secciones de curvatura nula en ese punto, es decir, supongamos que la superficie tiene en ese punto un contacto de segundo orden con el plano tangente w_1. Desde luego podemos afirmar que la generatriz rectilínea α, que por él pasa, es singular, puesto que en los puntos de las generatrices ordinarias hemos visto que sólo hay dos rectas que presenten esta circunstancia. Por otra parte, los puntos de las aristas de la superficie son todos parabólicos, á excepción del vértice W que es de

en el plano a' hay, además de la generatriz rectilínea α', otras dos rectas β' y γ' cuyos puntos son vértice de superficies cónicas circunscritas á S y de curvatura infinita en ese plano, es decir, supongamos que la superficie tiene en ese plano un contacto de segundo orden con el punto de contacto W_1'. Desde luego podemos afirmar que la generatriz rectilínea α', que en él está situada, es singular, puesto que en los planos que pasan por las generatrices ordinarias hemos visto que sólo hay dos rectas que presenten esta circunstancia. Por otra parte, los planos que pasan por las aristas de la superficie son todos parabólicos, á excepción del w

retroceso ó de curvatura infinita y del punto J (que puede confundirse con él) de intersección de la generatriz rectilínea con la otra rama de la línea de la superficie situada en el plano w tangente á lo largo de la arista, que es de curvatura nula; por consiguiente, el punto A de que tratamos, será, si la generatriz rectilínea α que por él pasa es arista, el punto de inflexión J correspondiente.

tangente á lo largo de ellas que es de inflexión ó de curvatura nula y del j (á veces confundido con él) que pasa por la arista y es tangente á la otra hoja de la superficie cónica de vértice W circunscrita á la S, el cual es de curvatura infinita; por consiguiente, el plano a' de que tratamos, será, si la generatriz rectilínea α' que en él está situada es arista, el plano de retroceso j correspondiente.

Si así no fuera, la superficie tendría también un contacto de segundo orden con el

plano w_1, tangente en A, además de en este punto, en el punto J_1 de intersección de la generatriz rectilínea α con la línea de la superficie situada en el plano w_1, y, por consiguiente, las tres generatrices rectilíneas α_1, α y α_2 tenderían en el límite al confundirse en una, á estar en ese plano w_1, y pasar por un punto W_1,

punto W'_1, de contacto de a', además de en este plano, en el plano j_1' que pasa por la generatriz rectilínea α', y es tangente á la superficie cónica circunscrita á la dada, y cuyo vértice es el punto W_1', y, por consiguiente, las tres generatrices rectilíneas α_1', α' y α_2' tenderían en el límite, al confundirse en una, á pasar por el punto W_1' y estar en un plano w_1',

confundiéndose, por tanto, las generatrices α y α', así como los puntos W_1 y W_1' y los plano w_1 y w_1', siempre en el supuesto de que la superficie no presente discontinuidad en la generatriz rectilínea considerada.

El contacto de la superficie con el plano w_1 y el punto W_1 es también de segundo orden en todos los demás puntos

de esta generatriz α y planos que por ella pasan, á excepción del

punto W_1, en el cual tienen las líneas de la superficie que por él pasan, un contacto de primer orden con sus tangentes situadas en el plano j_1, aunque, en general, su curvatura presenta en ese punto un salto brusco; y del punto J_1, en el cual tienen las líneas de la superficie que pasan por él, un contacto de tercer orden con su tangente correspondiente.

Las líneas de la superficie situadas en planos que pasan por la generatriz rectilínea α, tienen de retroceso el punto W_1, en el cual su tangente es esta misma generatriz α.

plano w_1, en el cual tienen las desarrollables circunscritas á la superficie tangentes á él, un contacto de primer orden con sus generatrices que pasan por el punto J_1, aunque, en general, su curvatura presenta en ese plano un salto brusco; y del plano j_1, en el cual tienen las desarrollables circunscritas tangentes á él, un contacto de tercer orden con su generatriz rectilínea correspondiente.

Las superficies cónicas circunscrita á la propuesta y cuyos vértices están en la generatriz rectilínea α, tienen de inflexión el plano w_1, en el cual su generatriz rectilínea es esta misma α.

Fácil es deducir, después de lo dicho, las variaciones que se presentan en lo anteriormente expuesto, cuando los puntos W_1 y J_1 se confunden en uno, así como los planos w_1 y j_1, circunstacias correlativas que han de verificarse al mismo tiempo.

Si las tres generatrices rectilíneas α_1, α y α_2 tendieran en el límite, al confundirse en una α, á estar en un plano w_1, pero no á pasar por un punto, esta generatriz rectilínea α presentaría dos vértices W y, en general, dos puntos J

Si las tres generatrices rectilíneas α_1', α' y α'_2 tendieran en el límite, al confundirse en una α', á pasar por un punto W_1', pero no á estar en un plano, esta generatriz rectilínea α' presentaria dos planos w' tangentes á lo largo

distintos, según que se consideren definidos por la generatriz α_1 ó la α_2 en su movimiento de aproximación á la α; y las líneas de la superficie presentarían una discontinuidad en cuanto á los elementos de segundo orden en su punto de intersección con ella, siendo este punto de inflexión ó de retroceso, según que esté en uno ú otro de los dos segmentos que limitan los dos vértices *W*, mientras que las desarrollables circunscritas á la superficie, tendrían esa discontinuidad en los elementos de primer orden también. De modo que, en este caso, la superficíe aparece, en realidad, como compuesta de dos porciones independientes, unidas por esa generatriz; como si se hubieran unido dos porciones de la superficie limitadas por dos aristas distintas, llevando á coincidencia estas aristas y los planos tangentes á lo largo de las mismas.

de ella, y, en general, dos planos j' distintos, según que se consideren definidos por la generatriz α'_1 ó la α'_2 en su movimiento de aproximación á la α'; y las desarrollables circunscritas á la superficie, presentarían una discontinuidad en cuanto á los elementos de segundo orden en su plano tangente que pasa por ella, siendo este plano de retroceso ó de inflecsión, según que esté en uno ú otro de los ángulos que forman los dos planos w', mientras que las líneas de la superficie tendrían esa discontinuidad en los elementos de primer orden también. De modo que, en este caso, la superficie aparece, en realidad, como compuesta de dos porciones independientes, unidas por esa generatriz; como si se hubieran unido dos porciones de la superficie limitadas por dos aristas distintas, llevando á coincidencia estas aristas y los vértices en ellas situados.

Prescindiendo, pues, de este caso, así como de otras singularidades que pueden presentarse en casos especiales en las superficies alabeadas, y limitándonos á las generatrices rectilíneas en cuyo paso no presente la recta que engendra la superficie discontinuidad en su movimiento, podemos decir, como consecuencia de todo lo anteriormente expues-

to, que los puntos y planos tangentes hiperbólicos son los únicos que ocupan porciones finitas de las superficies alabeadas; los puntos y planos tangentes parabólicos constituyen las aristas de la superficie, que, como sabemos, son generatrices rectilíneas aisladas, á menos que la superficie pase á ser desarrollable en alguna de sus porciones, y los

puntos en los cuales el contacto de la superficie con el plano tangente	planos tangentes en los cuales el contacto de la superficie con el punto de contacto

es de segundo orden son puntos y planos tangentes aislados que están y pasan respectivamente por las aristas de la superficie, ó bien, forman series de puntos y haces de planos aislados, cuyas bases y aristas respectivas son las generatrices singulares con las cuales tienden á estar en un plano y pasar por un punto otras dos generatrices rectilíneas que se muevan acercándose hasta confundirse con ellas.

Respecto de la curvatura de la superficie alabeada S en sus puntos y planos tangentes del infinito poco hemos de decir, puesto que se obtiene con sólo introducir en cuanto llevamos dicho esta nueva circunstancia, debiendo tenerse en cuenta que el concepto de radio de curvatura de sus líneas y desarrollables circunscritas (cuando la generatriz rectilinea de éstas, situada en el plano tangente de que se trata sea impropia) ha de sustituirse por el de parámetro de curvatura, que en las superficies cilíndricas es igual al de sus secciones rectas, así como en lugar de la indicatriz y su cilindro proyectante, que en este caso desaparecen, ha de tomarse otro sistema de elementos en la determinación de la cuádrica osculatriz S' que se haya elegido.

Vamos, pues, á hacer tan sólo algunas indicaciones en los diversos casos que pueden presentarse.

Cuando un punto impropio A de una superficio alabeada S y el plano tangente correspondiente a son hiperbólicos, las dos rectas α y α' del plano a, que pasan por el punto A y

tienen un contacto de segundo orden con dicha superficie, pueden ser las dos propias, una propia y otra impropia, ó las dos impropias; en el primer caso, las cuádricas osculatrices son hiperboloides alabeados, y, en los otros dos, paraboloides hiperbólicos, siendo en el último el punto A el de contacto con el plano del infinito. Para acabar de determinar una cuádrica S' de éstas, se puede, como sabemos, fijar otro punto B con el plano tangente correspondiente b, conviniendo elegir estos elementos de modo que se simplifique lo más posible el estudio de la curvatura. En el primer caso se puede tomar para punto B la dirección normal al plano asintótico a, y el plano b perpendicular á la dirección A. Entonces

las secciones normales del hiperboloide S' que pasan por el punto A son hipérbolas equiláteras y su curvatura en ese punto tiene dos mínimos iguales á cero para las secciones cuyos planos pasan por las rectas α y α', y á partir de ellas va aumentando, por un lado hasta un máximo, que corresponde á la sección cuyo plano equidista de estas dos rectas, que es una sección principal de la cuádrica, y por el otro indefinidamente con la distancia del plano secante á dichas rectas.

los conos circunscritos al hiperboloide S' cuyos vértices están en la recta ab, que es uno de sus ejes, tienen las dos generatrices situadas en uno de sus planos pricipales, perpendiculares entre sí, y su curvatura en el plano a tiene dos máximos iguales á infinito, para los conos cuyos vértices están en las rectas α y α', y á partir de ellos va disminuyendo por un lado hasta un mínimo, que corresponde al cono cuyo vértice equidista de estas dos rectas, que es el cono asintótico de la cuádrica, y por el otro indefinidamente con la distancia del vértice del cono á dichas rectas.

Para determinar este hiperboloide se puede tomar, además del punto A y plano asintótico a,

una de las secciones principales producidas por los planos bisectores de los ángulos que forman los planos a y b, ó mejor, las dos secciones, que hacen entonces el papel de la indicatriz, puesto que el segmento real que en ellas determina un plano secante, nos da la longitud de los ejes de la hipérbola sección, cuya curvatura en el punto considerado es por definición proporcional á esta longitud.

uno de los cilindros circunscritos de generatrices paralelas á las bisectrices de los ángulos que forman las direcciones A y B, ó mejor, los dos cilindros, que hacen entonces el papel del cilindro proyectante de la indicatriz, puesto que el par de planos tangentes reales trazados á estos dos cilindros desde un punto de la recta ab nos da inmediatamente las dos generatrices situadas en un plano principal del cono circunscrito de vértice en este punto, y con ellas su curvatura en el plano tangente considerado, ya que las dos generatrices reales, situadas en el otro plano principal que las determina son, como sabemos, perpendiculares entre sí.

Cuando la cuádrica osculatriz es un paraboloide y el punto A no es el de contacto con el plano del infinito, se puede tomar también para punto B la dirección perpendicular al plano a y el plano b normal á la dirección del punto A, con lo cual

las secciones normales que pasan por este punto son hipérbolas equiláteras, cuya curvatura en él tiene un mínimo igual á cero para la sección que pasa por la recta propia de las dos α y α', y á partir de ella crece indefinidamente con la distancia del

los conos circunscritos cuyos vértices están en la recta ab, que es el eje del paraboloide, tienen las dos generatrices situadas en uno de sus planos principales perpendiculares entre sí y su curvatura en el plano a tiene un máximo igual á infinito para el cono

plano secante á esta recta propia.

cuyo vértice está en la recta propia de las dos α y α', y á partir de él decrece indefinidamente con la distancia del vértice del cono á esta recta propia.

Para determinar este paraboloide se pueden también tomar, junto con el punto A y el plano a, y en sustitución

de la indicatriz, las secciones principales producidas por los planos bisectores de los ángulos que forman los planos a y b, las cuales nos dan inmediatamente, como en el caso anterior, la longitud de los ejes, y, por consiguiente, el valor de la curvatura, de la sección considerada.

del cilindro proyectante de la indicatriz, los cilindros circunscritos de generatrices paralelas á las bisectrices de los ángulos que forman las direcciones A y B, de cuyos planos tangentes que pasan por un punto de la recta ab, se deduce inmediatamente, como en el caso anterior, la curvatura del cono circunscrito cuyo vértice es este punto.

Finalmente, si el plano a es el del infinito, el punto B ha de ser propio, siendo indiferente su posición; si se toma el plano b normal á la dirección A, el punto B será el vértice del paraboloide y

las secciones del mismo, que pasan por los puntos A y B son parábolas, cuya curvatura en el primero de estos puntos tiene dos mínimos iguales á cero para las secciones cuyos planos pasan por las rectas α y α' y dos máximos para las producidas por los planos bisectores de los ángulos que forman

los cilindros circunscritos al mismo, cuyos vértices están en los planos a y b, son parabólicos, teniendo su curvatura en el primero de estos planos dos máximos iguales á infinito para los cilindros cuyos vértices están en las rectas α y α' y dos mínimos para los que tienen sus generatrices paralelas á las bisec-

los planos de las dos secciones anteriores.

trices de los ángulos que forman las direcciones de las generatrices de los dos anteriores.

Para definir este paraboloide se pueden fijar los parámetros de sus dos secciones principales, pero es más sencillo para el estudio de la curvatura en el punto considerado, tomar

las secciones hiperbólicas producidas por dos planos paralelos al b y equidistantes de él, las cuales, proyectadas normalmente sobre este plano, equivalen á la indicatriz ordinaria, puesto que el segmento real que en ellas determina un plano secante que pase por la recta AB, junto con la distancia de este par de planos al b, determina inmediatamente el parámetro de la sección parabólica producida por dicho plano secante y su curvatura en el punto A, que es la inversa de su parámetro.

los conos circunscritos cuyos vértices sean dos puntos de la recta AB equidistantes del B, los cuales equivalen al doble cilindro proyectante de la indicatriz ordinaria de un punto hiperbólico, puesto que el ángulo de sus dos planos tangentes reales trazados por un punto de la recta ab, junto con la distancia de este par de puntos al B, determina inmediatamente el parámetro del cilindro parabólico, cuyo vértice es aquel punto de la recta ab, y su curvatura en el plano del infinito, que es inversa de su parámetro.

En el caso de un

punto impropio parabólico A con plano tangente propio w, puede suceder que la arista α que por él pasa sea propia ó impropia. Cuando es propia, las cuádricas osculatrices son conos, y para fijar uno de ellos se puede

plano tangente parabólico a', cuyo punto de contacto W' sea impropio, puede suceder que la arista α' en él situada sea propia ó impropia. Cuando es propia, las cuádricas osculatrices se reducen á hipérbolas, y para fijar una de

tomar para punto B la dirección perpendicular al plano w y el plano b normal á la dirección A, con lo cual sus secciones normales que pasan por este punto son hipérbolas equiláteras, cuya curvatura en él va aumentando indefinidamente cuando el plano secante se aleja por uno y otro lado de la posición en la cual pasa por la arista α, para la cual esta curvatura es nula. La curvatura de la superficie S en el punto A queda, pues, definida por el ángulo de las genetrices de este cono situadas en uno de sus planos principales distintos del αB.

Cuando la arista α es impropia, las cuádricas osculatrices son cilindros hiperbólicos y las secciones normales que pasan por el punto A del cilindro determinado tomando el punto B y plano b en la misma posición que en el caso anterior, son hipérbolas equiláteras, iguales entre sí, de modo que la curvatura de la superficie propuesta en el punto A está dada con sólo fijar el parámetro ó semieje de estas hipérbolas, que son las secciones rectas ellas se puede tomar un plano tangente b' normal á la dirección W' y para su punto de contacto la dirección B' perpendicular al plano a', con lo cual sus conos proyectantes tangentes á los planos b' y a', tienen sus generatrices situadas en su plano principal paralelo al $\alpha' B'$ perpendiculares entre sí, y su curvatura en el plano a' va dismuyendo indefidamente cuando el vértice del cono se aleja por ambos lados de la posición situada en la arista α', para la cual esta curvatura es infinita. La curvatura de la superficie S en el plano a' queda, pues, definida por la longitud de un semieje de esta hipérbola.

Cuando la arista α' es impropia, las cuádricas osculatrices se reducen á parábolas y los conos tangentes á los planos a' y b' y proyectantes de la parábola determinada tomando el plano b' y punto B' en la misma posición que en el caso anterior, son iguales entre sí y tienen las dos generatrices situadas en estos dos planos perpendiculares entre sí, de modo que la curvatura de la superficie propuesta en el plano a' está dada con sólo fijar el ángu-

del cilindro osculador tomado.

lo que forman las generatrices de estos conos situadas en uno de sus planos principales que pasan por la recta $a'b'$.

Supongamos, finalmente, que sean del infinito

el punto parabólico A y el plano tangente en él w; la arista α estará también en el infinito y las cuádricas osculatrices serán cilindros parabólicos. El punto B ha de ser en este caso propio, pero su posición es indiferente; tomando el plano b perpendicular á la dirección A, las secciones que, en el cilindro osculador determinado por el punto B y plano b, producen los planos que pasan por los puntos A y B, son parábolas cuyo vértice es este punto y cuya curvatura en el A presenta un máximo para la posición del plano secante en que es perpendicular á la arista α, y un mínimo, igual á cero, para la posición en que pasa por dicha arista. La curvatura de la superficie S en el punto A, puede determinarse, en este caso, por la sección que en este cilindro osculador produce un plano paralelo al b, y que está á una distancia dada de él; esta sección, como la in-

el plano tangente parabólico a' y su punto de contacto W'; la arista α' estará también en el infinito y las cuádricas osculatrices se reducirán á parábolas. El punto B' ha de ser en este caso propio, pero su posición es indiferente; tomando el plano b' normal á la dirección W', los cilindros que proyectan la parábola osculatriz determinada por el plano b' y punto B', desde los puntos de la recta $a'b'$, son parabólicos, teniendo sus planos diametrales perpendiculares al b', y su curvatura en el plano a' presenta un mínimo para el cilindro de generatrices normales á la orientación α' y un máximo, igual á infinito, para el de generatrices paralelas á esta orientación. La curvatura de la superficie S en el plano a', puede determinarse, en este caso, por el cilindro circunscrito á esta parábola osculatriz y cuyo vértice está en la recta $W'B'$ á una distancia dada del pun-

dicatriz ordinaria en el caso de un punto parabólico propio, se compone de dos rectas paralelas, desempeñando un papel análogo al de aquella.

Los cilindros circunscritos á la superficie S y tangentes al plano w, no presentan, en todos estos casos, circunstancia especial alguna respecto de su curvatura en él, puesto que, como sabemos, ésta es constantemente nula.

to B'; este cilindro, como el proyectante de la indicatriz en el caso de un plano tangente parabólico con punto de contacto propio, se compone de dos rectas y desempeña un papel análogo al de éste.

Las secciones de la superficie S que pasan por el punto W', no presentan en todos estos casos, circunstancia especial alguna respecto de su curvatura en él, puesto que, como sabemos, ésta es constantemente infinita.

Lo mismo ocurre con los puntos y planos tangentes que están y pasan, respectivamente, por las generatrices singulares, que son límite de tres generatrices que, al acercarse, tienden á pasar por un punto y estar en un plano, en los cuales la curvatura de las líneas de la superficie y desarrollables circunscritas á ella es constantemente nula é infinita, respectivamente, por lo cual no nos detendremos en detallar las diversas posiciones que respecto del plano del infinito pueden ocupar estos puntos y planos tangentes.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XI.— Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia primera 257

XII.— Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia segunda 274

XIII.— Método para la extracción de raíces de los números sin el auxilio de logaritmos, por *Vicente Ventosa*.... 292

XIV.— Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Miukoswki, por *B. Cabrera*..... 326

XV.— Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general (continuación), por *Antonio Torroja y Miret*..... 345

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NUMERO 6.
DICIEMBRE DE 1912.

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 3.
1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XVI.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

Por José Echegaray.

Conferencia tercera.

Señores:

He dicho ya en las dos conferencias precedentes, que la materia en que íbamos á ocupar las de este curso era la relativa á las *ecuaciones de la Mecánica.*

En forma más concreta: *Las ecuaciones generales de Lagrange y las formas canónicas de Hamilton*, que de aquéllas se derivan.

Y aunque al parecer en este programa sólo á la Mecánica se hace referencia, no por eso ha de creerse, que se halla fuera de la materia propia de esta asignatura, que es la Física Matemática.

Tal afirmación la hemos confirmado plenamente en las conferencias anteriores.

Lo hemos dicho ya con repetición, que acaso parezca cansada, y aun así he de repetirlo otras muchas veces.

La empresa que pretendo realizar en esta clase, al menos hasta donde pueda, es explicar en ella y publicar después algo así como una enciclopedia elemental de Física Matemática clásica y de Física Matemática moderna.

Pero la Física Matemática clásica, casi en su totalidad, en

la hipótesis mecánica se apoya; luego los problemas generales de la Mecánica no están fuera de su lugar en estas conferencias de Física Matemática.

Y por lo que se refiere á la Física Matemática moderna, á pesar de que pretende emanciparse en absoluto de la hipótesis mecánica, no lo consigue tan por completo como algunos autores imaginan.

Así en la conferencia anterior precisamente citábamos el ejemplo del admirable matemático M. Poincaré, aplicando, en su gran obra sobre *electricidad* y *magnetismo*, varias veces, y en particular al exponer la teoría de Lorentz; aplicando, repetimos, las ecuaciones generales de Lagrange á la demostración de algunas de las fórmulas fundamentales del célebre autor.

De modo que las ecuaciones generales de la Mecánica pueden estudiarse sin violencia en esta clase que desempeño, por lo que se refiere á la Física Matemática clásica; pues la Mecánica constituye su jugo y su esencia, y todos sus problemas son problemas de Mecánica.

Y en cuanto á la Física Matemática moderma, como acabamos de ver, no han conseguido aún las nuevas teorías expulsar del todo á la vieja Mecánica del campo de las nuevas lucubraciones físico-matemáticas.

Pero bien sabemos que contra la Mecánica clásica se ha levantado formidable cruzada en estos últimos tiempos.

La Física Matemática moderna tiene un doble aspecto. Una parte positiva y una parte negativa. Lo que pretende construir y lo que pretende arruinar. Lo que de hecho edifica, precisamente con la ayuda de esa misma Mecánica, de la cual ciertas escuelas abominan; y lo que pretende destruir del todo sin conseguirlo en absoluto.

De tentaciones hablábamos en la primera conferencia de este curso; y es que fuertes tentaciones me asaltan para hacer, si vale la palabra, la crítica de la crítica; que la crítica moderna ni es inviolable ni es invulnerable, aunque yo re-

conozca que, á pesar de sus exageraciones, está prestando un gran servicio á la ciencia.

Mas á pesar de todo, no está de más el pretender apagar un tanto sus arrogancias.

Sin embargo, por hoy no es posible, que del todo me convierta en crítico: sería separarme mucho del camino que me he propuesto seguir.

De todas maneras, para cuando llegue su día, si llega, he de dejar aquí consignadas, á modo de lista ó mera enumeración, las principales negaciones que contra la Mecánica clásica se han formulado en estos últimos años.

Para que así conste, que con pleno conocimiento de causa, y á pesar de todo, creo conveniente consagrar las conferencias de este curso al tema ya indicado: *Ecuaciones generales de la Mecánica.* No abandono, pues, á la vieja Mecánica.

*
* *

Si estas conferencias llevaran títulos especiales; si estuviera formando una obra didáctica, dividida en capítulos, esta conferencia de hoy, convertida en capítulo, debería llevar este título: *Serie de negaciones.*

Cada negación de éstas á que me refiero, y que la crítica moderna formula, es un golpe de picota contra la Mecánica clásica, y no hay que negarlo, muchos de estos golpes levantan nubes polvorientas de cascotes.

Empecemos la enumeración, y en todo lo posible abreviemos los comentarios, que materia hay, no para dar una conferencia, sino para escribir un libro, y un libro voluminoso.

La vieja Mecánica había dicho: La materia atrae á la materia *según la ley newtoniana, ó al menos las cosas pasan como si esta atracción fuera una realidad.*

Y aquí la crítica establece su primera negación: *No; la materia á través del espacio, saltando por el espacio, por de-*

cirlo de este modo, no puede atraer á la materia á distancia. El suponerlo es un error, un atentado contra la lógica; ante el sentido común es un imposible. ¿Cómo la materia ha de hacer nada allí donde no está? Estas, se dice, son fórmulas huecas de la Metafísica, un injerto de espiritualismo en el seno de los fenómenos naturales.

La atracción entre la materia y la materia no existe, ni como hipótesis provisional puede aceptarse. Será un simbolismo matemático cómodo para el cálculo, pero nada más; pero si es cómodo es peligroso, porque infunde en los cerebros ideas de todo punto falsas. Así afirman muchos.

Esto tiene fuerza, lo reconozco; pero si la afirmación es extraña, la negación no es evidente. De todas maneras, hoy no la discutimos; hoy enumeramos tan sólo negaciones.

Y esta es la primera *negación*: *La acción á distancia no existe.*

***

No sólo no existe esta acción, que antes se llamaba acción á distancia, sino que suponiendo, que la materia ejerza alguna acción sobre la materia, ésta *no es instantánea.*

Nueva negación, que casi es una consecuencia de la primera.

En la antigua Mecánica newtoniana, un punto material cualquiera, una gota de agua del Océano, un grano de arena del desierto, una hoja de un árbol, atraían á sí al Universo entero, ejercían atracción sobre cualquier elemento del sol, sobre cualquier elemento de Neptuno, sobre la partícula de la más lejana nebulosa.

Y estas atracciones eran *instantáneas,* no tardaban en llegar, *estaban presentes* en todo momento y en todo el espacio.

Las atracciones disminuían con la distancia; pero eran superiores al tiempo.

Tal soberana concepción del entendimiento, será ó no será cierta, pero era grandiosa y afirmaba la solidaridad del *Cosmos* en todo instante, como si el tiempo no existiera.

Hoy, por el contrario, se supone, que para que un elemento de materia ejerza su acción sobre otro, esta acción necesita caminar como viajero, que sale de una estación y á otra llega al cabo de algún tiempo.

En suma, las acciones, todas las acciones, se transmiten con determinadas velocidades. Esto se afirma hoy.

Se comprende en dicha hipótesis, que tan hipótesis es como la primera, que las acciones de ciertos elementos del *Cosmos,* aun transcurriendo miles y miles de siglos, pueden no haber llegado todavía á nosotros.

Casi me atrevería á decir, que el *Cosmos* está condenado á no conocerse á sí mismo nunca.

Suponiendo que sea infinito, que negando el infinito, claro es que la dificultad desaparece.

Tenemos, pues, la segunda negación.

Las acciones materiales se transmiten con determinadas velocidades de modo que no son instantáneas.

*
* *

En la hipótesis newtoniana, si un átomo simple de materia, desde Júpiter atraía á otro átomo de nuestro globo terráqueo, la acción entre ambos se efectuaba *en linea recta,* en la que unía ambos puntos.

Por eso se decía en la antigua Mecánica, al tratar de estas atracciones, que eran *centrales.*

Eran, pues, *acciones á distancia, instantáneas* y *centrales.*

Hoy no se considera como evidente, que la acción entre dos puntos sea central.

Precisamente, para librarse de esta condición, ha escrito M. Poincaré su teoría de la elasticidad.

Y bien mirado, si la acción de un elemento material sobre otro no es directa, sino transmitida, tardándose cierto tiempo en la transmisión, las acciones centrales podrán existir, pero no son necesarias.

Un viajero que sale de Madrid y entra en Toledo, en el camino puede cambiar de dirección muchas veces, y puede entrar en Toledo en una dirección cualquiera, que no es preciso que prolongada pase por el centro de Madrid.

Tenemos, pues, una tercera negación.

La acción entre dos elementos materiales no es necesariamente central.

Y sin necesidad de acudir á la crítica moderna, á una consecuencia análoga llegábamos en el primer año de estas conferencias, al estudiar la acción de un elemento de corriente sobre un polo magnético.

Esto aun admitiendo la acción á distancia: basta que los dos elementos que se atraen, ó mejor dicho, que están en presencia, sean complejos, y que los elementos de uno y otro estén sujetos, á la vez, á atracciones y repulsiones *no simétricas.*

Pero no hemos de detenernos aquí en puntos, que creemos haber explicado suficientemente.

Pasemos á otra negación de esta serie indefinida de negaciones.

En muchos problemas de la vieja Mecánica se suponía, al menos como abstracción y para simplificarlos, que el espacio estaba vacío, que era un espacio puramente geométrico, inerte; por lo tanto, sin propiedades físicas.

Era el espacio y nada más que el espacio.

Quizás por esto era forzoso admitir la acción á distancia, sin el intermedio de sistemas materiales, porque una de dos: si el espacio estaba vacío, ó unos astros no podían influir sobre otros, ó sus acciones recíprocas tenían que dar un salto instantáneo, si vale la palabra, á través del espacio vacío y puramente geométrico.

Más tarde, mucho antes de que llegaran los modernísmos físicos que hoy dominan, hubo que admitir el éter y rellenar el espacio de este modo.

Hoy se niega el espacio vacío, y por eso se introduce en la Física Matemática moderna el concepto general de *campos, ya eléctricos, ya magnéticos.*

Antes los problemas de Física Matemática eran, en cierto modo, problemas de *influencias individuales:* acción de una masa ponderable sobre otra masa ponderable; acción de un conductor eléctrico sobre otro conductor eléctrico, cargados ambos de electricidad; acción de una corriente eléctrica sobre otra corriente eléctrica; acción de un polo sobre una corriente, ó al contrario.

Y del espacio que mediaba de una de estas entidades ó individuos á otra, se prescindía casi en absoluto. Cuando más se tenía en cuenta *para dibujar*, por decirlo así, en dicho espacio geométrico, magnitudes matemáticas, que sólo eran reales al llegar á los individuos ponderables, eléctricos ó magnéticos.

Era, si se me permite la comparación, una ciencia eminentemente individualista.

Hoy el punto de vista ha cambiado en absoluto.

A estas entidades físicas, á veces, casi se las pone en olvido, y lo que importa es establer las ecuaciones de los *campos* intermedios, magnéticos, elétricos, ó lo que fueren.

Se abre un libro de la ciencia antigua, y se ve, que lo que se buscan son las condiciones mecánicas de estos individuos aislados de la Física: la velocidad del planeta, la repartición eléctrica sobre el conductor, la corriente que circula por el hilo, la fuerza que solicita al polo magnético.

Hoy no diré que todo esto se desdeñe; pero si se abre un libro moderno de Física Matemática á la casualidad, lo probable es que se encuentren las ecuaciones electromagnéticas *de un campo:* la muchedumbre sobre el individuo, la masa general sobre el elemento individual.

Casi me atrevería á decir, y es atrevimiento repetido, porque muchas veces lo he dicho, que la ciencia moderna tiene carácter socialista y esta idea con más amplitud la desarrollé hace dos ó tres años en mi discurso de Valencia.

En suma: *Se niega el espacio vacío.*

Y tal negación es de las que impone la realidad, dado que otras muchas negaciones de la nueva serie sean discutibles.

*
* *

Negar el vacío total (de todo el espacio) ó parcial (en una extensión limitada) es admitir la continuidad absoluta de la materia, bajo una ú otra forma; de las substancias materiales y de los flúidos pudiéramos decir también.

Y en rigor es una consecuencia de la negación primitiva, á saber: de aquella que negaba la acción á distancia.

Porque si los cuerpos no pueden actuar á distancia, será preciso que sus acciones se comuniquen por algún intermedio material, que sin interrupción se extienda de unos á otros.

Luego el universo es preciso que esté lleno de una *substancia continua*; por ejemplo, que esté lleno por el éter, y lo más que puede admitirse es que este flúido contínuo tenga algunos huecos vacíos con vacío absoluto.

Pero que no aislen nunca unas partes de otras, porque las partes aisladas, aisladas quedarían del Universo.

Verdad es que la comunicación podría establecerse por el movimiento, viajando masas de substancias por el vacío y poniéndose sólo en comunicación por *choques parciales.*

Con todas estas ideas, combinadas de diversos modos, se han formulado multitud de hipótesis, que no podemos discutir aquí y que sólo iremos discutiendo parcialmente á medida que en nuestro camino las encontremos.

Digamos, en resumen, que se ha negado el vacío y que esta negación equivale á una afirmación: la de la continuidad.

Pero recientemente, como puede verse en un artículo curiosísimo de Mr. Poincaré, la misma continuidad se niega por una serie sorprendente de negaciones.

Negación de la continuidad de la fuerza: á la fuerza se le aplica la teoría atómica de la materia y la teoría atómica de la electricidad.

Y á la teoría atómica de la fuerza sigue la teoría atómica de la *energía,* y su *división en átomos;* y por este camino en un verdadero vértigo de discontinuidad se pudiera llegar á la teoría atómica del tiempo.

De modo, que en este proceso, se niega la continuidad, se establece la discontinuidad por principio, y cuanto existe, cuanto se concibe, se descompone en *átomos,* y es de suponer que entre átomo y átomo reinará el vacío; porque como reine y se extienda algo, en átomos ha de descomponerse también.

Así, á los átomos ya clásicos de la Química, siguen los átomos de electricidad positiva y negativa: los electrones de Lorentz.

Y á éstos, los átomos de fuerza.

Y á éstos, los átomos de energía.

Y á éstos, los átomos del tiempo.

Es la atomicidad universal.

Mejor dicho, la pulverización universal, por la cual se llega á la negación de toda energía, que una, ligue, trabe y organice.

Pero no vamos discutiendo estas fantásticas hipótesis; vamos haciendo tan sólo, en esta conferencia, una enumeración de *negaciones.*

A la afirmación de la continuidad absoluta, opónese la pulverización de cuanto existe, que es la *negación absoluta de la continuidad.*

*
* *

Pero no se detienen aquí las que pudieran llamarse negaciones sistemáticas; aún nos quedan muchas, que entregar á la curiosidad de nuestros oyentes.

Y es lo curioso, en efecto, que estas *negaciones* no se formulan en nombre de tal ó cual filosofia; que á las negaciones filosóficas ya está acostumbrada la razón humana desde los tiempos de Grecia y aun desde los tiempos de las civilizaciones orientales.

No; todas las negaciones que vamos enumerando se formulan en nombre de la ciencia positiva; á veces con el apoyo real ó pretendido de la experiencia, aunque á veces también con ciertas reminiscencias filosóficas y ciertos impulsos de excepticismo.

Se trata, en verdad, de una reacción crítica, formidable, contra la ciencia del siglo XIX.

Cierto es que la ciencia positiva sigue impasible su camino; pero no fuera justo, y acaso no fuera conveniente, prescindir de los empeños destructores de ciertas escuelas.

Mas sigamos con la tarea de hoy: sigamos haciendo la lista de nuevas y nuevas negaciones.

No se niega el movimiento, y no se niega la velocidad; pero á estos dos conceptos se oponen dos negaciones que son *desconcertantes,* y ya creo haber empleado otra vez esta palabra, para todos los que se educaron en la ciencia clásica, é hicieron sus primeras armas en los campos tan luminosos por entonces de la vieja Mecánica, aunque hoy espesamente enturbiados con la polvareda de la duda, que cierra á toda luz los horizontes.

Una negación de las indicadas *se refiere* á la *velocidad.*

Suponen algunos, que en la Naturaleza no pueden existir velocidades superiores á la velocidad de la luz que es de

300.000 kilómetros por segundo.

Es una buena velocidad, no hay que desconocerlo, y hasta llegar á ella queda buen depósito disponible; pero las razo-

nes que algunos dan, para suponer, que no pueden existir velocidades superiores á ésta de la luz, jamás han llevado el convencimiento á toda inteligencia.

Tenemos, de todas maneras, esta negación:

No puede haber velocidades superiores á la velocidad de la luz.

La *segunda negación* de las dos, que ahora vamos señalando, se refiere al movimiento mismo.

No se niega, como el filósofo griego, que el movimiento exista; pero *se niega que exista el movimiento absoluto.*

O por lo menos, se niega á la inteligencia el derecho de pensar y discurrir sobre el movimiento absoluto.

¡Cuántos capítulos de la vieja Mecánica habría que suprimir ó habría que modificar profundamente, si se aceptase como buena esta última negación!

Lo único que ha de reconocerse, es, que cuando la inteligencia humana de lo infinito y de lo relativo, pasa ó pretende pasar á lo infinito y á lo absoluto, la inteligencia se siente á la vez en la obscuridad y deslumbrada; atraida y rechazada á la vez; solicitada por afirmaciones y negaciones; abrumada, anonadada casi; y con nuevos impulsos de volar, y envuelta en el vago y poderoso torbellino de la Metafísica.

Como en esta conferencia hemos de limitarnos á enumerar negaciones de la crítica moderna sin pretender discutirlas, ni oponer á la crítica, la crítica de la crítica misma, que sería algo así, dado que se consiguiese, como dar al maestro cuchillada, suponemos escritas en nuestro catálogo negativo estas dos nuevas negaciones, y á señalar otras más pasamos sin tomar aliento.

***

Uno de los conceptos fundamentales de la vieja Mecánica, ó precisando más, de la vieja Dinámica, que es donde aparece, es el concepto de *inercia.*

Se suponía en la Mecánica clásica, que la materia ponderable era, al mismo tiempo activa é inerte; contradicción que la crítica moderna ha explotado sin escrúpulo para sus negaciones.

La materia se decía que era activa, porque atraía á la materia, ó las cosas pasaban como si la atrajese; de modo que es activa ó lo aparenta.

Toda la Astronomía se fundaba en esta hipótests: en la hipótesis newtoniana. Y se admitió más tarde, que la materia ponderable no sólo atrae á la materia, sino también á los flúidos eléctricos y magnéticos. ¿Es que hoy mismo no admiten muchos esto mismo?

Era necesaria esta nueva hipótesis, para que no quedasen completamente aislados, como dos continentes con el vacío por Océano entre uno y otro sin comunicación real, ni relaciones físicas, estos dos mundos. Por una parte, decimos, *el mundo de la materia ponderable,* con sus fenómenos; por otra parte el de la electricidad con los suyos, y del magnetismo no hablamos por ahora.

Pero si se admite que la materia y la electricidad se atraen, ya hemos echado un puente entre una y otra región, entre uno y otro mundo de fenómenos.

Sobre esta nueva hipótesis nunca han sido muy explícitos los autores, ni podemos por ahora detenernos á discutirla.

Sólo queremos hacer constar que, por lo pronto, en la Ciencia clásica, la materia ponderable, cada elemento de materia, por decirlo así, era un centro de *atracción* y *de energía.*

Primer término de contradicción, que vamos á señalar, para la crítica moderna.

El segundo término de la contradicción ó de la supuesta contradicción, porque ciertas sentencias de la crítica no hay que tomarlas como definitivas, y contradicciones señala que bien pudieran ser puramente verbales; el segundo término, repetimos, es éste:

La materia es inerte. Una esferilla homogénea de materia

ponderable no puede moverse por sí, y si está en movimiento no puede detenerse por sí tampoco; necesita que una fuerza exterior actúe sobre ella, ó para moverla, ó para cambiar su movimiento.

Por eso se decía que la materia era inerte. Resulta que es *activa* é *inerte*.

Y esta inercia se acentúa, y por decirlo así se gradúa y se mide en el movimiento mismo.

La materia ponderable, para ponerse en movimiento, consume fuerza, si vale la palabra; y cuanto mayor es la velocidad que se le quiere comunicar, más fuerza se consume.

En este orden de ideas se ha empleado una frase, que es enérgica, pero que no parece adecuada: se habla, pues, en todos los libros de Mecánica, de la *fuerza de inercia*.

No creo que el empleo de esta frase aclare mucho el problema.

Basta decir, que para el movimiento de la materia, se necesita el empleo de fuerzas exteriores; exteriores, repetimos, á estas masas cuyo movimiento se solicita.

De todas maneras, resultan estos dos términos, que la crítica moderna censura; á saber: que la materia es activa fuera de sí, y puede poner en movimiento otras cantidades de materia distintas de la suya.

Y que si por fuera es *activa*, en cierto modo, por dentro es *inerte*.

Si se me permite una frase vulgar, recordaré aquella que se emplea para juzgar el carácter de ciertas personas que son *placer de casa ajena*.

Así planteado el problema, la crítica tiene donde ensañarse, y sin discutir sus negaciones, hoy nos limitamos á catalogar sus estragos.

***

Para que nuestras explicaciones sean aún más claras, á los dos conceptos anteriores, es decir, á la *materia* y á la

inercia, debemos agregar otro, que con aquéllos está enlazado y aun de ellos se desprende.

A la idea de *masa* va unida la idea de *materia,* y aun en cierta forma vaga, al pensar en la masa se piensa en una *cantidad mayor ó menor de materia.*

Y casi nos atreveríamos á decir que la idea de masa implica en cierto modo la unidad de materia, es decir, la materia única.

Todo esto en forma vaga, indecisa, son, por decirlo de este modo, nubes que flotan en el entendimiento.

Pero la idea de *masa,* como la idea de *fuerza,* se precisan y se concretan en la Física clásica, porque tienen medida y unidad, y se reducen á números.

Sea como fuere, no hemos de detenernos en explicar estos diferentes conceptos, que son conceptos de Mecánica elemental.

Diremos tan sólo que en la Mecánica clásica, como en la Física tradicional, como en la Química, si había una afirmación sólida, inquebrantable, metafísicamente inquebrantable, y experimentalmente inquebrantable también, era ésta:

La masa de un cuerpo es una cantidad constante: ó abreviadamente: *la masa es constante.*

Podrá dividirse, pero la suma de las masas será igual á la masa de la suma.

La Mecánica, la Física, la Química, todo el mundo inorgánico, se apoyaba sobre esta base fundamental é indestructible.

En el fondo palpitaba esta idea:

En el Universo nada se crea, nada se anula.

Sólo que esta idea era vaga y de esencia metafísica: en cambio la constancia de la masa era ley numérica y de fundamento experimental.

Pues bien: la crítica moderna, y diremos más, la experimentación moderna, formulan aquí una nueva y tremenda negación.

No; la masa de los cuerpos no es constante, la masa de los cuerpos varía.

Así dicho, para el hombre de ciencia á la antigua, esta negación no es sólo formidable, es disparatada y absurda.

Pero quitando á la negación su aspecto paradógico, queda un residuo que puede explicarse racionalmente, y sobre esto algo hemos dicho en las conferencias de otros cursos.

Por ahora nos limitamos á consignar, en nuestro catálogo de negaciones, esta negación más de la crítica moderna: *La masa no es constante.*

***

Más aún: la inercia de las masas ponderables ni es constante ni es la única del mundo inorgánico.

Aparte de la inercia de las masas ponderables, existe la que podemos llamar la *inercia eléctrica*, que se explica por los fenómenos de *inducción*, sin necesidad de admitir para la electricidad una inercia análoga á la de las masas ponderables.

Y esta inercia eléctrica tampoco es constante, ni la masa *ficticia* que acompaña á esta inercia es constante tampoco, porque depende de la velocidad del movimiento.

Esto puede, en cierto modo, servir de explicación á las negaciones precedentes.

En efecto, al fin y al cabo todo cuerpo que se mueve, exceptuando en hipótesis modernísimas, es un complejo de materia ponderable y de electricidad.

El movimiento de la parte eléctrica, si la velocidad es comparable á la de la luz, determina algo así como una inercia adicional y cambia el valor de la masa aparente.

Precisamente por este motivo no es legítimo aplicar las ecuaciones clásicas de la Dinámica al movimiento de los

cuerpos, cuando sus velocidades son comparables á la de la luz.

Para estos casos se ha creado precisamente la Dinámica del electrón.

De todas estas teorías y de todos estos problemas llegará día, si llega, que tratemos detenidamente.

Por el pronto, á nuestras negaciones, ó mejor dicho, á las negaciones ajenas nos atenemos, y decimos escribiendo una negación más:

La inercia de la materia ponderable no es la única: existe la inercia eléctrica.

La masa eléctrica tampoco es constante; depende de la velocidad.

*
* *

Podrá la inercia no ser constante, pero la inercia en el orden físico, como en el orden moral, existe en grande ó en pequeño, y por eso en la Física, como en el orden moral, ha de contarse con la velocidad adquirida; y por eso cuando se adquiere cierta velocidad no es fácil destruirla de pronto.

Viene la crítica acumulando negaciones, y adquirida esta fuerza viva de destrucción, no es fácil que á su vez se detenga hasta llegar á la destrucción universal.

Y así llegamos á dos nuevas negaciones, en las que una es consecuencia de la otra, á saber:

La negación del átomo y la negación de la materia ponderable.

Empecemos por la más pequeña, que con ser la más pequeña es inmensa y con la más grande se confunde.

Se había creído siempre que el átomo de los cuerpos simples, por ejemplo, el átomo de oxígeno, el de hidrógeno, el de carbono, el de ázoe y así sucesivamente, eran los últimos elementos de la materia y que eran indeformables, indestructibles, eternos.

Representaban en cierto modo la inmortalidad de la materia.

Su origen etimológico estaba en armonía con la esencia, que en el átomo admitían físicos y químicos: *Atomo, lo que no puede cortarse, lo que no puede dividirse, lo que, por lo tanto, no puede destruirse, ni corromperse, ni deshacerse nunca.*

El átomo de cada cuerpo simple tenía ciertas propiedades que lo definían, una individualidad bien definida, una individualidad bien determinada.

Era lo que era *porque sí*, y nadie pudo explicar por qué era como era.

Ni nadie pretendía explicarlo, como no fuera algún idealista en sus desenfrenos de idealismo; ni los físicos, hablando en general, intentaban descomponerlo.

Era una hipótesis la del átomo, y era una hipótesis la de la teoría atómica, que prescindiendo de la resistencia de ciertos espíritus de eterna rebeldía, se habían impuesto en la ciencia por su sencillez, por su fecundidad, por los prodigiosos servicios que no ya á la teoría, sino á la ciencia práctica y experimental, habrían prestado.

Dígalo si no toda la Química orgánica.

Pues la crítica moderna no se detiene ante el átomo.

El átomo, en las nuevas teorías, no es un elemento simple é indestructible; última expresión y expresión eterna de la materia: es un sistema de enorme complicación, como puede verse en el átomo esquemático de Thomson, en que imagina el autor una esfera de electricidad positiva, dentro de la cual forman diferentes anillos electrones negativos, y esto en la hipótesis más sencilla.

Claro es que no podemos en este momento discutir la hipótesis en cierto modo verosímil del eminente físico; pero podemos citarla en prueba de que la Ciencia moderna ha perdido todo linaje de respetos al átomo clásico, substituyéndolo por diversas complicaciones de átomos cléctricos positivos y negativos.

Y de aquí se deducen, no una, sino una serie de negaciones.

No existe la materia á que estamos acostumbrados. La mateia ponderable es una ilusión, sus átomos son una serie de ilusiones: en el fondo no hay más que electrones positivos y electrones negativos.

Verdad es que algunos autores no anulan definitivamente la materia ponderable.

Por ejemplo, Lorentz parece que da, como núcleo á sus electrones negativos, un elemento de materia ponderable.

Y esto se comprende, porque si la esencia de ambas electricidades es *la repulsión*, para que lleguen á *formar núcleos*, preciso será colocar en el centro de cada uno un elemento de materia, que atraiga á la electricidad y la conserve su unidad é impida su dispersión.

Pero de negaciones tratamos hoy en esta conferencia, y no de afirmaciones, que puedan hacer valedero el sistema perpetuo de negación.

No ha terminado, ciertamente, la serie de negaciones; pero está terminando la conferencia y no podemos citar más ejemplos. Limitémonos á poner, como en estos casos se acostumbra, una serie de puntos suspensivos.

Y con todo lo que hemos dicho; y con todo lo que, aun no dicho, por dicho lo damos, en cuanto á la enumeración de negaciones; todavía tenemos que omitir la mitad de nuestra tarea: la crítica moderna no se limita á las hipótesis ó á los conceptos fundamentales, sino que llega á las últimas consecuencias de las teorías, quiero decir, á las *leyes teóricas*, ó á las *leyes experimentales* de la ciencia clásica.

Pero esta es materia que no podemos ni siquiera iniciar.

Digamos, tan sólo, que de las grandes leyes de la ciencia, una sola parece flotar en este universal diluvio; á saber: la de la *conservación de la energía*.

Algunas se fueron á fondo, otras van entre dos aguas; sólo la conservación de la energía aparece en la superficie,

pero no como ley teórica, sino como ley experimental, que es preciso comprobar en cada orden de fenómenos.

De todo ello se deduce algo así como una nueva orientación para la Física Matemática.

Pero no es posible realizar esta tarea, es decir, la de explicar esta orientación, ni en la presente conferencia que ya termina, ni siquiera en el presente curso, cuyo programa ya hemos señalado, y que hemos de empezar á cumplir en la conferencia inmediata con el estudio de las ecuaciones de Lagrange y de su reducción á forma canónica.

XVII.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

Por José Echegaray.

Conferencia cuarta.

Señores:

He consagrado toda la conferencia precedente á enumerar la principal serie de negaciones, que contra la ciencia clásica, y contra la Mecánica racional, se han formulado de algunos años á esta parte.

Y no es la primera vez que someto á mis discípulos, y al público aficionado á estas materias, la labor, en cierto modo demoledora, que viene realizándose contra las hipótesis más acreditadas y las teorías más prestigiosas de la Física Matemática, que creo que en buena ley, he llamado clásica.

La hipótesis mecánica dominaba en ella, y contra la Mecánica se dirigen todas aquellas negaciones á que pasábamos revista en nuestra conferencia precedente.

Sin negar que tengan, muchas de ellas, verdadera fuerza, si tuvieran toda la que los críticos pretenden, y algunos autores suponen, sería cosa de abandonar la vieja Mecánica como edificio en ruinas y empezar la construcción de una nueva Mecánica, obra que, á decir verdad, ha pretendido realizar algún físico eminente.

Y, sin embargo, he anunciado, desde la primera conferencia de este curso, que voy á dedicar todo él al estudio de las ecuaciones generales de la Mecánica, creyendo que en esta labor estoy de lleno en el campo de la Física Matemática.

Las razones que tengo para opinar de este modo las he desarrollado en las conferencias precedentes, y en breves líneas pueden resumirse.

En primer lugar, á pesar de todas las críticas, de todas las objeciones, de todas las dudas que han ido acumulándose, y aun de las deficiencias de la Mecánica clásica, para tratar ciertos fenómenos de la Física moderna, aun así y todo la vieja Mecánica conserva gran fuerza y gran prestigio, y sería empeño insensato querer prescindir de ella.

Si por las deficiencias que se señalan hay que renunciar á la Mecánica racional, hay que renunciar, así como suena, á toda la ciencia humana, porque no hay disciplina científica que á la Mecánica de Newton, Galileo, Lagrange, Laplace, Poisson, Cauchy, Gauss y tantos otros, pues sólo cito á la casualidad, pueda compararse en perfección.

Además, aun cuando no pueda aplicarse íntegra á los fenómenos eléctricos y magnéticos, y aunque para los nuevos fenómenos de la Física hubiera que renunciar á ella en su totalidad, abandono que no admitimos, pero que por vía de argumentación señalamos, aun así, la Mecánica clásica es hoy absolutamente irreemplazable: por ningún otro organismo científico puede ser sustituída para todos los fenómenos que se refieren exclusivamente á la materia ponderable.

En tercer lugar, como nuestras conferencias pretenden abarcar, en lo posible y en los límites que ya hemos señalado, la ciencia clásica y la ciencia novísima, á no borrar toda la historia de la ciencia del mundo inorgánico, no podríamos prescindir de la Mecánica racional.

Nuestras conferencias forman una modesta enciclopedia, son un primer paso para una enciclopedia más amplia; pero es claro, que teniendo este carácter, hemos de estudiar la Física Matemática del pasado siglo, hemos de tener en cuenta la hipótesis mecánica, y, por lo tanto, la Mecánica misma.

Por fin, aun cuando todos reconocen que la vieja Mecánica, la de la materia ponderable, es en gran parte impotente

para el estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos, aun así, á dicho estudio se aplican de continuo; y como ya hemos dicho en otra ocasión, uno de los primeros matemáticos de esta época, aplica á las teorías é hipótesis de Lorentz sobre electricidad, las ecuaciones generales de Lagrange, que son las que vamos á explicar en las conferencias de este curso. Y otros ilustres matemáticos siguen este ejemplo.

Empecemos, pues, nuestra tarea.

***

Ya lo decíamos en otra ó en otras ocasiones. Pocas ciencias como la Mecánica racional pueden hacer alarde de haber llegado á más elevada unidad.

En dos principios se condensa toda la ciencia.

Para el equilibrio el principio de los *trabajos virtuales*, que otros llaman de las *velocidades virtuales*.

Para la dinámica, *el principio de D'Alembert*, que reduce todo problema de movimiento á problema de equilibrio.

Y si se quiere, por la combinación de estos dos principios, la ecuación, ó más propiamente, las ecuaciones de Lagrange, comprenden toda la ciencia Mecánica.

Con escribir esta ecuación

$$\Sigma\left[\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\right.$$
$$\left.+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z\right]=o$$

ó si se desea expresar la misma ecuación bajo otra forma, con escribir el siguiente grupo

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_1}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_1}-Q_1=0,$$

$$\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial q'_m}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q'_m} - Q_m = 0$$

hemos escrito toda la Mecánica racional

Hemos aprisionado en estas fórmulas todos los infinitos fenómenos del movimiento (y como casos particulares, los de equilibrio) de la materia ponderable, desde los movimientos de los astros en el espacio infinito, hasta las vibraciones elásticas de un cuerpo sólido.

Toda la Mecánica racional, repetimos, está escrita en las admirables ecuaciones de Lagrange, uno de los esfuerzos más prodigiosos del genio humano.

Y claro es, que representan estas ecuaciones, además de la labor admirable de este sabio, la condensación sintética de la labor prodigiosa de una ó dos generaciones de obreros intelectuales.

De estas ecuaciones hemos tratado ya en el curso de 1905 á 1906 (páginas 285 y siguientes), y en ellas demostramos las ecuaciones de Lagrange, partiendo del principio de Hamilton.

Hoy vamos á seguir otro camino distinto, para demostrar de nuevo estas mismas ecuaciones.

Camino más natural y procedimiento más claro, para cuya exposición tomaremos como guía la obra tantas veces citada sobre Mecánica racional de Mr. Appell.

Exposición que coincide con las de otros autores, pero que tendremos á la vista de preferencia, salvo los desarrollos, críticas y digresiones á que tengo ya acostumbrados á mis alumnos y á mis oyentes, en éstas que no llamo lecciones sino conferencias.

*
* *

Si el principio de las velocidades virtuales fuera absoluto, si lo fuera el principio de D'Alembert, y si pudiera aplicarse la hipótesis mecánica á todos los fenómenos del mundo inorgánico, el problema del mundo inorgánico estaría también resuelto de una manera absoluta. La Mecánica racional sería la única ciencia en este orden de fenómenos, y la Física Matemática construída sobre aquel soberano trípode, permítaseme esta palabra: velocidades virtuales, teorema de D'Alembert, hipótesis mecánica, sería una ciencia de perfección ejemplar é indiscutible.

A este ideal grandioso se aspiraba en casi todo el siglo XIX. Este ideal no se ha realizado, pero ha dejado un monumento verdaderamente admirable, y con el cual hay que contar para la ciencia futura.

¿Por qué, si se admitiesen aquellos tres principios, velocidades virtuales, teorema de D'Alembert, hipótesis mecánica, la ciencia universal y perfecta del mundo físico sería un hecho, al menos en sus líneas generales?

Esto procuraremos hacer comprender á nuestros alumnos con la posible brevedad.

El principio de las velocidades virtuales, sin las restricciones que luego hemos de ponerle, y que ya le pusimos en las conferencias á él dedicadas durante el primer curso de esta asignatura, puede enunciarse así:

Para que un sistema material, sometido á la acción de fuerzas determinadas y sujeto á ciertos enlaces entre sus diferentes elementos, esté en equilibrio, *es preciso* y *es suficiente* que en todas las varíaciones virtuales del sistema, compatibles con aquellos enlaces, la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas sea nula.

El teorema de D'Alembert dice de este modo:

En todo sistema en movimiento, si se consideran las fuerzas que actúan sobre el sistema y las fuerzas de inercia, unas y otras actuando sobre el sistema en cuestión, y teniendo en cuenta los enlaces del mismo, deben estar en

equilibrio. Así se reduce el problema del movimiento al problema del equilibrio.

Por último, la hipótesis mecánica supone que todos los fenómenos del mundo físico son problemas de Mecánica racional.

Estos eran los tres puntos de apoyo del trípode maravilloso que simbolizaba la Física Matemática clásica.

Y, en efecto, admitiendo estos tres principios, no hay problema en la Naturaleza que no pueda resolverse, al menos en sus líneas generales.

Precisemos las ideas é indíquemos el caracter de la solución de este problema universal del mundo físico.

***

Consideremos un fenómeno cualquiera del mundo inorgánico.

Apliquemos la hipótesis mecánica, que todavia se condensa más diciendo:

En el Universo no hay otra cosa, que materia, fuerzas y movimiento y el fenómeno en cuestión podrá reducirse á este esquema. Una serie de puntos materiales, cuyas masas representaremos por m_1, m_2, m_3.... están en movimiento bajo la acción de un sistema de fuerzas, cuyas componentes designaremos por X_1, Y_1, Z_1 para la primera; X_2, Y_2, Z_2 para la segunda, y así sucesivamente.

Y, por último, podrá existir un sistema de enlaces entre los puntos, enlaces que para abreviar la explicación y para entendernos, representaremos por E.

Pues con estos datos, y aplicando el problema de D'Alamber, todo está reducido á expresar el equilibrio del siguiente sistema de fuerzas.

Para el punto de masa m_1 la fuerza cuyas componentes hemos designado por X_1, Y_1, Z_1.

Y para este mismo punto, representando por x_1, y_1, z_1 sus coordenadas, y por t el tiempo, habrá que considerar las componentes de la fuerza de inercia, que sabemos que tienen por expresión:

$$-m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}, -m \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Y esto mismo, repetido para los demás puntos del sistema, muchos ó pocos, infinitos si es preciso, que ya el análisis nos dará el medio de vencer esta dificultad, es decir, la de ser infinito el número de puntos.

En suma, hay que establecer el equilibrio de este sistema de fuerzas

$$X_1, Y_1, Z_1, -m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}, -m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2},$$

$$X_2, Y_2, Z_2, -m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}, -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}, -m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n, Y_n, Z_n, -m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}, -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2}, -m_n \frac{\partial^2 z_n}{dt^2}.$$

Que también, y agrupándolas dos á dos, puede decirse que constituyen el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \left(-m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + X_1\right), \left(-m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + Y_1\right), \left(-m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + Z_1\right) \\ \left(-m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + X_2\right), \left(-m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + Y_2\right), \left(-m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + Z_2\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Debemos, pues, expresar el equilibrio del sistema de fuerzas (1). Es decir, de las fuerzas dadas y de las llamadas fuerzas de inercia, que algunos autores, por huir de la palabra *fuerza*, que realmente parece que no es propia, llaman *vectores* de la inercia.

Por último, el principio de las velocidades virtuales nos permite escribir el equilibrio del sistema (1), porque representando por δx_1, δy_1, δz_1 las componentes de una variación infinitamente pequeña, ó sea virtual, de las coordenadas x_1, y_1, z_1, igualmente para cantidades análagas por δx_2, δy_2, δz_2 las componentes virtuales del punto m_2, y así sucesivamente, se sabe, por el expresado principio de los trabajos virtuales, que para que el sistema (1) esté en equilibrio, es *necesario* y *suficiente*, que quede satisfecha la ecuación

$$\Sigma\left[\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}\cdot Z\right)\delta z\right]=o \quad (2)$$

en la que la Σ es una suma de expresiones análogas á las que se expresan, y en las que en vez de x, y, z, X, Y, Z, hay que escribir las mismas letras con los índices 1, 2, 3..... n; es decir, que dicha suma se extiende á todas las masas, á todas las coordenadas y á todas las fuerzas del sistema de que se trata.

Y al decir que la ecuación anterior ha de quedar satisfecha, esto significa, que ha de quedar satisfecha para todas las variaciones virtuales de las coordenadas de los diferentes puntos, compatibles dichas variaciones con los enlaces E.

En la ecuación (2), consecuencia de los tres principios: el de trabajos virtuales, el de D'Alembert y el de la hipótesis mecánica, están escritos y comprendidos nada menos que todos los fenómenos del mundo inorgánico. Es decir, estarían escritos y comprendidos si nuestras afirmaciones precedentes fueran *absolutas*.

Supongamos por el momento que lo son, y veamos cómo podría resolverse el problema general del grupo de fenómenos de que se trata, sólo teniendo en cuenta la ecuación (2) que acabamos de obtener y que es consecuencia de los tres principios enunciados.

*
* *

Demos, pues, una idea muy amplia de cómo, admitiendo las hipótesis y principios establecidos, podría resolverse cualquier problema de Física Matemática, ó dicho con más generalidad, cualquier problema del mundo inorgánico.

Supondríamos, en primer lugar, que el fenómeno estaba reducido al movimiento de las masas m_1, m_2....., sometidas á fuerzas cuyas componentes representaríamos por X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 .....; y sujetos en sus movimientos dichos puntos á un sistema de enlaces E; y plantearíamos inmediatamente la ecuación (2), que volvemos á escribir para más claridad

$$\Sigma\left[\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z\right]=o.$$

O desarrollando la Σ en sus diferentes términos, que acaso pudieran ser en número infinito, si esta Σ fuera una integral, pero que nosotros, para la claridad de la explicación, supondremos que son en número finito, que representaremos por n, la escribiríamos de este modo:

$$\left.\begin{array}{c}\left(-m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+X_1\right)\delta x_1+\left(-m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}+Y_1\right)\delta y_1+\\ \left(-m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2}+Z_1\right)\delta z_1\\ +\left(-m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+X_2\right)\delta x_2+\left(-m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}+Y_2\right)\delta y_2+\\ \left(-m_2\dfrac{d^2z_2}{dt^2}+Z_2\right)\delta z_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +\left(-m_n\dfrac{d^2x_n}{dt_n}+X_n\right)\delta x_n+\left(-m_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}+Y_n\right)\delta^2 y_n\\ \left(-m_u\dfrac{d^2z_n}{dt^2}+Z_n\right)\delta z_n\end{array}\right\}=o \quad (3)$$

Según el principio de las velocidades virtuales, será preciso que la ecuación precedente quede satisfecha para todos los valores de δx, δy, δz, es decir, para todas las variaciones virtuales

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \quad \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2 \; \ldots\ldots \; \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$$

compatibles con los enlaces E.

Decir que existen enlaces, quiere decir, que los n puntos del sistema no son libres, sino que están enlazados entre sí de tal suerte, que cuando algunos de ellos ocupan ciertas posiciones, todos los demás quedan geométricamente determinados.

Ya insistiremos más adelante sobre esta idea, que así expuesta parece un poco vaga.

Mas para no detener la marcha de nuestra explicación, contentémonos por el pronto con esta vaguedad.

Si no existieran enlaces; si los puntos estuvieran todos ellos completamente libres, salvo las fuerzas que sobre ellos actuasen, es claro que todas las velocidades virtuales δx, δy, δz, serían arbitrarias. Un punto que no está sujeto á ningún otro sistema, puede moverse en el espacio infinitamente grande que le rodea, en todos sentidos: claro es que la fuerza que sobre él actúe le obligará á ir en dirección determinada; pero si no existiese dicha fuerza, y este es el sentido del teorema, todo el espacio sería suyo, si vale la palabra.

No es lo mismo por ejemplo, que si se le obligase á estar sobre una curva: aunque sobre él no actuase ninguna fuerza, sólo sobre la curva en uno ó en otro sentido podría caminar.

En el caso, volvemos á repetir, de que no existieran enlaces, todas las velocidades virtuales ó variaciones infinitamente pequeñas de x, y, z, serían arbitrarias, y la ecuación (3) no podría quedar satisfecha para todos los casos si no se anulasen separadamente los binomios de todos los paréntesis.

Esto es elemental, y la demostración es elemental también. En efecto, si para un sistema de valores de las velocidades virtuales, la ecuación quedara satisfecha, dejando invariables todas las variaciones de x, y, z, menos una, por ejemplo, todas menos δx_1, quedarían á su vez invariables todos los términos menos el término

$$\left(-m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + X_1\right) \delta x_1$$

que podría tomar, haciendo variar δx_1 infinitos valores, distintos del que hacía igual á cero la ecuación.

Resulta, pues, como acabamos de decir, que si no hay enlaces debemos tener $3n$ ecuaciones, que serán

$$-m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + X_1 = o, \; -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + Y_1 = o, \; -m_1 \frac{d^2 z}{dt^2} + Z_1 = o$$

. . . . . .

$$-m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + X_n = o, \; -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + Y_n - o, \; -m_n \frac{d^3 z_n}{dt^2} + Z_n = o.$$

Estas son, precisamente, las ecuaciones del movimiento de un sistema de *puntos libres;* integrándolas tendremos expresadas todas las coordenadas x, y, z, en función de los datos, del tiempo y de $6n$ constantes arbitrarias, que se determinarán por las condiciones iniciales, es decir, por las posiciones de los puntos y por sus velocidades en el tiempo cero.

Todo esto es elemental, y á decir lo cierto, esta hipótesis de los puntos libres á modo de pequeños astros sujetos tan sólo á fuerzas dependientes de las distancias, era dentro de *la hipótesis mecánica*, LA MANERA, si se me permite la palabra, de los grandes maestros, por ejemplo, de Cauchy.

Esta idea de los enlaces tomada, en rigor, de las máquinas industriales, ha venido más tarde; pero es idea predilecta para muchos autores modernos.

Las ecuaciones generales (3) lo mismo se aplican á los puntos libres, que al caso en que existan enlaces entre ellos.

Fijémonos, pues, en este caso, más general ó más particular que el primero, como quiera entenderse, y que, seguramente, no está libre de toda crítica.

***

En todas las ciencias y en todas las materias que el hombre investiga, un orden y una clasificación son necesarias, y al abordar, por decirlo así, el problema general de la Mecánica, para aplicarlo, en la *hipótesis mecánica*, á los fenómenos del mundo físico, no estará tampoco demás, fijar las ideas de mis alumnos y hacer una clasificación á grandes líneas de la naturaleza de los diferentes problemas, que pueden presentarse.

Con relación, pues, á las ecuaciones generales de la Mecánica, vamos á establecer tres grupos de problemas:

1.° En este grupo se comprenden todos aquellos problemas, que se resuelven por la hipótesis mecánica, por expresarnos de este modo, en su *absoluta pureza.*

Para tal clase de problemas no existen *enlaces*. Esta palabra no tiene sentido en el caso dicho.

Todo sistema material comprendido en el indicado grupo, se supone compuesto de *puntos materiales aislados*, de masa determinada cada uno, y sujetos á las acciones mutuas de unos sobre otros, y en general, á fuerzas exteriores.

En semejante hipótesis todas las velocidades virtuales son independientes; y, como acabamos de demostrar hace un momento, será preciso igualar los coeficientes á cero.

Tendremos, pues, tantos grupos de tres ecuaciones como puntos; y cada tres ecuaciones serán las generales de la dinámica para un punto libre:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1,\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1,\ m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1$$

. . . . . .

$$m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} = X_n,\ m_n \frac{d^2y_u}{dt^2} = Y_n,\ m_n \frac{d^2z_n}{dt^2} = Z_n.$$

Si el número de puntos es n, el número de ecuaciones será $3n$.

Estas serán las ecuaciones diferenciales que deberán integrarse.

Son, como se ve desde luego, ecuaciones diferenciales de segundo orden y de una variable independiente t.

Integrar dichas ecuaciones es buscar los valores de las x, y, z, en función de t, de modo que satisfagan á las ecuaciones del grupo anterior convirtiéndolas en identidades.

En rigor, este es el problema de la Astronomía, mientras los astros se puedan reducir á puntos, y n será un número finito.

Y conociendo todas coordenadas de todos los puntos para cualquier instante, en cualquier instante conoceremos la posición del sistema. El problema mecánico está resuelto, y sólo queda la *interpretación física* de las fórmulas.

Transportado este problema á los fenómenos del globo, las ecuaciones serán en su forma general las mismas; pero el número n será inmenso. Y en este caso el problema se divide en dos.

Si los puntos no ejecutan más que movimientos de pequeñísima amplitud alrededor de puntos de equilibrio, el número infinito de ecuaciones, que comprende el problema, se puede reducir, como hemos explicado en otras ocasiones, á un número finito de ecuaciones diferenciales.

Así lo hemos expuesto en la teoría de la Elasticidad, y resultan no ecuaciones ordinarias, sino ecuaciones en *diferenciales parciales*.

2.° Si el número de puntos n es muy grande, tan grande

que deba contarse por millones de millones, y, si además no puede admitirse por la naturaleza del problema, que cada punto describa una curva infinitesimal alrededor de una posición media de equilibrio, sino que trazan trayectorias más amplias y caprichosas, como sucede, por ejemplo, en los movimientos caóticos de los gases, y aun según ciertas teorías, en la Termodinámica; para estos problemas, repetimos, acuden algunos autores á lo que, en términos modernistas, se llama la *Mecánica estadística* (Statistical mechanics, de Gibbs).

Y para tal clase de problemas se parte precisamente de las fórmulas de Lagrange, que vamos á explicar, transformadas en las ecuaciones canónicas de Hamilton.

3.° Si se abandona la hipótesis mecánica pura, que es la de los puntos independientes, y se acude, como se hace muchas veces, á la hipótesis especial de los enlaces, ya á los enlaces mecánicos, prácticos y visibles, por decirlo así, ya á otros enlaces ocultos, invisibles é hipotéticos, para estos casos, las ecuaciones transformadas de Lagrange *tienen plena aplicación.*

Hasta tal extremo que, como hemos dicho varias veces, llegan á aplicarse á los problemas de la electricidad y aun llegan á aplicarse al caso de un número enorme de puntos.

Y ahora se irá comprendiendo, y cada vez se comprenderá más, por qué doy tanta importancia á las ecuaciones de Lagrange y á las ecuaciones de Hamilton.

Consideremos, pues, el caso en que existan enlaces.

*
* *

Y veamos, en esta hipótesis, cómo se resolverá el problema, si entre los puntos del sistema dado, existiese un conjunto de enlaces que llamaremos E.

Esto querría decir, que no todos los puntos, sino un cierto número de ellos, podrían moverse con independencia del

resto, y que determinadas sus velocidades virtuales, todas las demás variaciones han de ser funciones de éstas.

Si en la ecuación (3) no todas las δx, δy, δz son arbitrarias, ya no podemos igualar todos los coeficientes á cero. Será preciso, que por las ecuaciones que traduzcan analíticamente los enlaces, eliminemos las variaciones dependientes en función de las variaciones independientes.

Admitamos, para simplificar, que de todas las δx, δy, δz, se representan las variaciones independientes por

$$\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \ldots\ldots \delta q_k.$$

En tal hipótesis estas variables q no son más que algunas de las x, y, z; pero advirtamos que más adelante hemos de dar otra significación más general á esta letra q.

Por virtud de los enlaces, repetimos, todas las δx, δy, δz dependerán de variaciones de las q.

Y como se trata de cantidades infinitamente pequeñas, *admitiremos* que las variaciones dependientes δx, δy, δz se expresan por funciones lineales de las variaciones δq.

Más claro: suponemos que de las k ecuaciones E se deduce,

$$\delta x_1 = A_1 \delta q_1 + A_2 \delta q_2 + \ldots\ldots + A_k \delta q_k.$$

Y lo que decimos de la δx_1 pudiéramos decir de todas las demás coordenadas, exceptuando de aquellas, que para establecer la debida diferencia, hemos designado por q.

Siguiendo la marcha que antes indicamos, deberemos eliminar de la ecuación (3) todas las variaciones dependientes en función de las independientes, y sacando factores comunes estas últimas, las ecuaciones fundamentales (3), se podrán escribir de este modo:

$$F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \ldots\ldots F_k \delta q_k = o,$$

en que los coeficientes F serán evidentemente funciones de las m, de las fuerzas X, Y, Z, de las aceleraciones

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$$

y de las cantidades que entren en los coeficientes A.

Como todas las variaciones de q son independientes, la última ecuación no podrá quedar satisfecha si no son iguales á cero todos los coeficientes F.

De modo que tendremos las k ecuaciones diferenciales de segundo orden respecto á las x, y, z, con relación al tiempo,

$$F_1 = o, F_2 = o, \ldots\ldots F_n = o;$$

y uniendo á estas ecuaciones las de los enlaces, que serán en número $3n - k$, resultará un sistema de $3n$ ecuaciones; diferenciales unas, es decir, las anteriores, y otras que podrán ser ó no diferenciales: supongamos que no lo sean.

Estas $3n$ ecuaciones, por los procedimientos ordinarios del cáculo algebraico ó integral, nos permitirán deducir todas las x, y, z, que son en número de $3n$, en función del tiempo, y habremos resuelto el problema de Física Matemática que habíamos planteado.

Las dificultades que seguramente se presentarán, y que han de ser grandes, serán puramente de cálculo integral y de ellas en modo alguno será responsable la Física Matemática, que si todo lo que llevamos dicho fuera riguroso, rigurosamente había planteado el problema físico en términos matemáticos.

*
* *

Suponiendo, que se hubieran obtenido los valores de todas las x, y, z, en función del tiempo, quedaría la última parte del problema teórico, á saber: la de interpretar los resulta-

dos matemáticos en términos propios del problema físico; porque la solución no tendría sentido práctico, ni tendría atractivo de interpretación, si vale la palabra, si á cada accidente del fenómeno, que se ha puesto en ecuación, no correspondiese un accidente analítico de las fórmulas que lo representan.

Así, en la teoría *acústica*, al fenómeno de los diferentes sonidos, más ó menos graves ó agudos, corresponde en las fórmulas un cierto número de vibraciones por segundo; y en la luz, el fenómeno, en su totalidad, corresponde á fórmulas periódicas de la variable t, y el accidente de los colores, lo mismo que el sonido, al número de vibraciones por segundo; y el fenómeno de la polarización, al paralelismo de las vibraciones; y la polarización elíptica, al carácter elíptico de la curva de vibración; y no hay, en suma, matiz del fenómeno que no tenga ó no deba tener su interpretación en las fórmulas matemáticas.

Y es más; en una teoría perfecta, los caracteres analíticos de las fórmulas, no solamente deben explicar los fenómenos ya conocidos, sino que deben prever nuevos fenómenos. Como sucedió con la refracción cónica de Hamilton, que pudo preverse, por el estudio analítico de la ecuación onda, antes de que el hecho físico fuera conocido y experimentado.

Así se discurría, como hemos discurrido nosotros, ó así discurrían los físicos y los matemáticos en que dominaba el idealismo científico, en los comienzos y mediados del último siglo.

Y si no todos, muchos de ellos en estas ilusiones, mecían su inteligencia.

La crítica moderna y el estudio de nuevos fenómenos, han venido á desvanecer muchas de aquellas ilusiones y á envolver en neblinas de escepticismo muchas de aquellas esperanzas.

Analicemos, pues, sin jactancias científicas, pero sin escepticismos exagerados y hostiles contra la ciencia clásica,

todo lo que llevamos dicho hasta aquí sobre la aplicación de las ecuaciones de Lagrange á la resolución de los problemas que constituyen la Física Matemática.

A tres principios hemos acudido:

La hipótesis mecánica.

El principio de las velocidades virtuales.

La ecuación general de la Mecánica como aplicación del principio de D'Alembert. Ecuación que, transformada conveniente, como luego veremos, da las ecuaciones de Lagrange para cualquier sistema de enlaces.

En rigor, cuando hemos hablado de eliminar las variaciones de las x, y, z, dependientes, en función de las variaciones de las variables independientes q, no hemos hecho otra cosa que indicar el método que en otra conferencia hemos de exponer, para llegar á las ecuaciones clásicas del gran matemático.

Apliquemos, pues, la crítica, vuelvo á repetir, á estos tres principios ó hipótesis. Hipótesis mecánica; velocidades virtuales; principio de D'Alembert.

*
* *

Empecemos por la hipótesis mecánica.

Sobre esta hipótesis célebre, fecunda, y hoy rudamente combatida, algo dijimos en las conferencias del primer curso de esta asignatura.

Y allí recordamos, y no hay para qué repetirlo ahora (curso de 1905 á 1906, páginas 327 y siguientes), un importante teorema de Mr. Poincaré, según el cual, si por la hipótesis mecánica se encuentra una solución para determinado orden de fenómenos, se podrán obtener otras muchas soluciones igualmente valederas; luego resulta que ninguna se podrá considerar como la verdadera y única explicación de los fenómenos de que se trata.

Las cosas son como son, y no de muchas maneras distintas.

Esta crítica de Mr. Poincaré será incontrastable para los que pretendan buscar en la ciencia la expresión *absoluta de la verdad;* pero no lo es para los que no buscan en ella más que *simbolismos intelectuales* del fondo inaccesible de los fenómenos reales.

Para estos últimos basta con un paralelismo, cada vez más extenso en cada nueva teoría, entre los fenómenos y sus accidentes y los accidentes de las fórmulas matemáticas convenientemente interpretados.

De todas maneras, si la mecánica clásica de las masas ponderables es deficiente para explicar la luz, el magnetismo y la electricidad, ó al menos muchos de sus fenómenos, esto no prueba que estos fenómenos no sean de carácter mecánico; si es preciso de *otra mecánica* más amplia y más comprensiva que la tradicional.

Pero todas estas son cuestiones sobre las que ya hemos dicho algo en anteriores conferencias y sobre las que mucho nos queda por decir, y diremos si es posible, más adelante.

Por ahora, conste que diversos autores y varias escuelas combaten rudamente la hipótesis mecánica, aunque, á nuestro entender, con exageración inadmisible.

Y vamos al segundo principio, el de las velocidades virtuales.

Tampoco es un principio absoluto, y no puede, por lo tanto, servir de base á explicaciones absolutas de los fenómenos inorgánicos.

Aquella solución amplia, universal, que enunciamos al principio, se va, por decirlo así, achicando y pasando de esferas absolutas á esferas modestamente relativas.

El principio de las velocidades virtuales, como vimos en el primer curso de esta asignatura, se demuestra rigurosamente, pero entre ciertos límites y para ciertos enlaces.

Se demuestra para las máquinas que emplea la industria,

se emplea para los enlaces que pudiéramos llamar rígidos, no se emplea en absoluto para los enlaces flexibles, como serían hilos que uniesen los puntos del sistema, ó superficies sobre las que hubieran de permanecer los puntos en su movimiento, pero de las que pudieran desprenderse en cierto sentido.

En suma, se demuestra el principio de las velocidades virtuales para *ecuaciones de enlace*, no para *desigualdades;* y por lo demás, la naturaleza de los enlaces es infinitamente variable y es imposible comprender en una demostración todos estos sistemas.

Se comprende, que en la Naturaleza puedan existir enlaces tales, que ni sospechamos cómo puedan ser, ni los imaginamos siquiera; y citemos á este propósito la teoría de Hertz y otros autores, con sus enlaces ocultos.

En suma, si hemos quitado sentido absoluto de rigor á la hipótesis mecánica, igualmente restringimos la aplicación del principio de los trabajos virtuales; y pasemos, por último, al principio de D'Alembert.

Este principio, que pudiéramos generalizar para la electricidad y el magnetismo, como acaso lo intentaremos en su día, en la Mecánica clásica tiene un sentido restrictivo y particular, puesto que, en su enunciado, entran las fuerzas de inercia

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, -m\frac{d^2y}{dt^2}, -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Pero estas fuerzas ficticias, ó estos vectores, como otros autores dicen, expresan propiedades ó hipótesis de la materia ponderable, y sin gran atrevimiento lógico, atrevimiento, dicho sea entre paréntesis, que encontramos en matemáticos de primer orden, por ejemplo, Maxwell y Poincaré, no pueden aplicarse ni al movimiento de las masas eléctricas ni al de las masas magnéticas, prescindiendo del sostén de mate-

ria ponderable, dado que exista en el seno de unas y otras.

La inercia eléctrica no es la inercia de la materia ponderable, sino que depende de la inducción y de la auto-inducción; ó en términos más concisos, las ecuaciones del movimiento de una masa ponderable, no pueden aplicarse al movimiento de los electrones: el electrón tiene su dinámica propia, de la cual deseamos tratar algún día.

Por eso indicamos antes, que aun admitiendo el principio de D'Alembert en su expresión general, para aplicarlo al éter, á la electricidad y al magnetismo es preciso modificarlo.

Así, pues, este tercer principio, como los dos anteriores, dista mucho de ser un principio absoluto en la Física Matemática.

Y en resumen, la ecuación

$$\Sigma\left[\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z\right]=0$$

que, como dijimos al principio de esta conferencia, resulta de aplicar estos tres principios: el de la hipótesis mecánica, el de los trabajos virtuales y el de D'Alembert, ecuación de la cual, convenientemente transformada, hemos de deducir las ecuaciones de Lagrange, no tiene, en manera alguna, la generalidad absoluta, que por un momento habíamos admitido.

Tiene extraordinaria importancia, representa el esfuerzo prodigioso de grandes matemáticos, se aplica á multitud de problemas y aún pudiéramos decir á todos los fenómenos de la materia ponderable en que ésta no adquiere velocidades comparables á la velocidad de la luz y en que los enlaces, digamos abreviadamente, que están expresados por igualdades, dejando aún aparte rozamientos y choques que son otros problemas; mas no pueden aplicarse á los demás casos sin gran recelo, y contrastando los resultados con la experiencia: á modo de ensayos provisionales de un procedimiento teórico.

Y así, aquella soberbia afirmación, de que, *por esta fórmula quedaban resueltos todos los problemas del mundo físico*, debe retirarse modestamente á campos más restringidos, que fueron precisamente los de la Ciencia, cuando tales teorías se crearon.

De todas maneras, poniendo las cosas en su punto, dando á la Crítica lo que en buen derecho le corresponde, restringiendo, prudentemente, el alcance de las fórmulas que hemos citado, la importancia de éstas, volvemos á repetirlo una vez más, es extraordinaria, y por su importancia debemos exponerlas, y vamos á exponerlas en este curso.

Y además, su conocimiento es indispensable para la Física Matemática clásica y para la historia de la Ciencia; todo lo cual pretendemos comprender en ésta que hemos llamado *enciclopedia elemental y* que constituye la materia de mis conferencias en uno y en otro curso.

Quiero decir con esto, que en la conferencia inmediata, empezaré á ocuparme ya concretamente en el estudio de las ecuaciones generales de la Mecánica, materia que abarca el programa de este año.

Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowski.

(Continuación.)

Por B. Cabrera.

CAPITULO II

ANÁLISIS VECTORIAL

13. *Diferencial de un vector.* — En el capítulo anterior estudiamos las operaciones realizables con los vectores que representan fenómenos correspondientes á un punto determinado del espacio. Pero estos fenómenos no se presentan aislados la inmensa mayoría de las veces, sino que afectan á una región más ó menos extensa, variando de un punto á otro de una manera continua, excepción hecha de ciertas superficies ó puntos aislados. Así, pues, es interesante poder seguir el cambio que experimentan estos vectores, y los resultados de operaciones efectuadas con ellos, al pasar de un punto á otro infinitamente próximo.

Ahora bien; como este cambio afectará, tanto al módulo como al argumento del vector, se expresará siempre por un nuevo vector infinitesimal, que designaremos con $\vec{da}$, de suerte que

$$\vec{a'} = \vec{a} + \vec{da}$$

designando con $\vec{a'}$ el vector que corresponde al punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$.

De aquí se deduce, despreciando infinitamente pequeños de segundo orden,

$$d(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a} \cdot d\vec{b} + \vec{b} \cdot d\vec{a}$$

$$d\,|\vec{a}\,\vec{b}| = |\vec{a} \cdot d\vec{b}| + |d\vec{a} \cdot \vec{b}|$$

Aplicando la primera de estas fórmulas al cuadrado escalar de un vector, y teniendo en cuenta que esta magnitud es siempre igual al cuadrado de su módulo, se deduce

$$d\,\vec{a}^2 = 2\,\vec{a}\,d\vec{a} = 2a\,da.$$

Por otra parte $\vec{a} = a \cdot \vec{a^o}$, de suerte que

$$(a) \qquad d\vec{a} = a \cdot d\vec{a^o} + da \cdot \vec{a^o}$$

que multiplicada por $2\,\vec{a}$, y teniendo en cuenta la igualdad anterior, da

$$2\,\vec{a}\,d\vec{a} = 2\,a\,\vec{a}\,d\vec{a^o} + 2\,\vec{a}\,\vec{a^o}\,da$$

$$= 2a\,da + 2a\,\vec{a}\,d\vec{a^o}$$

$$(b) \qquad 2\,a\,(\vec{a}\,d\vec{a^o}) = 0.$$

Las ecuaciones *(a)* y *(b)* demuestran que la diferencial de un vector es la suma de dos vectores infinitamente pequeños y rectangulares entre sí: uno $da\,\vec{a^o}$, cuyo argumento es el mismo que el del vector primitivo, y el otro perpendicular á él.

14. *Circulación y flujo de un vector.* — Con frecuencia conviene conocer la relación que liga la variación del vector

con el cambio de los parámetros geométricos que definen la posición del punto. Para abordar su estudio conviene definir previamente tres vectores puramente geométricos que intervienen en dichas relaciones.

El primero es el vector $\vec{dl}$, que determina el paso de un punto á otro infinitamente próximo, y cuando se considera la sucesión indefinida de puntos que constituyen una línea, es el elemento de esta línea, con el sentido que determina el orden de sucesión. El producto escalar de un vector cualquiera por el que acabamos de definir, integrado sobre una curva abierta ó cerrada,

$$C = \int_c \vec{a}\, \vec{dl},$$

se denomina *circulación* ó *trabajo* del vector $\vec{a}$. Este último nombre procede de que el trabajo de una fuerza á lo largo de una trayectoria está medido precisamente por dicha integral. Si $\vec{a}$ es un vector polar, la circulación es una escalar pura; si un vector axial $\overset{\frown}{a}$, una pseudoescalar.

El elemento de superficie engendra dos vectores geométricos $\vec{ds}$ y $\overset{\frown}{ds}$ que tienen siempre por módulo el área del elemento, y cuyo argumento es en todo caso normal á dicho elemento superficial. Pero en el primero el sentido se define arbitrariamente, de tal suerte, que es independiente del giro que elegimos para la rotación positiva, mientras en el segundo dependen de la forma como se suponga recorrido el contorno del elemento, cambiando, por ende, con el sentido de la rotación positiva. El producto escalar de un vector cualquiera $\vec{a}$ por uno de los que acabamos de definir, integrado sobre una superficie abierta ó cerrada,

$$F = \int_s \vec{a}\, \vec{ds} \quad \text{ó} \quad F = \int_s \vec{a}\, \overset{\frown}{ds},$$

se denomina *flujo del vector*. Procede este nombre de que la integral en cuestión, aplicada á la velocidad de un flúido, mide la cantidad del mismo que fluye por la superficie á que se extiende la integración. Si se trata de un vector polar $\vec{a}$, la primera integral es una escalar pura y la segunda una pseudoescalar, é inversamente cuando el vector sea axial: $\overset{\frown}{a}$.

15. *Operador* ∇. — Las relaciones que ligan los cambios de una magnitud escalar ó vectorial con los de las coordenadas, se definen mediante un operador ∇ (nabla), que definiremos en la siguiente forma:

Para determinar el resultado del operador ∇ sobre la magnitud A, se reemplaza ∇ por el vector $\vec{ds}$; se integra el producto sobre una superficie S cerrada cualquiera, que envuelva el punto en el cual se quiere estudiar la variación de A; se divide esta integral por el volumen V encerrado por la superficie, y se hace tender dicho volumen hacia cero. El límite de la expresión indicada será el resultado pedido. Así

$$\nabla A = \lim_{V=0} \frac{\int_S \vec{ds}\, A}{V} .$$

Conviene agregar que, de las cantidades contenidas bajo el signo de integración, únicamente se considerarán variables aquellas sobre las cuales opere ∇, que se escriben siempre á continuación de este símbolo. Por ejemplo, en la expresión

$$(\varphi \nabla) A = \lim_{V=0} \frac{\int_S (\varphi \vec{ds})\, A}{V}$$

φ se considerará constante al ejecutar la integración.

16. *Graduante.* — Según sea la naturaleza de la magnitud A, así cambiará la significación analítica del resultado á que nos conduce la definición que acabamos de transcribir.

Comencemos por el caso más sencillo: aquel en que A es una magnitud escalar φ.

$$\nabla\varphi = \lim_{V=o} \frac{\int_s \vec{ds}\,\varphi}{V} = \lim_{V=o} \frac{\int_s \varphi\,\vec{ds}}{V};$$

serie de igualdades en las cuales se ha pasado del miembro intermedio al último, teniendo en cuenta que el elemento diferencial no es más que el producto de un escalar por un vector, producto en el cual el orden de los factores es indiferente. Se reconoce inmediatamente el carácter vectorial de $\nabla\varphi$, puesto que el elemento diferencial es un vector, cuya naturaleza conservará la integral y el cociente por la escalar V.

Para ir más adelante, multipliquemos los dos miembros de la igualdad anterior por un vector unidad $\vec{a^o}$ arbitrario

$$\vec{a^o}\,\nabla\varphi = \lim_{V=o} \frac{\int_s \varphi\,\vec{a^o}\,\vec{ds}}{V},$$

y aprovechemos la indeterminación del volumen V eligiendo un cilindro recto de generatrices paralelas al vector $\vec{a^o}$ (figura 7.ª). Sobre el área lateral de este cilindro $\varphi\vec{a^o}\,\vec{ds} = o$, puesto que los dos vectores son normales entre sí; en la base inferior

$$\varphi\,\vec{a^o}\,\vec{ds} = -\left(\varphi - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial a}\,da\right)ds$$

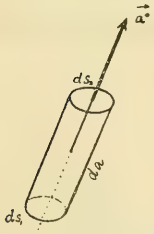


Figura 7.ª

y en la superior

$$\varphi\,\vec{a^o}\,\vec{ds} = \left(\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial a}\,da\right)ds$$

de suerte que

$$\int_s \varphi\,\vec{a^o}\,\vec{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial a}\,da\,ds;$$

y como además $V = da\,ds$,

$$\vec{a}^{o} \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial a};$$

expresión que, traducida al lenguaje vulgar, nos dice que la proyección del vector $\nabla \varphi$ sobre una dirección cualquiera es igual á la derivada de φ en dicha dirección.

Haciendo aplicación á las direcciones de los ejes $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, obtendremos las componentes del vector $\nabla \varphi$

$$\vec{i} \nabla \varphi = (\nabla \varphi)_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\vec{j} \nabla \varphi = (\nabla \varphi)_y = \frac{d\varphi}{\partial y},$$

$$\vec{k} \nabla \varphi = (\nabla \varphi)_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

También se llama á este vector graduante de la función φ, y se sustituye la anterior notación por

$$\text{grad}\, \varphi,$$

menos expuesta á confusiones.

17. *Divergencia. Teorema de Gauss.*—Cuando la magnitud á que afecta el operador ∇ es un vector, se pueden presentar dos casos, correspondientes al producto escalar $\nabla \vec{a}$ y al producto vector $|\nabla \vec{a}|$. Concretándonos ahora al primer caso, la definición que hemos dado del operador conduce inmediatamente á la expresión

$$\nabla \vec{a} = \lim_{V=0} \frac{\int_s \vec{ds}\, \vec{a}}{V} = \lim_{V=0} \frac{\int_s \vec{a}\, \vec{ds}}{V}.$$

En esta expresión, la integral es el flujo del vector $\vec{a}$ á través de la superficie S; de suerte que $\nabla \vec{a}$ es una magnitud escalar, límite de la relación de este flujo al volumen limitado por S.

Supongamos que el volumen es suficientemente pequeño para que el valor del cociente se confunda con su límite: la definición de $\nabla \vec{a}$ conduce inmediatamente á la igualdad

$$\nabla \vec{a}\, dV = \int_\sigma \vec{a}\, \vec{ds},$$

designando por σ la superficie que envuelve el volumen dV.

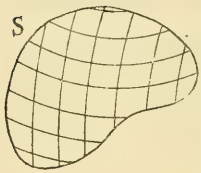


Figura 8.ª

Esto dicho, sea S (figura 8.ª), una superficie que limita un volumen finito. Dividamos este volumen en elementos suficientemente pequeños, para que les sea aplicable la ecuación anterior empleando para ello tres familias de superficies tales, que tres de ellas, una de cada familia, sólo puedan tener comunes puntos aislados. Estableciendo la igualdad anterior para cada elemento y sumando los resultados, tendremos

$$\int_V \nabla \vec{a}\, dV = \sum \int_\sigma \vec{a}\, \vec{ds}.$$

Pero observemos que todo elemento de superficie interior á S es simultáneamente límite de dos volúmenes contiguos, y los elementos diferenciales que les corresponden son evidentemente iguales y de signos contrarios, puesto que $\vec{a}$ es invariable y $\vec{ds}$ cambia de signo, y no de valor, al pasar de un elemento de volumen al inmediato. Luego todos los elementos diferenciales del segundo miembro, que corresponden á las superficies que nos han servido para dividir V, se

destruyen dos á dos, y $\sum \int_\sigma \vec{a}\, \vec{ds}$ quedará reducida á la integral extendida á S. Así, en definitiva,

$$\int_V \nabla \vec{a}\, d\, V = \int_s \vec{a}\, \vec{ds}$$

expresión que constituye el llamado teorema de Gauss, teorema que nos permite convertir una integral de superficie en integral de volumen y recíprocamente.

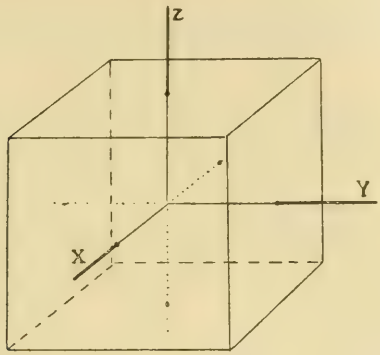


Figura 9.ª

Este teorema conduce á una expresión importantísima de $\nabla \vec{a}$. Apliquémosle á un volumen limitado por los planos (figura 9.ª)

$$-\frac{1}{2}\, dx \qquad\qquad +\frac{1}{2}\, dx$$

$$-\frac{1}{2}\, dy \qquad\qquad +\frac{1}{2}\, dy$$

$$-\frac{1}{2}\, dz \qquad\qquad +\frac{1}{2}\, dz$$

La integral de superficie se convertirá en este caso en la suma de los valores del producto escalar $\vec{a}\, \vec{ds}$ sobre cada

cara del paralelepípedo. Agrupando los términos que corresponden á cada par de caras opuestas, se obtiene fácilmente

$$-\left(a_x - \frac{1}{2}\frac{\partial a_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz +$$

$$+\left(a_x + \frac{1}{2}\frac{\partial a_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz = \frac{\partial a_x}{\partial x}dx\,dy\,dz,$$

$$-\left(a_y - \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial y}dy\right)dx\,dz +$$

$$+\left(a_y + \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial y}dy\right)a\,x\,dz = \frac{\partial a_y}{\partial y}dx\,dy\,dz,$$

$$-\left(a_z - \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial z}dz\right)dx\,dy +$$

$$+\left(a_z + \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial z}dz\right)dx\,dy + \frac{\partial a_z}{\partial z}dx\,dy\,dz;$$

de suerte que

$$\int_s \vec{a}\,\vec{ds} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

ó, teniendo en cuenta que en este caso la integral del volumen del primer miembro, se reduce á su elemento diferencial

$$\nabla\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Esta función del vector $\vec{a}$ se denomina generalmente divergencia de $\vec{a}$, y se le expresa comúnmente por la notación

$$\text{div}\,\vec{a}.$$

18. *Rotación. Teorema de Stockes.* — La segunda forma de actuar ∇ sobre el vector $\vec{a}$, vendrá definida por

$$|\nabla \vec{a}| = \lim_{V=0} \frac{\int_s |\vec{ds}\ \vec{a}|}{V} = - \lim_{V=0} \frac{\int_s |\vec{a}\ \vec{ds}|}{V}.$$

El carácter vectorial del resultado de esta operación es evidente, puesto que el elemento diferencial de la integral es un vector. Para determinar la expresión de sus componentes, procedamos como en el caso del graduante, con lo cual demostraremos de paso un importante teorema que se conoce con el nombre de teorema de Stockes.

La proyección de $|\nabla \vec{a}|$ sobre una dirección cualquiera, definida por el argumento $\vec{b}^{\circ}$ será

$$\vec{b}^{o}|\nabla \vec{a}| = \lim_{V=0} \frac{\int_s \vec{b}_o\ |\vec{ds}\ \vec{a}|}{V} = \lim_{V=0} \frac{\int_s \vec{a}\ |\vec{b}_o\ \vec{ds}|}{V}.$$

Como el volumen V es arbitrario, podemos suponerle suficientemente pequeño para que el cociente se confunda con su límite, y además constituído por un cilindro de bases infinitamente próximas, en comparación con su área, y de generatrices paralelas á $\vec{b}^{o}$, figura 9.ª La parte de la integral de superficie que corresponde á las bases es nula, puesto que $\vec{b}^{\circ}$ y $\vec{ds}$ tienen la misma dirección y $|\vec{b}^{\circ}\ \vec{ds}|$ será cero.

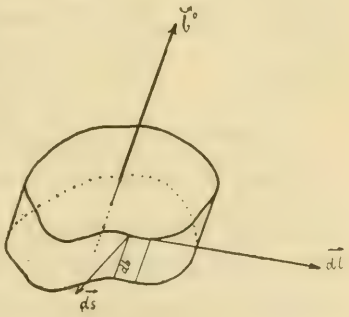


Figura 10.

Para el área lateral, se reconoce inmediatamente que el

módulo de $|\overset{\frown}{b^o}\,\vec{ds}|$ es $db \cdot dl$, y su argumento el que señala la flecha $\vec{dl}$, de suerte que, en definitiva

$$|\overset{\frown}{b^o}\,\vec{ds}| = db \cdot \vec{dl}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación, y teniendo en cuenta que db es constante y $V = db \cdot ds$.

$$\overset{\frown}{b^o}\,|\nabla \vec{a}| = \frac{\int_c \vec{a}\,\vec{dl}}{ds},$$

ó también, puesto que $\overset{\frown}{b^o} ds = \overset{\frown}{ds}$

$$(a) \qquad |\nabla \vec{a}|\,\overset{\frown}{ds} = \int_c \vec{a}\,\vec{dl}.$$

En lo que hemos dicho anteriormente $\overset{\frown}{b^o}$ es completamente arbitrario, y también la forma de las bases ds del volumen V. Supongamos ahora que $\overset{\frown}{b^o}$ se confunde con el eje $\overset{\frown}{i}$ y ds es un rectángulo formado por los segmentos dy, dz, cuyo centro está en el origen de coordenadas, según indica la figura 11, donde el eje $\overset{\frown}{i}$ se supone dirigido hacia detrás del plano del dibujo.

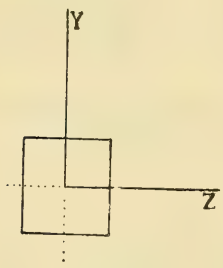


Figura 11.

La integral del segundo miembro es la suma de los valores de $\vec{a}\,\vec{dl}$ para los cuatro lados del rectángulo; de suerte que agrupando los términos correspondientes á cada par de lados paralelos, obtendremos

$$\left(a_z + \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial y}dy\right)dz - \left(a_z - \frac{1}{2}\frac{\partial a_z}{\partial y}dy\right)dz = \frac{\partial a_z}{\partial y}dy\,dz$$

$$-\left(a_y + \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial z}dz\right)dy + \left(a_y - \frac{1}{2}\frac{\partial a_y}{\partial z}dz\right)dy = -\frac{\partial a_y}{\partial z}dy\,dz$$

En cuanto al primer miembro, podemos escribirle evidentemente en la forma $|\nabla \vec{a}|_x \, dy \, dz$ de suerte que en definitiva

$$|\nabla \vec{a}|_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

y análogamente para las otras dos componentes

$$|\nabla \vec{a}|_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_y}{\partial x}, \quad |\nabla \vec{a}|_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Para este vector se han empleado también las notaciones curl $\vec{a}$ (Heaviside), vort $\vec{a}$ (Voigt) y rot $\vec{a}$ (Lorentz), la última de las cuales utilizaremos con frecuencia.

Consideremos ahora una curva cerrada cualquiera, C, en la cual existe un sentido de circulación determinado. Tomando esta curva por contorno, imaginemos una superficie cualquiera y sobre esta superficie tracemos dos familias de líneas tales que una de cada familia sólo pueda tener puntos aislados comunes. Además supondremos estas curvas suficientemente numerosas para que á cada uno de los elementos en que suponemos dividida la superficie sea aplicable la igualdad *(a)*. Sumándolas todas tendremos

$$\int_s |\nabla \vec{a}| \, \vec{ds} = \sum \int_c \vec{a} \, \vec{dl}.$$

Pero observemos que todo elemento de una línea sobre la superficie es límite común de dos áreas contiguas, y los elementos $\vec{a} \, \vec{dl}$ que les corresponde son evidentemente iguales y de signo contrario, puesto que $\vec{a}$ es el mismo y $\vec{dl}$ cambia de signo y no de valor. Luego todos los elementos diferenciales del segundo miembro que corresponden á las líneas que nos han servido para dividir S se destruyen dos á dos,

y $\sum \int_c \vec{a}\, \vec{dl}$ quedará reducirá reducida á la integral extendida á C. Así en definitiva

$$\int_s | \nabla \vec{a} | \vec{ds} = \int_s \text{rot}\, \vec{a}\, \vec{ds} = \int_c \vec{a}\, \vec{dl},$$

ecuación que expresa el teorema de Stockes, y que traducido al lenguaje vulgar nos dice que: *la circulación de un vector referida á una curva cerrada es igual al flujo de* rot $\vec{a}$ *á través de una superficie cualquiera que tiene aquella curva por contorno.*

Recopilando lo que hemos dicho respecto al resultado de la combinación del operador ∇ con una magnitud escalar φ y con un vector $\vec{a}$, se reconoce inmediatamente que dicho operador tiene un caracter análogo á un vector, cuyas componentes son los símbolos $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. En efecto; la operación

$$\nabla \varphi = \text{grad}\, \varphi$$

se comporta de forma completamenta análoga al producto de un vector por una magnitud escalar. Este producto sabemos que es un vector cuyas componentes son las del vector primitivo mutiplicadas por la escalar, y de igual suerte aquí las componentes del graduante son

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial y} \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial z} \varphi,$$

cuya forma es idéntica. Dicho se está que aquí se trata de una identidad de forma, puesto que los símbolos

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

no son magnitudes, sino operadores, y por consiguiente su producto por φ no tiene la misma significación que una multiplicación ordinaria. De aquí deriva una consecuencia importante, cual es la imposibilidad de invertir el orden de los factores, puesto que $\varphi \frac{\partial}{\partial x}$ es un operador y no un número, según veremos más adelante.

En el caso de la divergencia,

$$\nabla \vec{a} = \operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z,$$

la analogía con el producto escalar es también evidente, y aquí podríamos con igual razón repetir cuanto hemos dicho para el graduante respecto de la limitación de esta semejanza impuesta por la naturaleza misma de ∇.

Por último, la rotación es un vector de forma análoga al producto vector, como se reconoce por la forma de sus componentes

$$| \nabla \vec{a} |_x = \frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y$$

$$| \nabla \vec{a} |_y = \frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z$$

$$| \nabla \vec{a} |_z = \frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x$$

Conviene advertir que la imposibilidad de permutar el operador ∇ con la magnitud á que afecta, no es la única diferencia que existe entre su comportamiento formal y el de un vector ordinario, segúu veremos en seguida, pero de todas suertes esta analogía simplifica enormemente la realinación de los cálculos á que conduce el análisis vectorial.

20. Estudiados todos los casos posibles en la combinación de ∇ con una magnitud única, procede ahora pasar al

caso más complicado en que ∇ está ligado á dos magnitudes. Estos casos, que tienen una analogía estrecha con los productos de tres factores en el cálculo vectorial ordinario, son:

$$\nabla \varphi\psi, \quad \nabla \vec{a}\varphi, \quad |\nabla \vec{a}\varphi|$$

$$(\vec{a}\nabla)\vec{b}, \quad \vec{a}(\nabla \vec{b}),$$

$$\nabla(\vec{a}\,\vec{b}), \quad \nabla|\vec{a}\,\vec{b}|, \quad \|\nabla|\vec{a}\,\vec{b}|\|$$

Estas expresiones pueden resolverse en combinaciones de las tres que hemos acabado de resolver, mas la $(\vec{a}\nabla)\vec{b}$; pero antes de realizar esta resolución, y con el fin de simplificarla, vamos á poner de manifiesto un corolario de lo dicho en los anteriores párrafos. En una cualquiera de las combinaciones de ∇ con una sola magnitud, escalar ó vectorial, si descomponemos esta magnitud en dos sumandos, el primero de los cuales, φ_1, $\vec{a}_1$, representa su valor en un punto fijo, y el segundo, $d\varphi$, $d\vec{a}$, su complemento al punto considerado, se verificará que

$$(a) \qquad \begin{aligned} \nabla\varphi &= \nabla(\varphi_1 + d\varphi) = \nabla d\varphi \\ \nabla\vec{a} &= \nabla(\vec{a}_1 + d\vec{a}) = \nabla d\vec{a} \\ |\nabla\vec{a}| &= |\nabla(\vec{a}_1 + d\vec{a})| = |\nabla d\vec{a}| \end{aligned}$$

Para demostrar estas igualdades, nos basta observar que la ley distributiva, que se cumple en todas las operaciones vectoriales, es válida evidentemente en los casos en que figura el operador vectorial ∇, puesto que la derivación analítica satisface también á dicha ley. Por consiguiente, para que el primer y último miembro sean iguales hasta que que la combinación de ∇ con una magnitud constante sea nula, cosa evidente, dada la significación misma de ∇.

Esto visto, abordemos la transformación de las tres primeras expresiones, y como en todas se ha de operar de la misma manera, concretémonos á estudiar en detalle la que puede presentar mayores dificultades. Llamemos $\vec{a}_1$ y φ_1 los valores de $\vec{a}$ y φ en un punto interior al volumen V que sirva para definidos el operador ∇, y escribamos para todos los puntos de la superficie S que limita V

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{da}, \quad \varphi = \varphi_1 + d\varphi.$$

Se reconoce inmediatamente que, despreciando infinitamente pequeños de orden superior,

$$|\nabla \vec{a}\varphi| = \lim_{V=o} \frac{\int_s |\vec{ds}\,\vec{a}\,\varphi|}{V} = \lim_{V=o} \frac{\int_s |\vec{ds}\,\vec{a}_1\varphi_1|}{V} +$$

$$\lim_{V=o} \frac{\int_s |\vec{ds}\,\vec{da}\varphi_1|}{V} + \lim_{V=o} \frac{\int_s |\vec{ds}\,\vec{d\varphi}\,\vec{a}_1|}{V}.$$

El primero de los términos del segundo miembro, es por definición $|\nabla \vec{a}_1 \varphi_1|$ y como $\vec{a}_1$ y φ_1 son constantes, será nulo, en virtud de lo que acabamos de decir. La segunda integral, puesto que φ_1 es constante y además escalar, de suerte que sólo puede afectar el módulo del resultado total, podemos escribirle en esta otra forma:

$$\varphi_1 \lim_{V=o} \frac{\int_s |\vec{ds}\,\vec{da}|}{V} = \varphi_1 |\nabla \widetilde{da}| = \varphi_1 |\nabla \widetilde{a}|.$$

Por último, la tercera integral, teniendo en cuenta que $\vec{a}_1$ es constante, que la integración no es otra cosa que una suma y que el producto vector satisface á la ley de distribu-

ción, se reconoce también inmediatamente la posibilidad de escribirla en la forma siguiente:

$$(b) \lim_{V=o} \frac{|\int_s \vec{ds}\, d\varphi \cdot \vec{a}_1|}{V} = |\nabla d\varphi \cdot \vec{a}_1| = -|\vec{a}_1 \nabla \varphi| .$$

En definitiva obtendremos, teniendo en cuenta que si $\vec{a}_1$ y φ_1 son los valores de $\vec{a}$ y φ en un punto inferior á V, al tender V hacia cero se confundirán con estos últimos,

$$|\nabla \vec{a}\varphi| = \varphi |\nabla \vec{a}| - |\vec{a} \nabla \varphi|$$

ó empleando la notación corriente

$$\text{rot}\, \vec{a}\varphi = \varphi\, \text{rot}\, \vec{a} - |\vec{a}\, \text{grad}\, \varphi| .$$

De una manera completamente análoga se demuestran las dos igualdades siguientes:

$$\nabla \varphi\psi = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$$

ó

$$\text{grad}\, \varphi\psi = \varphi\, \text{grad}\, \psi + \psi\, \text{grad}\, \varphi$$

$$\nabla \vec{a}\varphi = \varphi \nabla \vec{a} + \vec{a} \nabla \varphi$$

ó

$$\text{div}\, \vec{a}\varphi = \varphi\, \text{div}\, \vec{a} + \vec{a}\, \text{grad}\, \varphi.$$

En estas expresiones se reconoce ya la segunda limitación en la analogía de ∇ con un vector, á que hacíamos alusión más arriba. La transformación de una cualquiera de estas expresiones, en el caso de ser ∇ un vector propiamente dicho, habría dado lugar á un sólo término. En el caso presente, aparecen dos, que se obtienen, suponiendo sucesiva-

mente que ∇ afecta á cada una de las dos magnitudes; para lo cual, basta escribir antes de ∇ aquella que no afecta en cada caso. Claro es que esta trasposición cambia el signo del término cuando se trata de un producto vector. La razón de esta duplicidad de términos salta á la vista si se tiene en cuenta que ∇ es un símbolo de derivación.

Sean en segundo lugar las dos expresiones $(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b}$ y $\vec{a}\,(\nabla\,\vec{b})$. Aplicando la definición del operador, y recordando que para la integración el vector $\vec{a}$ se ha de considerar constante, puesto que ∇ no le afecta, se obtiene

$$(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b} = \lim_{V=o} \frac{\int_s (\vec{a}\,\vec{ds})\,\vec{b}}{V}, \quad \vec{a}\,(\nabla\,\vec{b}) = \lim_{V=o} \frac{\int_s \vec{a}\,(\vec{ds}\,\vec{b})}{V}.$$

En ambas fórmulas $\vec{a}$ es una magnitud constante, pero mientras que en la última se puede sacar del signo de integración, en la segunda no es posible, porque el producto $(\vec{a}\,\vec{ds})$ es variable, á pesar de la constancia de $\vec{a}$. Así pues, la segunda fórmula da inmediatamente

$$\vec{a}\,(\nabla\,\vec{b}) = \vec{a} \lim_{V=o} \frac{\int_s \vec{b}\,\vec{ds}}{V} = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b},$$

mientras en la primera es indispensable calcular el límite para una forma conveniente de V.

Elijamos para ello un cilindro que envuelve el punto donde ha de calcularse la expresión considerada y cuyas generatrices sean paralelas al vector $\vec{a}$. En la integral el producto $(\vec{a}\,\vec{ds})$ es nulo sobre toda la superficie lateral, y en las dos bases posee los valores

$$-\,ads \text{ y } +\,ads,$$

de suerte que el valor de la integral, reducido á la suma de los dos elementos diferenciales correspondienres á estas bases, será

$$-(ads)\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\frac{d\vec{b}}{da}da\right)+(ads)\left(b+\frac{1}{2}\frac{d\vec{b}}{da}da\right)=a\frac{d\vec{b}}{da}dads.$$

Pero como $V=da.ds$, se obtiene en definitiva

$$(\vec{a}\nabla)\vec{b}=a\frac{d\vec{b}}{da}$$

expresión que nos demuestra que $(\vec{a}\nabla)$ es realmente un operador que puede expresarse también por $a\frac{d}{ds}$, y significa, traducido al lenguaje vulgar, la variación de la magnitud por unidad de longitud en la dirección de $\vec{a}$, multiplicada por el módulo de este vector en el punto considerado. Este nuevo operador no tiene otro símbolo que corresponda á los de grad, div y rot.

Por último trasformemos las tres expresiones

$$\nabla(\vec{a}\,\vec{b}),\quad \nabla|\vec{a}\,\vec{b}|\quad \text{y}\quad \left|\nabla|\vec{a}\,\vec{b}|\right|.$$

Aquí, como en el primer grupo estudiado, descompondremos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en la forma

$$\vec{a}=\vec{a}_1+d\vec{a}$$
$$\vec{b}=\vec{b}_1+d\vec{b}$$

donde $\vec{a}_1$ y $\vec{b}_1$ se refieren al punto en que hemos de tomar el

valor de aquellas expresiones y $\vec{da}$, $\vec{db}$ son los incrementos necesarios para pasar á los puntos de la superficie que limita el volumen V en la definición de ∇. Según esto, despreciando infinitamente pequeños de orden superior

$$\nabla(\vec{a}\,\vec{b}) = \lim_{V=o} \frac{\int_s \vec{ds}\,(\vec{da}\cdot\vec{b}_1)}{V} + \lim_{V=o} \frac{\int_s \vec{ds}\,(\vec{a}_1\cdot\vec{db})}{V}$$

$$\nabla\,|\vec{a}\,\vec{b}| = \lim_{V=o} \frac{\int_s \vec{ds}\,|\,\vec{da}\cdot\vec{b}_1\,|}{V} + \lim_{V=o} \frac{\int_s \vec{ds}\,|\,\vec{a}_1\cdot\vec{db}\,|}{V}$$

$$\left|\nabla\,|\vec{a}\,\vec{b}|\right| = \lim_{V=o} \frac{\int_s \left|\vec{ds}\,|\,\vec{da}\cdot\vec{b}_1\,|\right|}{V} + \lim_{V=o} \frac{\int_s \left|\vec{ds}\,|\,\vec{a}_1\cdot\vec{db}\,|\right|}{V}.$$

Pero los términos que figuran en el segundo miembro nos son desconocidos, puesto que las igualdades (a) únicamente son aplicables al caso en que el vector $\vec{da}$ se encuentra directamente combinado en el operador ∇, y, por consiguiente, con $\vec{ds}$. Sin embargo, se deduce inmediatamente de las reglas ordinarias de cálculo vectorial que

$$\vec{ds}\,(\vec{da}\cdot\vec{b}_1) = \left|\vec{b}_1\,|\,\vec{ds}\cdot\vec{da}\,|\right| + (\vec{b}_1\,\vec{ds})\,\vec{da}$$

$$\vec{ds}\,|\,\vec{da}\cdot\vec{b}_1\,| = \vec{b}_1\,\vec{ds}\cdot\vec{da}\,|$$

$$\left|\vec{ds}\,|\,\vec{da}\cdot\vec{b}_1|\right| = (\vec{b}_1\cdot\vec{ds})\,\vec{da} - \vec{b}_1\,(\vec{ds}\cdot\vec{da})$$

y análogamente para los tres términos restantes. Sustituyendo estos valores bajo los signos de integración, y teniendo presente la observación hecha al escribir la igualdad (b), se deduce inmediatamente que

$$\nabla(\vec{a}\,\vec{b}) = \left|\vec{b}\,|\,\nabla\,\vec{a}\,|\right| + \left|\vec{a}\,|\,\nabla\,\vec{b}\,|\right| + (\vec{b}\,\nabla)\,\vec{a} - (\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b},$$

$$\nabla\,|\,\vec{a}\,\vec{b}\,| = \vec{b}\,|\,\nabla\,\vec{a}\,| - \vec{a}\,|\,\nabla\,\vec{b}\,|,$$

$$\left|\,|\nabla\,|\,\vec{a}\,\vec{b}\,|\right| = \vec{a}\,(\nabla\,\vec{b}) - \vec{b}\,(\nabla\,\vec{a}) + (\vec{b}\,\nabla)\,\vec{a} - (\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b}.$$

ó con la notación corriente

$$\operatorname{grad}(\vec{a}\,\vec{b}) = |\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}| + |\vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}| + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\vec{b},$$

$$\operatorname{div}|\vec{a}\,\vec{b}| = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b},$$

$$\operatorname{rot}|\vec{a}\,\vec{b}| = \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b}.$$

En cuantas fórmulas acabamos de transformar figura una sola vez el operador vectorial ∇. Puede aún considerarse la combinación de una magnitud escalar ó vectorial con dos veces dicho operador, con lo cual se obtienen las nuevas expeesiones

$$\nabla\cdot\nabla\varphi,\quad |\nabla\cdot\nabla\varphi|,\quad (\nabla\cdot\nabla)\vec{a},$$

$$\nabla(\nabla\vec{a}),\quad \nabla|\nabla\vec{a}|,\quad \|\nabla|\nabla\vec{a}|\|$$

Estas expresiones no son realmente transformables en otras más sencillas, y únicamente es factible en ellas deducir sus valores. Empleando las notaciones más corrientes se ve inmediatamente que

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Para esta expresión se emplea generalmente la notación

$$\Delta\varphi$$

introducida por Lamé.

Las $|\nabla\cdot\nabla\varphi|$ y $\nabla|\nabla\vec{a}|$ son ambas idénticamente nulas, puesto que

$$|\nabla\cdot\nabla\varphi| = |\nabla\cdot\nabla|\varphi$$

$$\nabla|\nabla\vec{a}| = |\nabla\cdot\nabla|\vec{a}$$

y el producto vector de un vector por sí mismo sabemos que es siempre nulo. Así, pues,

$$| \nabla \cdot \nabla \varphi | = \text{rot grad } \varphi = o$$

$$\nabla | \nabla \vec{a} | = \text{div rot } \vec{a} = o$$

propiedades ambas que tienen una enorme importancia para la teoría general de los campos vectoriales, según veremos muy pronto.

Las tres expresiones que restan $(\nabla \cdot \nabla \vec{a})$, $\nabla (\nabla \vec{a})$ y $\left| \nabla | \nabla \vec{a} | \right|$ no son independientes entre sí, pues si se aplica á la última el teorema demostrado en el cálculo de vectores, se reconoce

$$\left| \nabla | \nabla \vec{a} | \right| = \nabla (\nabla \vec{a}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{a}$$

ó escrito de otra manera

$$\text{rot}^2 \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \triangle \vec{a}.$$

En esta igualdad sólo nos queda interpretar el último término. Su significación se reconoce inmediatamente recordando que el producto

$$(\vec{a}\ \vec{b})\ \vec{c}$$

es un vector con el mismo argumento que $\vec{c}$, y cuyo módulo se multiplica por la cantidad escalar $(\vec{a}\ \vec{b})$, de suerte que sus componentes serán

$$(\vec{a}\ \vec{b})\, c_x, \quad (\vec{a}\ \vec{b})\, c_y, \quad (\vec{a}\ \vec{b})\, c_z.$$

Análogamente $\triangle \vec{a}$ es un vector de componentes

$$\triangle a_x, \quad \triangle a_y, \quad \triangle a_z.$$

XIX.—Geometría Analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades.

Por Modesto Domínguez Hervella (*).

PRÓLOGO

Séame permitido llamar la atención de los matemáticos, y en particular de las Asociaciones para la difusión y para el progreso de las Ciencias Exactas, sobre la sencillez y extensión que alcanzará la Geometría Analítica con una reforma radical en sus procedimientos.

En los siglos anteriores al XIX se definían las Matemáticas como ciencias de la cantidad, limitándose á relaciones cuantitativas entre las entidades que entraban en el cálculo.

Sin embargo, llegaron á admitirse tendencias opuestas de algunas cantidades, distinguiéndolas con los adjetivos «positivas» y «negativas».

Así se llegó á fines del siglo XVIII asegurando que no hay cantidades que no sean positivas ó negativas; la consecuencia de este error era que no podía haber potencias negativas de grado par ni, por consiguiente, raíces de grado par de cantidades negativas; y si resultaba de algún cálculo una raíz de esta clase, se consideraba como símbolo de lo absurdo é imposible.

Como no podía menos de suceder, se llegó á reconocer el error y admitir en el cálculo las cantidades que, sin ser opuestas, tienen tendencias á direcciones distintas, demostrándose en el siglo pasado, que tales cantidades son raíces de grado par de cantidades negativas.

(*) Obra póstuma.

De los nombres que se han dado á estas cantidades para reemplazar al ahora inadmisible de imaginarias, el que menos inconvenientes presenta es el de *cantidades dirigidas;* pero una vez que entren en el cálculo las tendencias, las cantidades reales son también dirigidas; de modo que, hablando con propiedad, el nombre de cantidades dirigidas tiene que ser general, y como tal lo aceptaré; y como será necesario hablar de las cantidades imaginarias, con exclusión de las reales, las llamaré *indirectas* por si se llega á adoptar, para las cantidades reales, losadjetivos *directas* á las positivas é *inversas* las negativas; pero como este último cambio no es tan urgente, seguiré usando los nombres «cantidades reales, positivas y negativas» mientras no propone otra cosa la sabia Comisión para la reforma de la Nomenclatura Matemática. Los adjetivos «positivo y negativo» los usaremos sólo para las cantidades reales, y cuando dos entidades dirigidas tengan tendencias contrarias, las llamaremos *opuestas.*

Mientras no entraron en el cálculo más tendencias que las opuestas, natural era representar gráficamente cantidades reales en todas direcciones, y para expresar analíticamente líneas y superficies, había que acudir al *ingenioso artificio* de ecuaciones entre coordenadas, que todavía está en uso, sin excepción, que yo sepa.

Es lógico que, tomando cantidades reales en todas las direcciones, no quede dirección posible para las indirectas, y en tal caso, éstas tienen que seguir considerándose como expresión de lo absurdo é imposible, quedando al olvido la inclusión completa de las tendencias en el cálculo.

Así se explica la oposición de algunos matemáticos á admitir en el cálculo las cantidades dirigidas, por no ser compatible con el artificio, que no consideran como tal, de las ecuaciones entre coordenadas.

Este método no comprende todos los lugares geométricos; no hay ecuación de un trozo de línea, ni de superficie,

ni de los puntos interiores de una superficie plana, ni de un volumen.

Ninguno de estos inconvenientes se encuentra representando por funciones dirigidas de una variable real las líneas, de dos variables reales las superficies, sean planas ó curvas, de tres los volúmenes y de cuatro los movimientos de las moléculas de un cuerpo, sin más limitación de estas variables que $\pm \infty$.

De la forma de la función se deducen siempre las propiedades del lugar que representa y el procedimiento para su construcción; si este lugar es un trozo de línea, de superficie ó de volumen, la construcción que se deduce de la función dará todos los puntos del trozo, por lo general repetidos al variar las variables de $-\infty$ á $+\infty$, pero ninguno exterior.

En la aplicación de la Geometría Analítica á la Cinemática, si una trayectoria es dada por su ecuación en coordenadas cartesianas, y se quiere saber la posición del punto móvil á cada instante, hay necesidad de tener dichas coordenadas en función del tiempo.

Si se quiere conocer su velocidad en cada punto, hay que determinar separadamente

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}$$

intensidad de la velocidad, y $\frac{dy}{dx}$ su dirección. Las mismas complicaciones para determinar la aceleración en magnitud y tendencia.

Si la trayectoria es dada por una función dirigida de una variable real, todo es sencillo, tanto respecto á las propiedades de la curva como á las del movimiento; todo está reunido en la función y en sus derivadas primera y segunda. Cada vector de la función, siendo el tiempo la variable,

determina la posición del punto móvil á cada instante. Cada vector de la derivada primera es la velocidad, y las de la segunda la aceleración, comprendiendo en sí estos dos vectores las intensidades y direcciones respectivas.

Si en una función de dos variables u y t, una de ellas es el tiempo, á cada valor que se dé á u corresponderá una función de t, trayectoria del punto, y á cada valor que se dé á t corresponde la serie de posiciones de los puntos generadores en el instante t, ó sea la superficie plana ó curva engendrada en el tiempo t por la línea $F(u)$.

En las funciones de tres variables $F(t, u, v)$, á cada valor que se dé á una de estas variables, v, por ejemplo, corresponde una superficie $F(t, u)$, que, variando v, cambiará de poposición, y por lo general, de forma, engendrando un volumen $F(t, u, v)$.

Si el volumen está lleno de un flúido en movimiento y t es el tiempo, á cada valor t' que se dé á t corresponde una superficie $F(u, v)$, que ha estado en movimiento y ocupa la posición $F(u, v, t')$ al cabo del tiempo t'.

Si t es temperatura, densidad ó presión, cada valor de t dará una superficie, respectivamente, isoterma ó de igual densidad ó nivel.

De lo expuesto se deduce que la Geometría Analítica, por este procedimiento, está íntimamente unida á la Cinemática; se prestan mutuamente tal auxilio, que se pueden considerar como una sola ciencia, y también es más sencilla la aplicación á la Mecánica Racional.

Los conocimientos necesarios para estudiar este tratado son: Aritmética, Algebra, Geometría, definiciones de las líneas trigonométricas y relaciones de unas con otras, y rudimentos de Geometria descriptiva para la primera parte. Para lo demás se necesita Cálculo diferencial é integral de cantidades reales.

PRIMERA PARTE

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS OPERACIONES ANALÍTICAS

PRELIMINARES

1. Se ha dicho que las Matemáticas son las ciencias de la cantidad, entendiéndose por cantidad todo lo que es susceptible de aumento ó disminución; con lo cual parece quedar fuera del alcance de dichas ciencias todo lo que no sea relación cuantitativa entre dichas entidades, y sin embargo, es mucho más extenso su campo, pues abraza también el modo como existe cada entidad y la acción de unas sobre otras, no sólo por su magnitud ó cantidad, sino por su tendencia, pudiendo dos entidades de la misma naturaleza é intensidad producir efectos distintos y hasta opuestos, y por consiguiente, ser diferentes.

Consideremos, por ejemplo, un punto material sometido á dos esfuerzos de igual intensidad, representada por f. De que estas fuerzas tengan la misma magnitud, ¿deduciremos que son idénticas? Para que así fuese, sería necesario que una pudiese ser reemplazada por la otra sin producir alteración en los efectos, lo cual no sucederá si tienen distintas direcciones. Si las consideramos simultáneas, la experiencia enseña que el movimiento del punto de aplicación variará de infinitas maneras según la mayor ó menor abertura del ángulo que forman las fuerzas, y el movimiento variará en dirección y hasta en intensidad, entre cero si son opuestas, y $2f$ si tienen igual dirección. Sólo en este caso son iguales las dos fuerzas; fuera de él, una ciencia exacta no las debe llamar iguales, aunque lo sean sus magnitudes.

Abrazadas igualmente por la ciencia las dos circunstancias de magnitud y tendencia, inseparables en cada entidad, po-

demos decir que á éstas y no sólo á las cantidades se extiende el dominio de las Matemáticas.

Donde más clara se ve la diversidad en la manera de ser de las entidades es en el espacio, precisamente donde conviene fijar las ideas para el objeto de este tratado.

Un punto situado en la superficie de la tierra puede recorrer dos metros, por ejemplo, en dirección ascendente ó descendente, ó á uno de los puntos cardinales, ó en cualquiera de las infinitas direcciones que participan algo de dos ó tres de las expresadas; las distancias recorridas tienen igual magnitud, pero todas estas entidades difieren en su manera de ser y, por lo tanto, en su manera de agruparse unas con otras. La distancia recorrida en dirección al cenit, nada tiene de común con las que tienden á los cuatro puntos cardinales y, sin embargo, puede ser necesario combinarlas todas, del mismo modo que el Algebra ha combinado las que tienen direcciones opuestas.

Vemos, pues, que cualquier entidad, dada su clase, debe considerarse bajo su doble aspecto de magnitud y tendencia, y está fuera de duda que, si entran en el cálculo entidades de naturaleza opuesta, tenemos que admitir entidades distintas que no son opuestas y someterlas al mismo cálculo con las que se hayan elegido como positivas y negativas.

2. La oposición entre las cantidades positivas y las negativas suele representarse gráficamente tomando sobre una recta, que llamaremos *eje*, y á partir de un punto llamado *origen*, las magnitudes positivas en un sentido y las negativas en el opuesto; pero aquí encontramos un vacío: las entidades fuerzas, ó cualesquiera otras que tienen tendencias en las infinitas direcciones, distintas de la positiva y de la negativa, se aproximan más ó menos á una de estas dos, ó no tienen nada de común con ellas por serles perpendiculares, y, sin embargo, existe entre todas cierta dependencia geométrica que el análisis debe expresar de alguna manera y someterlas á las operaciones analíticas en combinación con las

entidades positivas y las negativas. Este vacío concuerda con el que ha presentado el Algebra, limitándose á considerar estas dos maneras de ser de la cantidad, como si todas las cantidades estuviesen encerradas en el dilema de tener la misma tendencia ó tendencias opuestas.

De este vacío nació la antigua creencia de que una cantidad no puede pasar de positiva á negativa sin pasar por cero, verificándose que puede sufrir este cambio sin variar de magnitud con sólo girar dos ángulos alrededor de su origen en cualquier plano.

Otra de las consecuencias del citado dilema ha sido negar la existencia de potencias negativas de grado par, consecuencia que ya queda destruída; porque habiendo cantidades distintas de las que hemos convenido en llamar positivas y de sus opuestas las negativas, puede suceder que alguna de ellas, multiplicada por sí misma, dé un resultado negativo, como luego se verá.

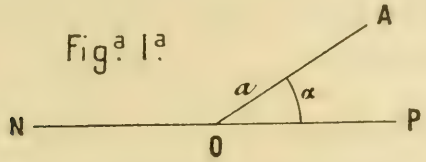
También hay rectángulos y, por consiguiente, cuadrados negativos. Si se considera como positiva una recta engendrada por un punto que se mueve en cierto sentido, y negativa si el punto generador se mueve en el sentido opuesto, también será positivo el rectángulo engendrado por una recta que se mueve en sentido positivo, y será negativo el que engendre la misma recta retrocediendo.

3. Habiendo infinitas direcciones, no son suficientes los signos $+$ y $-$; vamos á adoptar un sistema de símbolos para que todas las entidades dirigidas puedan entrar en los cálculos con su magnitud y dirección.

Limitándonos por ahora á las operaciones que se pueden efectuar en un plano, tomemos en él una recta como eje y en ella un punto como origen. Sea O, figura 1.ª, el punto elegido; OP la dirección de las cantidades positivas; las negativas se tomarán en la dirección ON; la magnitud de una cantidad OA la expresaremos por una letra minúscula de nuestro alfabeto, y su dirección por un subíndice, letra griega,

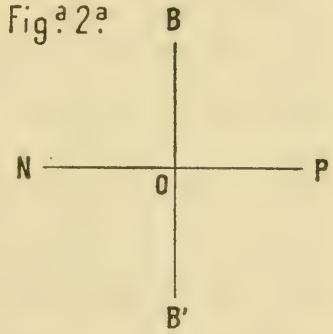
también minúscula, que indicará el ángulo que la dirección OA forma con la parte positiva del eje; de modo que a_α es la cantidad a, desviada del eje positivo OP el ángulo α.

Las magnitudes crecen alejándose del origen el punto ge-



nerador en el sentido que corresponda, aunque sea negativo; los ángulos que indican la dirección de los vectores se cuentan desde la recta OP, y convenimos, por ahora, en que se tomen como positivos los engendrados girando el vector de derecha á izquierda, y como negativos los engendrados en sentido contrario para un observador que está en el origen.

4. Tomemos una unidad positiva OP, figura 2.ª; otra negativa ON, y otra OB perpendicular á NP del lado de los ángulos positivos menores que dos rectos.



Para ver qué relación analítica hay entre la unidad OB y las unidades OP y ON, vamos á anticipar algunas ideas relativas á la multiplicación.

Sin variar la definición conocida de la multiplicación, pero ampliándola, puesto que ahora no nos limitamos á las magnitudes de las entidades, sino que, además, tenemos en cuenta sus tendencias ó direcciones, diremos que *el producto es, en magnitud y dirección, respecto al multiplicando, lo que el multiplicador es respecto á su unidad positiva.*

En consecuencia de esta definición, el producto $\overline{OB}^2$

será en todo, respecto al multiplicando OB, lo que el multiplicador OB es respecto á la unidad OP. Este multiplicador es de la misma naturaleza que su unidad, forma con ella un ángulo positivo $\frac{\pi}{2}$; luego el producto será lineal, como el multiplicando, y formará con él un ángulo positivo $\frac{\pi}{2}$; será, pues,

$$\overline{OB}^2 = ON = -1 \quad \text{y} \quad OB = \sqrt{-1}.$$

De la misma manera, como OB' forma un ángulo recto negativo con la unidad positiva, el producto $OB' \times OB$ formará con OB', multiplicando, un ángulo recto negativo, y será $\overline{OB'}^2 = -1$; y como OB' es opuesto á OB, si

$$OB = +\sqrt{-1} \quad \text{será} \quad OB' = -\sqrt{-1}.$$

Tenemos, pues, las dos raíces cuadradas de -1 representadas gráficamente por perpendiculares al eje real de uno y otro lado de éste.

5. Ahora que en una cantidad consideramos su magnitud y su dirección ó tendencia, no se puede decir que dos cantidades son iguales porque tengan el mismo valor absoluto; para que la igualdad sea completa es necesario que también sean iguales las direcciones. Esta *igualdad* será la única que debe tener tal nombre, y se expresará porescrito con el signo $=$; pero también se necesita expresar la igualdad de magnitudes, y á ésa la llamaremos *equivalencia*, para lo cual usaremos el signo $\doteq$, que leeremos equivalente á . Así, en lugar de decir que los distintos radios de un círculo ó de una esfera son iguales, diremos que son equivalentes, aunque sean opuestos por pertenecer á un mismo diámetro; de modo que tenemos, entre los cuatro vectores de la figura 2.ª, las equivalencias

$$OP \doteq OB \doteq ON \doteq OB'$$

ó sea

$$+1 \doteq +\sqrt{-1} \doteq -1 \doteq -\sqrt{-1}$$

6. Veamos lo que significa $b\sqrt{-1}$. Si consideramos b como multiplicando y $\sqrt{-1}$ como multiplicador, siendo éste equivalente y perpendicular á la unidad positiva, el producto será equivalente y perpendicular á b, que está en la dirección OP si es positivo, ú ON si es negativo; es decir, que de todos modos el producto formará con b un ángulo recto positivo.

Si b es multiplicador y tiene la misma dirección que la unidad positiva, el producto tendrá la misma dirección que $\sqrt{-1}$; si tiene b dirección opuesta, tendrá el producto la dirección opuesta á $\sqrt{-1}$; y de todos modos $b\sqrt{-1}$ será una perpendicular de magnitud b á la izquierda de b; y será $b\sqrt{-1} \doteq b$, porque $\sqrt{-1} \doteq 1$.

7. De los nombres que han sido dados á las cantidades imaginarias admitiremos como el más aceptable el de *cantidades dirigidas;* pero entenderemos que este nombre es general cuando entran en el cálculo las cantidades con sus tendencias; de modo que la cantidad real es una cantidad dirigida. A su tendencia se refieren las de las demás cantidades, y para distinguirla, conservemos el adjetivo *real*, así como *positivo* y negativo. Para distinguir exclusivamente las imaginarias, las llamaremos *indirectas*, y de éstas, la que es perpendicular al eje real se distinguirá con el nombre de *indirecta pura.*

Como los adjetivos *positivo* y *negativo* sólo los vamos á aplicar á cantidades reales, distinguiremos, en general, las entidades con tendencias contrarias nombrándolas *cantidades opuestas.*

Las operaciones del Algebra, limitadas á cantidades reales, van á ser tratadas con mayor amplitud, principiando por lo

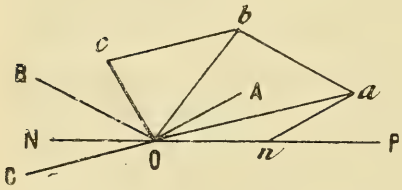
representable. Con esta limitación, la cantidad más general es a_α. En ella está comprendido

$$a_{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{-1}, \quad a_{-\frac{\pi}{2}} = -a\sqrt{-1}, \quad a_0 = a, \quad a_\pi = -a.$$

ADICION

8. Para efectuar la adición algebraica en que entran cantidades positivas y negativas se restan éstas de aquéllas, y en la representación gráfica se llevan las positivas en un sentido y las negativas en el opuesto, ó sea retrocediendo. Es decir, que cada sumando, sea positivo ó negativo, se lleva sobre una recta en el sentido que indica su manera de ser. Este procedimiento tiene que generalizarse para sumandos que tienen otras direcciones, porque si se considerasen sólo las magnitudes para llevarlas á continuación unas de otras en una misma dirección y sentido, habría que hacer lo mismo con las negativas, y se tendría una suma que no sería la de los verdaderos sumandos, sino la de sus magnitudes, sin tener en cuenta sus tendencias.

Fig.ª 3.ª



Diremos, pues, que *la representación gráfica de la adición se hace llevando en su dirección y sentido cada sumando, de modo que el punto inicial de cada uno coincida con el final del anterior, y la suma será el vector que une el punto inicial del primer sumando con el punto final del último.*

Sean los sumandos representados en la figura 3.ª por OP positivo, ON negativo, OA, OB, OC en distintas direcciones. Supongamos un punto generador de la suma;

este punto recorre un primer sumando OP; desde el punto final P recorre otro sumando $Pn = ON$, retrocediendo por ser negativo ON; después se traza

$$na = OA, \qquad ab = OB \quad \text{y} \quad bc = OC.$$

Tenemos así las posiciones del punto generador dadas por los vectores

$$On = OP + ON, \qquad Oa = OP + ON + OA,$$
$$Ob = OP + ON + OA + OB$$

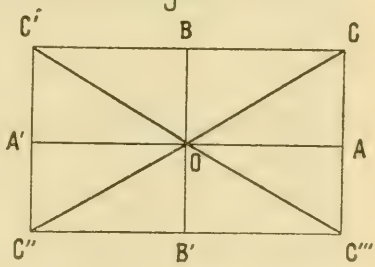
y finalmente,

$$OC = CP + ON + OA + OB + OC,$$

yendo el vector suma del punto inicial del primer sumando al final del último.

Este procedimiento es el que se sigue en Mecánica para reunir varias fuerzas en una sola; no era considerado como una adición analítica; se llamaba «composición», y la suma «resultante», porque en ninguna operación se tenían en cuenta más cantidades que las positivas y negativas.

Fig.ª 4.ª



Esta misma manera de sumar fuerzas era reemplazada por una serie de paralelogramos, cuyas diagonales sucesivas son los mismos vectores On, Ob, Oc. Este último vector que cierra el polígono formado por las fuerzas sumandos, aunque se llame resultante, es la suma de las fuerzas dadas, porque las puede reemplazar, produciendo, en el punto material á que están aplicadas, el mismo movimiento ó la misma presión que el conjunto de las fuerzas sumandos, y si el

polígono es cerrado, las fuerzas están en equilibrio, porque su suma es cero.

Por consiguiente, el signo + es el único que debe enlazar estos sumandos, aunque se llamen componentes.

9. Según esto, para representar gráficamente la suma

$$a + b\sqrt{-1},$$

tomaremos sobre el eje la magnitud $OA = a$, figura 4.ª, levantaremos la perpendicular

$$AC = b\sqrt{-1}$$

y la suma será la hipotenusa

$$OC = a + b\sqrt{-1}.$$

El mismo resultado se obtendría si desde el origen se levantase la perpendicular

$$OB = b\sqrt{-1},$$

y á partir de su extremo final B se tirase una paralela

$$BC = OA = a,$$

resultando la misma hipotenusa

$$b\sqrt{-1} + a = a + b\sqrt{-1} = OC.$$

Fácilmente se ve que

$$-a + b\sqrt{-1} = OC'$$
$$-a - b\sqrt{-1} = OC''$$
$$a - b\sqrt{-1} = OC'''.$$

El valor absoluto de estas expresiones, llamado módulo, es

$$\sqrt{a^2 + b^2};$$

designándolo por c y llamando γ al ángulo $A\,O\,C$, se tiene

$$OA = a = c \cos \gamma, \qquad AC = b\sqrt{-1} = c \operatorname{sen} \gamma \sqrt{-1}$$

y

$$OC = c_\gamma = c\,(\cos \gamma + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \gamma).$$

En el número 3 se estableció la fórmula a_α como mero símbolo; ahora tenemos su relación analítica con cantidades conocidas.

La propiedad conmutativa de la suma es general, tanto en el plano como en el espacio, limitándonos por ahora á los que están en un mismo plano; sean

$$a_\alpha = a\,(\cos \alpha + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \alpha)$$
$$b_\beta = b\,(\cos \beta + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \beta)$$
$$c_\gamma = c\,(\cos \gamma + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \gamma).$$

La suma de estas tres hipotenusas es, en magnitud y dirección

$$a_\alpha + b_\beta + c_\gamma = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + \sqrt{-1}\,(a \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \beta + c \operatorname{sen} \gamma),$$

hipotenusa de un triángulo rectángulo en que el cateto real es

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$$

y el indirecto puro

$$(a \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \beta + c \operatorname{sen} \gamma)\sqrt{-1};$$

y como son reales los sumandos de estos dos trinomios, se pueden ordenar como se quiera; y lo mismo será con los sumandos a_α, b_β, c_γ y cualquier número de ellos.

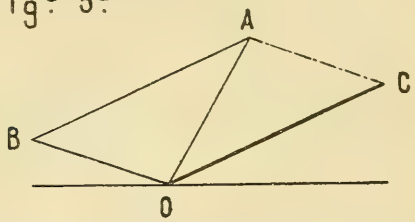
Sustracción.

10. Nada hay que alterar en la definición admitida de esta operación. Sea OA, figura 5.ª, el minuendo, y OB el sustraendo. Esta operación se expresa por $OA - OB$; pero el sustraendo se puede reemplazar por el sumando BO, por ser $BO = -OB$; de modo que tirando $AC = BO$, se tendrá

$$OA - OB = OA + BO = OA + AC = OC.$$

OC es la cantidad que, sumada con el sustraendo $CA = OB$, da por resultado el minuendo OA. De esto re-

Fig.ª 5.ª



sulta que el sustraendo se lleva en sentido inverso, de modo que su punto final B coincida con el punto final A del minuendo.

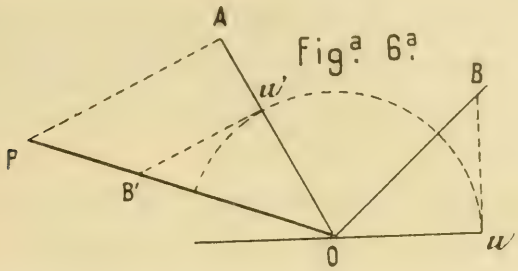
Al mismo resultado se llega tirando la recta BA, del punto final del sustraendo al final del minuendo, porque BA es lo que se ha de añadir al sustraendo OB para tener el minuendo OA.

Multiplicación.

11. De la definición admitida (núm. 4) se deduce que el producto ha de ser de la misma naturaleza que el multiplicando, porque el multiplicador es de la misma naturaleza que su unidad. En la multiplicación analítica el multiplicador viene á ser un número abstracto, aunque representado gráficamente por un vector; otro vector representa al multiplicando; y sea éste una línea, superficie, volumen, fuerza, velocidad,

etcétera, se entenderá que el vector producto será del género del multiplicando, y por muchas que sean las multiplicaciones sucesivas, nunca cambiará la naturaleza del producto.

Para la determinación del área de un rectángulo, el multiplicando no es un lado, sino el área de un rectángulo cuyas dimensiones son la longitud de este lado y la unidad lineal, ó sean las unidades superficiales que llenan una dimensión del rectángulo. El multiplicando es, pues, una superficie, y y por eso el producto lo es también. Análogamente, en la



demostración de volúmenes, cada multiplicando es un volumen.

Vamos á practicar la operación gráfica. Sea OA, figura 6.ª, el multiplicando; $OB = b_\beta$ el multiplicador referido á la unidad positiva Ou, α, y β los ángulos uOA y uOB que los factores forman con la unidad Ou. Como el producto ha de ser respecto al multiplicando lo que el multiplicador es respecto á la unidad positiva, es claro que si con Ou, OB y el ángulo comprendido β se forma un triángulo OuB y se hace girar hasta que Ou venga á Ou' sobre OA, se tendrá el triángulo $Ou'B'$, y tirando AP paralela á $u'B'$ hasta su encuentro con OB', el producto será OP, porque en magnitud y dirección es, respecto á OA, como OB es respecto á la unidad Ou.

El producto forma con Ou el ángulo $\alpha + \beta$, y su magnitud, respecto á la unidad, es ab; de modo que tenemos:

$$(1) \qquad a_\alpha \times b_\beta = ab_{\alpha+\beta},$$

ó bien

$$a(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\alpha) \times b(\cos\beta + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\beta) =$$
$$= ab\,[\cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)].$$

12. Si se hace la multiplicación por las reglas conocidas en el Algebra y se divide por ab, queda

$$\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \sqrt{-1}\,(\text{sen}\,\alpha\cos\beta +$$
$$+ \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)$$

Para que se verifique esta ecuación es necesario que la parte real del primer miembro sea igual á la del segundo, y lo mismo las partes afectadas del factor $\sqrt{-1}$; de modo que la última ecuación se descompone en

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta,$$
$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta.$$

Si uno de los ángulos es negativo, β, por ejemplo, es decir, si el factor estuviese por debajo de Ou, el producto estaría á la derecha del otro factor, formando con el eje real un ángulo $\alpha - \beta$, y sería

$$a_\alpha \times b_{-\beta} = ab_{\alpha-\beta},$$

ó bien

$$a(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\alpha) \times b(\cos\beta - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\beta) =$$
$$= ab\,[\cos(\alpha-\beta) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\alpha-\beta)];$$

suprimiendo el factor ab y haciendo la multiplicación del primer miembro,

$$\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \sqrt{-1}\,(\text{sen}\,\alpha\cos\beta -$$
$$- \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta) = \cos(\alpha-\beta) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\alpha-\beta),$$

de donde resultan las fórmulas

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta.$$

13. De la ecuación (1) se deduce que el orden de dos factores no altera el producto, y se puede colocar en el orden que se quiera cualquier número de factores de la forma hasta ahora conocida. En efecto

$$a_\alpha \times b_\beta \times c_\gamma \times d_\delta \times \ldots\ldots = ab_{\alpha+\beta} \times c_\gamma \times d_\delta \times \ldots\ldots =$$
$$= abc_{\alpha+\beta+\gamma} \times d_\delta \times \ldots\ldots = abcd_{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \times \ldots\ldots$$

y como los factores a, b, c, d pueden estar en cualquier orden, y lo mismo los sumandos del índice final, no sólo se puede alterar el orden de los factores a_α, b_β, c_γ, d_δ, sino que se pueden afectar los módulos a, b, c, d, ... de los índices como se quiera, es decir, que

$$a_\alpha \times b_\beta \times c_\gamma \times d_\delta = b_\delta \times d_\gamma \times c_\alpha \times a_\beta =$$
$$= abcd_{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

De esta misma ecuación se deduce que, en este grado de generalidad, la multiplicación, además de ser conmutativa, es asociativa; es decir, que multiplicar una cantidad por una serie de factores equivale á multiplicarla por el producto de éstos.

14. Consideremos ahora el producto de un polinomio por un monomio, y vamos á demostrar que

$$(a_\alpha + b_\beta + c_\gamma)\, d_\delta = a_\alpha d_\delta + b_\beta d_\delta + c_\gamma d_\delta =$$
$$= ad_{\alpha+\delta} + bd_{\beta+\delta} + cd_{\gamma+\delta}.$$

Esta propiedad, llamada distributiva, está demostrada en el Álgebra Elemental para cantidades reales, pero no se puede admitir para todas las cantidades sin nueva demostración.

La operación indicada en el primer miembro es que se efectúe la suma de los términos del polinomio y esta suma se multiplique por d_δ. Los sumandos llevados á continuación unos de otros forman una línea poligonal que cierra la suma.

Si ahora multiplicamos cada lado del polígono por d_δ, tendremos otro polígono semejante al anterior, porque tienen sus lados proporcionales y los ángulos iguales por formar todos los lados del segundo un ángulo δ con los del primero; de modo que la segunda suma es el producto de la primera por d_δ, y se verifica la ecuación que se quería demostrar.

Lo mismo se demostraría si el factor polinomio tuviese mayor número de términos.

15. Queda demostrado que la multiplicación es distributiva siendo el multiplicador monomio, y como está también demostrado que es conmutativa, es distributiva respecto á los dos factores.

Así, será

$$(a_\alpha + b_\beta)(c_\gamma + d_\delta) = (a_\alpha + b_\beta)\, c_\gamma + (a_\alpha + b_\beta)\, d_\delta =$$
$$= ac_{\alpha+\gamma} + bc_{\beta+\gamma} + ad_{\alpha+\delta} + bd_{\beta+\delta}.$$

Es decir, que cada término del multiplicando se multiplica por cada término del multiplicador, y el producto total será la suma de todos estos productos parciales.

Esta misma demostración se puede aplicar á polinomios de cualquier número de términos.

Resulta también que, recíprocamente, en un polinomio se pueden sacar factores comunes.

De la definición de la multiplicación resultan generalizadas otras dos propiedades características: que si uno de los factores es $+1$, el producto es el otro factor, y que si uno de varios factores es cero, el producto es cero.

16. En la multiplicación gráfica de polinomios suele ser más cómodo multiplicar las sumas efectuadas. Así, para el producto

$$(a_\alpha + b_\beta + c_\gamma)(d_\delta + f_\varphi)$$

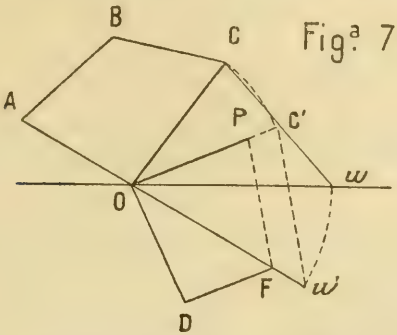
tomaremos

$$OA = a_\alpha, \qquad AB = b_\beta, \qquad BC = c_\gamma,$$

y la suma será OC. El otro factor es

$$d_\delta + f_\varphi = OD + DF = OF;$$

y siendo $Ou = 1$, para tener el producto $OF \times OC$, haremos deslizar el triángulo OuC hasta colocarse en $Ou'C'$;



tiramos FP paralela á $u'C'$, y el vector OP será el producto.

Esta construcción es más sencilla que la de los productos parciales.

División.

17. En esta operación entran dos cantidades, dividendo y divisor, y se trata de hallar una tercera, que se llama cociente, el cual, multiplicado por el divisor, ha de dar el dividendo.

Sea, figura 8.ª, el dividendo $OA = a_\alpha$, divisor $OB = b_\beta$, y designemos por d_δ el cociente.

Según la definición, ha de ser

$$b_\beta \times d_\delta = a_\alpha \qquad \text{ó} \qquad bd_{\beta+\delta} = a_\alpha.$$

Para que esta igualdad se verifique es necesario que sean iguales las magnitudes absolutas de los dos miembros $bd = a$, y que se confundan las direcciones, es decir, que $\beta + \delta = \alpha$; de donde resulta

$$d = \frac{a}{b}, \qquad \delta = \alpha - \beta, \qquad \frac{a_\alpha}{b_\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha - \beta}.$$

Según esta fórmula, la dirección del cociente se obtiene restando el ángulo β de α, y se tendrá la dirección OA'. Para tener por construcción la magnitud $\frac{a}{b}$, la deduciremos de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{d}{1}$ entre magnitudes, ó más exactamente, con las direcciones $\frac{a_\alpha}{b_\beta} = \frac{d_\delta}{1}$; para lo cual haremos girar el triángulo $A\,OB$ hasta que OB venga sobre el eje; OA vendrá á OA', y siendo $Ou = 1$, y tirando uD paralela á $B'A'$, se tendrá el lado OD, que satisface á la proporción, y será el cociente $OD = d_\delta$.

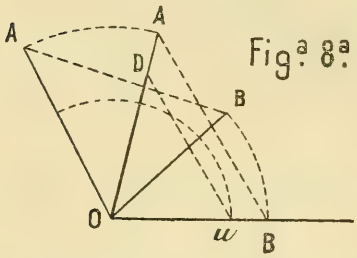


Fig.ª 8.ª

En la multiplicación, uno de los factores ha de tomarse como abstracto, pero pueden serlo los dos, en cuyo caso el producto también lo es. Como el dividendo es un producto, si es abstracto, lo serán el divisor y el cociente. Uno de los dos tiene que ser concreto y el otro abstracto si el dividendo es concreto.

Para la división de polinomios siempre habrá que reducir el divisor á un solo vector, efectuando la suma gráfica de sus términos, y entonces se puede, según convenga, dividir cada término del dividendo por el divisor y sumar los cocientes, ó bien sumar los términos del dividendo para reducirlo á monomio, y hacer la división por el procedimiento indicado en la figura 8.ª, que generalmente es preferible.

(Continuará).

XX. — Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general.

Por Antonio Torroja y Miret

(Conclusión.)

SEGUNDA PARTE

Curvatura á lo largo y en torno de una generatriz rectilínea.

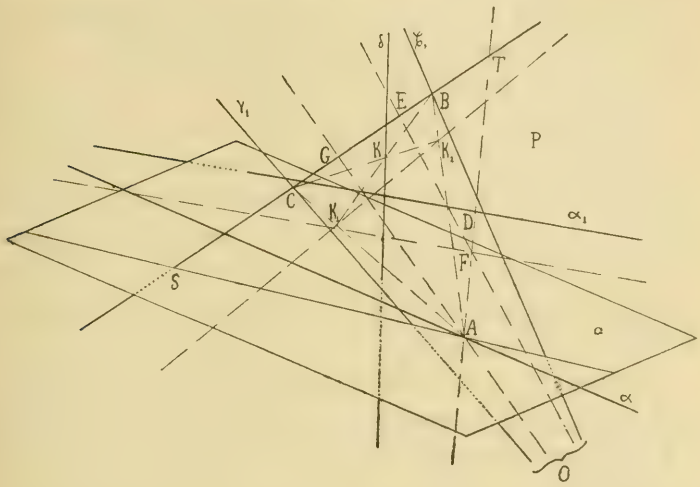
I. Caso en que la generatriz rectilínea considerada es ordinaria.

Del mismo modo que para facilitar el estudio de la curvatura de la superficie dada S en un punto y plano tangente, la hemos sustituído por otra que tuviera con ella un contacto de segundo orden en ese punto y plano tangente, y en la cual este estudio fuera más sencillo, vamos en este caso también á buscar otra superficie S' qne pueda sustituir á la S en lo relativo á curvatura á lo largo de la generatriz rectilínea α, es decir, que tenga con ella un contacto de segundo orden en todos los puntos y planos tangentes que están y pasan, respectivamente, por esta generatriz, que supondremos ordinaria primeramente, siendo para ello preciso que esta nueva superficie S' (alabeada, naturalmente) pueda considerarse como límite de otra que tenga comunes con la S tres generatrices rectilíneas, α_1, α y α_2, cuando estas dos α_1, y α_2 se confunden con la α. Si queremos que esta superficie auxiliar S' sea de segundo orden, para mayor sencillez, el problema sólo admite una solución, puesto que las tres generatrices α_1, α y α_2, determinan completamente la cuádrica que por ellas pasa, y que en el límite, al confundirse estas generatrices en una, será un hiperboloide si la generatriz α es propia y la línea σ de intersección de la superficie S con

el plano del infinito, no es de curvatura nula en el punto situado sobre esta generatriz, y un paraboloide, si este punto de la línea σ es de curvatura nula, ó la generatrz α está en el plano del infinito. Para toda generatriz rectilínea ordinaria de una superficie alabeada existe, pues, una cuádrica y sólo una, que tiene con ella un contacto de segundo orden en todos los puntos de esta generatriz y planos tangentes que por ella pasan, y que se llama cuádrica osculatriz á lo largo de ella.

Como para todo punto de esta generatriz y plano tangente correspondiente conocemos, de este modo, las dos asíntotas de la indicatriz I y los planos asintóticos de su cilindro proyectante, que son la misma generatriz rectilínea α y la generatriz del otro sistema de la cuádrica osculatríz á lo largo de ella y los dos planos que las proyectan paralelamente á las generatrices del cilindro indicado, nos bastará conocer otro punto de la indicatriz ú otro plano tangente á su cilindro proyectante, es decir, la curvatura de otra sec ción que pase por cada punto de la generatriz α, ó de otro cilindro circunscrito tangente á cada plano que pase por ella, para tener conocidas las indicatrices y sus cilindros proyectantes referentes á todos los puntos y planos que están y pasan, respectivamente, por dicha generatriz rectilínea. Si tomamos esas secciones de modo que sus planos sean paralelos, el problema se reduce, pues, en lo que á ellas se refiere, á buscar la línea H, lugar de los centros de sus círculos osculadores en los puntos de esa generatriz, ó, lo que es lo mismo, para tomarlo con toda generalidad, la línea H, lugar de los polos de una recta m respecto de las cónicas π que la cortan en dos puntos fijos B y C, y tienen con las secciones producidas en la superficie S por los planos que por ella pasan, un contacto de segundo orden en los puntos de una generatriz rectilínea α. Consideremos, con objeto de resolver este problema, otra generatriz rectilínea α_1 (Fig. 1.ª), y busquemos, en un plano P que pase por la recta

m, el polo de esta recta respecto de la cónica π que pasa por los puntos B y C y los A y D de intersección del plano P con las generatrices rectilíneas α y α_1, siendo tangente en A al plano a tangente á la superficie S. Este polo estará determinado por las polares de dos de los puntos de la recta



m; tomemos los S y T de intersección con el plano tangente a y con la recta n que, pasando por A, se apoya en las α_1 y m. La polar del punto S estará determinada, á su vez, por el punto A y el G, armónicamente separado del S por los B y C, y la polar de T será la recta de unión de los puntos E y F, armónicamente separados del T por los B y C y los A y D. Si ahora suponemos que el plano P gira en torno de la recta m, pasando por todos los puntos de la generatriz rectilínea α, los distintos puntos G formarán una serie proyectiva con la de los puntos S, que, á su vez, lo es con el haz de planos tangentes a y, por tanto, con la serie de puntos de contacto A; las rectas AG engendran pues, una cuádrica. Del mismo modo, los puntos F forman una recta, que sería la generatriz rectilínea armónicamente separada de la recta m por las α y α_1 en la cuádrica que estas tres rectas deter-

minan; la serie de los puntos F es, pues, rectilínea y proyectiva con la de los T, que, á su vez, lo es con la de los E, formando, por tanto, las rectas EF otra cuádrica. La línea que buscamos, lugar de los polos de la recta m, es, pues, la línea común á estas dos cuádricas, cuya intersección se compone de la recta m y una línea de tercer orden, que corta á esta recta en los dos puntos en que estas dos cuádricas son tangentes, que son los armónicamente separados por los B y C de las dos posiciones de los S y T en que éstos están confundidos, y á la generatriz rectilínea σ en sus dos puntos de intersección con la cuádrica que engendra la recta EF, que son los determinados por esta generatriz y las dos rectas que pasando por los puntos B y C se apoyan en las generatrices rectilíneas α y α_1.

Estas cónicas π forman una superficie, cuyo orden se puede determinar buscando los puntos en que la corta una recta cualquiera δ; para lo cual podemos considerar engendrada cada cónica π por los dos haces proyectivos de vértices B y C y centro proyectivo el O, de intersección de las dos tangentes en estos puntos, y polo, por tanto, de la recta m. Para que el punto K, común al plano P y la recta δ, pertenezca á la cónica π situada en ese plano, es preciso que la recta K_1K_2 pase por el centro proyectivo O. Ahora bien; al moverse el plano P, esta recta K_1K_2 engendra una cuádrica, cuyas directrices son la recta m y las de intersección de los planos αB y δC y los αC y δB, de modo que los puntos comunes á esta cuádrica y la línea de los puntos O son seis, de los cuales hay que descartar los dos situados sobre la recta m; la superficie formada por las cónicas π es, pues, de cuarto orden. Las tangentes á estas cónicas en los puntos B y C forman las dos superficies cónicas de tercer orden que desde estos puntos proyectan la línea H, lugar de los polos O.

Supongamos ahora que el punto B es uno de los dobles de las dos series proyectivas de puntos S y T; entonces, para la posición del plano P en que los puntos E y T se

confunden con el B, les sucederá lo mismo á los S y G, de modo que las dos rectas AG y EF se confundirán con la $A\,B$, que formará parte de la línea de intersección de las dos cuádricas que estas rectas engendran. Si el punto C se confunde con el otro de los puntos dobles de las dos series dichas, la recta $A\,C$ correspondiente será también común á estas dos cuádricas y la línea lugar de los polos O se compondrá de rectas. (*) Las superficies formadas por las tangentes β_1 y γ_1 en los puntos B y C serán dos planos, los puntos de intersección de la recta δ con la superficie formada por las cónicas π se reducirán á dos y esta superficie será, por tanto, la cuádrica determinada por las rectas α y α_1 y el haz de planos a tangentes en los puntos A; como tenía que suceder, puesto que lo que hemos hecho ha sido tomar para puntos B y C los de intercesión de la recta m con la cuádrica dicha, en cuyo caso las cónicas π son las secciones planas de la misma.

Si ahora suponemos que la generatriz rectilínea α_1 de la superficie alabeada propuesta S se mueve, acercándose á la α hasta confundirse con ella, siendo ordinaria esta generatriz, las cónicas π tendrán un contacto de segundo orden con las secciones producidas en la superficie S por los planos que pasan por la recta m, y los polos O formarán la línea H buscada, que corta á la generatriz rectilínea α en los puntos de contacto de los planos αB y αC con la superficie S, y á la recta m en los dos puntos armónicamente separados por los B y C de los M y N en que cortan á esta recta las tangentes en los puntos situados en la generatriz α de las dos secciones de la superficie S cuyos planos pasan por dicha recta m y son de curvatura nula en ellos, siendo fácil ver que estos puntos M y N no son sino los de intersección de dicha recta m con la cuádrica osculatriz de la superficie S á lo largo de

(*) Téngase en cuenta que los dos puntos A que determinan estas rectas $A\,B$ y $A\,C$ no son uno mismo, sino las dos posiciones que están en un plano con la recta α_1 y cada uno de los puntos B y C.

su generatriz rectilínea α. Si además suponemos que los puntos B y C son los dobles antes indicados, la cuádrica que entonces forman las cónicas π pasa á ser ésta, osculatriz de la superficie S á lo largo de la generatriz α.

Tomemos ahora para puntos B y C un par de puntos circulares; los planos P serán paralelos, las cónicas π se convertirán en los círculos osculadores y los puntos O serán sus centros. Vemos, pues, que la línea H lugar de los centros de los círculos osculadores en los puntos de una generatriz rectilínea ordinaria α de una superficie alabeada, de las secciones que en ella produce un haz de planos paralelos, es una línea de tercer orden.

Los puntos en que esta línea corta á la recta m son, como hemos visto, los armónicamente separados por los B y C de los M y N de intersección de esta recta con la cuádrica osculatriz de la superficie propuesta S á lo largo de la generatriz rectilínea α, y son, por consiguiente, en el caso de que esta cuádrica sea un hiperboloide, dos reales, uno real ó dos imaginarios, según que la recta m sea secante, tangente ó exterior á su línea del infinito, y en el caso de que dicha cuádrica sea un paraboloide, son siempre reales, pudiendo estar ó no confundidos; todo lo cual puede verse directamente, teniendo en cuenta que el centro de curvatura estará en el infinito cuando la curvatura sea nula, lo cual exige que la sección producida por el plano P en la cuádrica indicada, se componga de rectas, es decir, que dicho plano secante pase á ser tangente á ella. Los puntos de curvatnra infinita son los de intersección de la línea H con la generatriz rectilínea α de que se trata, los cuales, según hemos visto, son los de contacto de los dos planos que pasan por esta generatriz α y por los puntos B y C, planos que, en este caso, son los dobles de la involución rectangular, cuya arista es esta generatriz rectilínea, reduciéndose, para estos dos puntos, el círculo osculador á los dos pares de elementos dobles de los dos haces de rectas alabeados en involución determinados

por la involución rectangular de planos, cuya arista es la generatriz α y el haz de planos en involución que, desde la recta m, proyecta la involución de puntos de contacto de los planos de dicha involución rectangular, cuya arista es esa generatriz rectilínea. Los puntos de la generatriz α en los cuales la curvatura de las secciones que estamos estudiando, tiene un valor determinado, son los correspondientes á los puntos de intersección de la línea H con el cilindro que proyecta paralelamente á esta generatriz rectilínea el círculo situado en uno de los planos secantes P, cuyo centro esté en dicha generatriz α y cuyo radio tenga el valor dado; estos puntos, serán, pues, en general, seis reales ó imaginarios.

Por un razonamiento correlativo con el anterior, se puede hallar la envolvente h de los planos polares o de una recta m respecto de los conos Π tangentes á dos planos fijos b y c que pasan por ella y tienen un contacto de segundo orden en los planos que pasan por una generatriz rectilínea ordinaria α de una superficie alabeada S con las superficies cónicas Π' circunscritas á ella y cuyos vértices son los puntos de la recta m. Esta envolvente h es una desarrollable de tercera clase, cuyos planos tangentes que pasan por la generatriz α son los tangentes á la superficie S en los puntos αb y αc y que tiene por planos tangentes trazados por la recta m, los armónicamente separados por los b y c de los dos que pasan por esta recta y son tangentes á la cuádrica osculatriz de la superficie propuesta S á lo largo de la indicada generatriz α. Pero no podemos llevar más adelante la correlación porque no la admite el concepto de circunferencia, basado en la noción de perpendicularidad; de modo que si quisiéramos tener dada la curvatura de las superficies cónicas Π' circunscritas á la S y cuyos vértices están en una recta m, no indirectamente, como en lo que acabamos de indicar, por la de un sistema de conos que tienen con estas superficies un contacto de segundo orden, sino directamente, como en el caso correlativo, por la superficie lugar de los

ejes de los conos de revolución osculadores de las superficies Π' en sus planos tangentes que pasan por la generatriz α, el problema que habríamos de resolver es, en su enunciado y en el camino que hay que seguir para resolverle, enteramente distinto de los dos correlativos anteriores, obteniéndose para lugar de estos ejes de curvatura una superficie alabeada de orden superior, en cuyo estudio no nos detendremos por no presentar interés práctico alguno.

II. Caso en que la generatriz rectilínea considerada es una arista.

Consideremos ahora el caso de que la generatriz rectilínea α sea una arista de la superficie y vamos a estudiar en conjunto la curvatura de ésta en los diferentes

puntos que están en	planos que pasan por

dicha generatriz. Desde luego podemos afirmar que no existe cuádrica osculatriz de la superficie propuesta S á lo largo de ella, ó mejor, que dicha cuádrica, límite de la determinada por tres generatrices α, α_1 y α_2 que se acercan, se reduce, considerándola como conjunto de

puntos,	planos,
á los planos w y j, puesto, que las dos generatrices α y α_1 tienden á estar en un plano w, y el límite del plano determinado por su punto de intersección W y la generatriz α_2 es el j.	á los puntos W y J, puesto que las dos generatrices α y α_1 tienden á pasar por un punto W, y el límite del punto determinado por el plano que las contiene w y la generatriz α_2, es el J.

Para tener definida la curvatura de la superficie S en todos los puntos de la arista y planos que por ella pasan, no podemos, pues, como hemos hecho en los demás casos, tomar una superficie auxiliar que tenga con ésta un contacto de segundo orden en todos esos puntos y planos, ya que esta superficie auxiliar, siendo de orden superior al segundo, no presentaría la sencillez conveniente; pero como en

este caso los puntos y planos tangentes que están y pasan, respectivamente, por la generatriz considerada α, son, según hemos visto, parabólicos, nos bastará conocer la curvatura de una

sección que pase por cada uno de estos puntos,	desarrollable circunscrita tangente á cada uno de estos planos,

para tener determinada la curvatura de la superficie S en todos ellos. El problema se reduce, pues, á estudiar la línea H y la desarrollable h, ya consideradas cuando la generatriz rectilínea á que se refieren es ordinaria, y ver las variaciones que presentan, cuando se refieren á una arista, siendo en este caso cuando tienen verdadera importancia, por ser, como acabamos de ver, el medio más sencillo de determinar la curvatura de la superficie propuesta á lo largo y en torno de una arista α.

Comenzando por considerar la línea H lugar de los polos O de la recta m, que supondremos determinados, como en el caso anterior, por las rectas $A\,G$ y EF, polares de los puntos S y T (fig. 1.ª), vemos desde luego que á todos los putos A de la arista α corresponde el mismo punto S, excepto al vértice W, al cual corresponden todos los de la recta m; por consiguiente, la cuádrica engendrada por la recta $A\,G$ se reduce al conjunto de dos planos: el r, que pasa por la arista α y está armónicamente separado del punto S, y, por tanto, del plano w, por los puntos B y C, y el Wm, determinado por el vértice W y la recta m. La linea de intersección de este par de planos con la cuádrica que engendra la recta EF, se compone pues de dos rectas, situadas en el plano Wm, una de las cuales es la m y la otra la T, posición de la EF en que esta recta está situada en este plano, y una cónica H' situada en el plano r, que corta á la arista α en los puntos de la misma situados en las rectas que pasan por los B y C y cortan á las generatrices α y α_1, y á la rec-

ta m en su punto de intersección con el plano r, siendo su tangente en dicho punto la recta que le une con el común al plano tangente w y la generatriz rectilínea α_1. Al moverse esta generatriz hasta confundirse con la α, las cónicas π pasan á tener un contacto de segundo orden con las secciones que sus planos producen en la superficie S, y la línea H, formada por los polos O de la recta m, sigue siendo una cónica, cuya tangente, en su punto de intersección con esta recta, es la recta que une este punto con el J, común á la arista α y á la línea de la superficie situada en el plano tangente w, y cuyos dos puntos de intersección con la arista considerada α, se confunden en uno de contacto, que es el vértice W, como de contacto de los dos planos αB y αC.

Si ahora suponemos que los puntos B y C son un par de puntos circulares, todos los planos secantes son paralelos, las cónicas π se transforman en los círculos osculadores y la línea H, lugar de sus centros O, se compone, prescindiendo de la recta m, de una cónica H' situada en el plano r perpendicular al tangente w, tangente ella misma á la arista α en el vértice W de la superficie situada en ella, y una de cuyas asíntotas es la recta del plano r que pasa por el punto J y corta á la recta m, siendo, en general, la otra asíntota de dicha cónica, oblicua respecto de la arista α; y de la recta T, que pasa por el vértice W y corta á la recta m en el punto conjugado, en el sistema polar absoluto, de el de intersección de esta recta con el plano j, siendo los puntos de esta recta T los centros de los círculos tangentes en el vértice W á la recta de intersección de los planos $m\,W$ y j, los cuales aparecen como osculadores de la sección que este plano $m\,W$ produce en la superficie S, por ser en ella de retroceso el punto W.

Consideraciones correlativas de las que acabamos de exponer, muestran que la desarrollable h, envolvente de los planos polares de una recta m respecto de los conos Π tangentes á dos planos fijos b y c que pasan por ella y tienen

un contacto de segundo orden en los planos que pasan por una arista α de una superficie alabeada S, con las superficies cónicas Π' circunscritas á ella y cuyos vértices son los puntos de la recta m, se descompone, prescindiendo del haz de planos cuya arista es esta recta, en un cono de segunda clase h', tangente al plano w á lo largo de la arista α, cuyo vértice es el punto R de dicha arista armónicamente separado del W por los dos planos b y c, y que tiene como generatriz de contacto con el plano tangente que pasa por la recta m, la recta de intersección de este plano con el j; y de la recta t, de intersección del plano w con el que pasa por la recta m y está armónicamente separado del punto J por los planos b y c, siendo los planos que pasan por esta recta t, los polares de la recta m respecto de los conos tangentes á los planos b y c y al w según la recta que une el punto J con el mw, los cuales aparecen como teniendo un contacto de segundo orden en el plano w con la superficie cónica, de vértice mw, circunscrita á la superficie S, por ser, en ella, de inflexión dicho plano tangente w.

La elección de los planos b y c queda á nuestro arbitrio y, como no podemos tomarlos de modo que los conos Π sean de revolución, que sería lo más conveniente, los tomaremos paralelos y equidistantes del vértice W, con lo cual estos conos se convierten en cilindros, cuyo plano diametral, conjugado con la dirección que define la arista α, es el plano paralelo á los b y c que pasa por el punto W, y cuyos ejes son las rectas de intersección de este plano con los polares de la recta m, cuya envolvente es el cono h', que ahora pasa también á ser cilindro; la envolvente de estos ejes es, pues, una cónica h_1', tangente á la recta de intersección de su plano con el w en el vértice W y á la recta m en su punto común con el plano j. El radio de curvatura de una cónica en uno de sus puntos A es igual, como sabemos, al tercero proporcional entre la longitud del semidiámetro paralelo á la tangente en el punto A y la distancia de este punto á dicho

diámetro; por consiguiente, el radio de curvatura de cada uno de los cilindros Π, en su plano tangente que pasa por la arista α, y por tanto, de las superficies cilíndricas Π', cuyas generatrices son paralelas á la orientación m, es el tercero proporcional entre la semidistancia entre las dos rectas de intersección con los planos b y c del plano polar correspondiente de la recta m y la distancia del punto W á este plano polar. Si además suponemos que la recta m es la orientación perpendicular á la arista α, la distancia entre estas dos rectas que acabamos de indicar, es constante é igual á la que separa los planos b y c, y la curvatura de las superficies cilíndricas Π', cuyas generatrices son ahora perpendiculares á la arista α, es proporcional á los radios vectores correspondientes de la podaría, respecto del punto W, de la sección recta del cilindro h', que se confunde con la cónica h_1' ya indicada.

El conjunto de las dos cónicas H' y h'_1 que para simplificar pueden tomarse como hemos dicho, referentes á la orientación perpendicular á la arista considerada α como recta m, determinan, pues, sencilla y completamente, la curvatura de las líneas de la superficie S y de las desarrollables circunscritas á ella, en los puntos y planos tangentes que están y pasan, respectivamente, por una de sus aristas α, deduciéndose de su consideración que la curvatura de las

secciones producidas en una superficie alabeada S por los planos perpendiculares á una arista α de la misma, en los puntos de ésta, presenta, en general, dos valores máximos y dos mínimos; éstos, iguales á cero, corresponden, uno al punto J de contacto é intersección de la superficie con el plano tangente w, que

superficies cilíndricas circunscritas á una alabeada S y de generatrices perpendiculares á una arista α de la misma en los planos que pasan por ésta, presenta, en general, un valor mínimo y otro máximo; éste, igual á infinito, corresponde al plano j tangente á la superficie S y á la superficie cónica cir-

tiene en él, como sabemos, un contacto de segundo orden con ella, y el otro situado, en general, en el infinito; los dos máximos corresponden, el uno, igual á infinito, al vértice W, en que la curvatura es infinita por ser de retroceso en las secciones de la superficie que por él pasan, y el otro al punto simétrico de éste respecto del J, puesto que ha de estar armónicamente separado del W por los J y del infinito, como común á la generatriz α y á la línea de contacto de la superficie cónica circunscrita á la S y cuyo vértice es el punto del infinito de esta generatriz.

cunscrita á ella y cuyo vértice es el punto W, que tiene en él, como sabemos, un contacto de segundo orden con ella; y el valor mínimo, igual á cero, corresponde al plano w tangente á lo largo de la arista, en que la curvatura es cero por ser de inflexión este plano en las superficies cónicas circunscritas á la S y cuyos vértices están en él. Cuando los dos planos w y j son perpendiculares entre sí, el punto W es vértice de la cónica h'_1 y las superficies cilíndricas circunscritas á la S, y cuyas generatrices son simétricas respecto de los planos w y j, son de igual curvatura.

Si se confunden los dos puntos W y J, así como los dos planos w y j, circunstancias que, como sabemos, han de presentarse simultáneamente,

la cónica H', que, en general, es una hipérbola, se descompone en un par de rectas que pasan por el punto WJ, de las cuales, la que no corta á la m, es el lugar de los centros de los círculos osculadores de las secciones consideradas de la superficie S, que no pasan por este punto, reapareciendo en este caso las cuádricas que tienen con esta superficie un contacto de se-

el cilindro h', que, en general, es parabólico, se descompone en un par de rectas situadas en el plano wj, de las cuales, la que no corta á la m es la envolvente de los planos diametrales (conjugados con esta dirección) de las superficies cilíndricas Π', no tangentes á este plano, reapareciendo en este caso las cuádricas que tienen con la superficie S un contacto

gundo orden á lo largo de la generatriz rectilínea α, pero en número infinito y reducidas á conos cuyo vértice es dicho punto, puesto que toda superficie cónica que tenga ese vértice y un contacto de segundo orden con la S en un punto de la arista α, lo tiene en todos los demás.

La otra de las dos rectas en que se descompone la cónica H', se confunde con la T ya considerada, que aparece como doble, quedando indeterminada la curvatura de la sección producida en la superficie S por el plano $m\,W$, por aparecer como tangentes á ella en el punto W, todas las rectas de su plano que pasan por él.

de segundo orden en torno de la generatriz rectilínea α, pero en número infinito y reducidas á cónicas cuyo plano es el wj, puesto que toda línea situada en ese plano y que tenga un contacto de segundo orden con la superficie S en un plano que pasa por la arista α, lo tiene en todos los demás.

La otra de las dos rectas en que se descompone el cilindro h', se confunde con la t ya considerada, que aparece como doble, quedando indeterminada la curvatura de la superficie cilíndrica circunscrita á la S y de generatrices paralelas á la dirección mw, por aparecer como generatrices de contacto con ella del plano w, todas las rectas de éste paralelas á esas generatrices.

Fácil es, después de lo dicho, deducir las variaciones que se presentan en la curvatura de una superficie alabeada S á lo largo y en torno de una arista α cuando alguno de los puntos W y J ó de los planos w y j correspondientes es del infinito, puesto que las propiedades de carácter proyectivo de la cónica H' y el cono h' subsisten; debiéndose elegir los puntos B y C y los planos b y c del modo más conveniente, en cada caso, para facilitar este estudio.

PARTE TERCERA

Líneas y desarrollables definidas por la curvatura.

En las superficies alabeadas uno de los sistemas de líneas asintóticas está constituído por las generatrices rectilíneas; el otro sistema lo forman líneas, cuyas tangentes en sus puntos de intersección con una generatriz ordinaria, son las generatrices rectilíneas de la cuádrica osculatriz de la superficie alabeada á lo largo de ella. Las series de puntos que las líneas asintóticas de este sistema determinan en dos generatrices rectilíneas α y α' de una superficie alabeada, pueden relacionarse, considerando otras n generatrices intermedias α_1, α_2, ...α_n y las tangentes á las líneas asintóticas en sus puntos P de intersección con estas generatrices. Si suponemos que el número n aumenta indefinidamente, las tangentes á una misma línea asintótica en los dos puntos en que corta á dos generatrices rectilíneas consecutivas de éstas, α_m y α_{m+1}, tienden á estar en el plano osculador de esta línea, el cual es tangente á la superficie por ser asintótica dicha línea, siendo, por consiguiente, perspectiva la serie de los puntos P situados en la generatriz α_{m+1}, con el haz de planos tangentes á la superficie en la serie de los puntos P situados en la generatriz α_m; de donde se deduce que estas dos series de puntos son proyectivas, pudiendo, por la sucesiva consideración de todas esas generatrices, afirmarse lo mismo de las series de puntos P situados en las α y α'. Las series de puntos determinadas por las líneas asintóticas de una superficie alabeada en dos de sus generatrices rectilíneas son, pues, proyectivas, siempre que se puede pasar de una á otra generatriz sin encontrar ninguna generatriz singular, en cuyo caso aquella afirmación carece de sentido.

A las líneas asintóticas, tangentes en cada punto á las líneas de la superficie de curvatura nula en él, corresponden, en la correlación, las desarrollables que tienen, en cada plano

tangente, las mismas generatrices rectilíneas que las desarrollables circunscritas á la superficie dada y de curvatura infinita en él, confundiéndose dichas desarrollables con las circunscritas á la superficie considerada á lo largo de las líneas asintóticas, que son sus aristas de retroceso. En las superficies alabeadas, uno de los sistemas de estas desarrollables, que podrían llamarse asintóticas, si esta palabra no tuviera ya otra significación, por tener como generatrices rectilíneas las asíntotas de la indicatriz, y que nosotros llamaremos desarrollables de asíntotas, está formado por los haces de planos cuyas aristas son las generatrices rectilíneas, siendo evidente, después de lo dicho, que los planos que pasan por dos generatrices ordinarias α y α' de una superficie alabeada y son tangentes á sus desarrollables de asíntotas del otro sistema, forman dos haces proyectivos, en el supuesto siempre de que entre las dos generatrices α y α' no haya ninguna singular.

En el caso de que la generatriz rectilínea que se considere sea una arista de la superficie, por ser parabólicos los

puntos en ella situados y de retroceso el vértice W correspondiente, las líneas asintóticas del otro sistema sólo pueden atravesarla, sin ser tangentes á ella, en el punto J, en que la superficie tiene un contacto de segundo orden con el plano tangente w. Pero este punto, como doble de la línea de la superficie situada en el plano w, es el límite del punto de contacto de un plano tangente cualquiera, que se mueve acercándose al w; y como, en cada posición de este punto

planos que por ella pasan y de inflexión el plano w correspondiente, las desarrollables de asíntotas del otro sistema sólo pueden tener como plano tangente que pase por ella, sin ser tangente á lo largo de la misma, el plano j, en que la superficie tiene un contacto de segundo orden con el vértice W. Pero este plano, como doblemente tangente á la superficie cónica de vértice W; circunscrita á la propuesta, es el límite del plano tangente en un punto de la superficie, que se

móvil, pasan por él dos líneas asintóticas, que son la generatriz rectilínea correspondiente y una linea, tangente en ese punto al resto de la línea de intersección de la superficie con el plano tangente; en el límite, al confundirse el plano móvil con el w, pasarán por el punto j dos líneas asintóticas, una de las cuales es la arista α, siendo la otra tangente en él á la otra rama de la línea de la superficie situada en el plano w.

mueve acercándose al W; y como, en cada posición de este plano móvil, le son tangentes dos desarrollables de asíntotas, que son el haz de planos que pasan por la generatriz rectilínea correspondiente y una desarrollable, tangente en ese plano al resto de la superficie cónica circunscrita á la propuesta y cuyo vértice es el punto de contacto; en el límite, al confundirse el punto móvil con el W, serán tangentes al plano j dos desarrollables de asíntotas, una de las cuales es el haz de planos que pasan por la arista α, siendo la otra tangente en él á la otra hoja de la superficie cónica circunscrita á la dada y de vértice W.

Las demás líneas asintóticas de este segundo sistema han de ser, pues, tangentes á la arista α, bien en el vértice W, bien en sus diferentes puntos.

Las demás desarrollables de asíntotas de este segundo sistema han de ser, pues, tangentes á lo largo de la arista α, bien al plano w, bien á los diferentes planos que por ella pasan.

Ahora bien: en las aristas de las superficies alabeadas han de presentarse siempre, como hasta aquí hemos visto, las circunstancias correlatívas, por comprender su definición las dos propiedades correlativas de ser límite de dos generatrices que tienden á pasar por un punto y estar en un plano; por consiguiente, si se verifica uno de los dos supuestos de la izquierda ha de verificarse el correlativo de la derecha é inversamente. Pero si las líneas asintóticas son tangentes á

una arista α en sus diferentes puntos, sus planos osculadores en estos puntos se confunden con el w, tangente en ellos á la superficie, y, por tanto, á él serán tangentes las desarrollables de asíntotas, engendradas, como sabemos, por estos planos osculadores, en contra del supuesto correlativo de la derecha; pudiéndose deducir del mismo modo que si estas desarrollables fuesen tangentes á lo largo de dicha arista á los diferentes planos que por ella pasan, las líneas asintóticas serían tangentes á ella en el vértice W, circunstancias que, como hemos dicho, son también incompatibles.

Las líneas asintóticas son, pues, tangentes á cada arista de la superficie en su vértice W, en el cual tienen por plano osculador, en virtud de lo dicho en la columna de la derecha, el plano w tangente á lo largo de ellas. Hay, no obstante, una línea asintótica que pasa por el vértice y no es tangente á la arista α, que es la línea de contacto con la superficie de la desarrollable de asíntotas, ya indicada, tangente al plano j; esta línea tiene, en general, de retroceso el vértice W y, en él, tiene por tangente, la generatriz de la superficie cónica propiamente tal, circunscrita á la superficie dada y cuyo vértice es este punto.

Las desarrollables de asíntotas son, pues, tangentes á lo largo de cada arista de la superficie al plano w correspondiente, teniendo, en virtud de lo dicho en la columna de la izquierda, como punto de sus aristas de retroceso situado en él, el vértice W correspondiente. Hay, no obstante, una desarrollable de asíntotas tangente á este plano á lo largo de una recta distinta de la arista α, que es la desarrollable circunscrita á la superficie á lo largo de la línea asintótica, ya indicada, que pasa por el punto J; esta desarrollable tiene, en general, de inflexión el plano w y, en él, tiene por generatriz rectilínea, la tangente á la curva de intersección de la superficie dada con este plano tangente.

Para las generatrices singulares, límite de tres generatri

ces que, al acercarse, tienden á pasar por un punto W_1 y estar en un plano w_1, razonamientos análogos á los anteriores, nos harían ver que la posición que respecto de ellas tienen las líneas y desarrollables asintóticas, es la misma que en el caso de las aristas, salvo que la

línea asintótica que pasa por el punto W_1 sin ser tangente en él á la generatriz rectilínea, tiene, en general, de inflexión este punto y la tangente en él, que es la generatriz de la superficie cónica circunscrita á la dada y cuyo vértice es dicho punto.

desarrollable de asíntotas tangente al plano w_1 á lo largo de una recta distinta de la generatriz rectilínea, tiene, en general, de retroceso este plano y la generatriz de contacto, que es la tangente á la línea de intersección de la superficie con dicho plano tangente.

Las líneas de curvatura, como tangentes en cada punto á las tangentes principales de la superficie, bisecan los ángulos formados por la generatriz rectilínea y la línea asintótica del otro sistema, que pasan por el punto considerado.

Las aristas y generatrices singulares de las superficies alabeadas, que aparecen como reunión de dos ó tres generatrices que tienden, al acercarse, á pasar por un punto y estar en un plano, son líneas de curvatura de las mismas, por ser líneas de contacto con un plano. Las líneas de curvatura del otro sistema las cortan normalmente en todos sus puntos, excepto en el de intersección de esas generatrices con la otra rama de la línea de la superficie situada en el plano tangente á lo largo de ellas; punto por el cual pasan, además de la generatriz rectilínea, otras dos líneas de curvatura, que bisecan los ángulos formados por dicha generatriz y la tangente á la línea antes indicada, como puede verse considerando dicho punto como límite del de contacto de un plano que se mueve acercándose al tangente á lo largo de la generatriz singular considerada.

De los dos ángulos que forman la generatriz rectilínea y

la línea asintótica del otro sistema, que pasan por un punto, el uno disminuye hasta anularse, y el otro aumenta hasta ser igual á dos rectos, cuando aquella generatriz se acerca á una singular hasta confundirse con ella; por consiguiente, así como las líneas de curvatura tangentes á las bisectrices de los ángulos homólogos de este segundo llegan á ser perpendiculares á las generatrices singulares, las líneas de curvatura del otro sistema, cuyas tangentes están contenidas en cada momento en los ángulos homólogos del primero, han de pasar por los vértices y puntos análogos W_1 de la superficie, siendo en ellos tangentes á las generatrices rectilíneas que los contienen.

Aunque no sean verdaderamente correlativas con las líneas de curvatura, puesto que el concepto de éstas está basado en la perpendicularidad, que no admite correlación, pudieran considerarse como relacionadas con ellas, las desarrollables circunscritas á lo largo de las mismas, que tienen por generatrices las tangentes á las líneas de curvatura de sistema distinto de el de su línea de contacto, y las desarrollables engendradas por los planos osculadores de estas líneas, cuyas generatrices son las tangentes á las mismas; pero no nos detendremos en su estudio, por no presentar especial interés en las superficies alabeadas.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XVI.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia tercera..... 357

XVII.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia cuarta..... 376

XVIII.—Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Miukoswki (continuación), por *B. Cabrera*..... 398

XIX.—Geometría Analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades, por *Modesto Domínguez Hervella*..... 420

XX.—Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general (conclusión), por *Antonio Torroja y Miret*..... 441

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NUMERO 7.
ENERO DE 1913.

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1913

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXI.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia quinta.

SEÑORES:

La ecuación general de la Dinámica y que, como caso particular, comprende todos los problemas de Estática, sabemos que es la siguiente: la hemos recordado en la conferencia anterior, y la reproducimos al empezar esta,

$$\Sigma\left[\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\right.$$
$$\left.+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z\right]=o. \qquad (1)$$

Con las salvedades que detalladamente explicamos, puede decirse, que toda la Mecánica clásica está comprendida en la ecuación precedente, y de ella vamos á partir para cuanto nos proponemos exponer en el presente curso.

Expresa, como sabemos, las condiciones de equilibrio de un sistema, formado por las fuerzas X, Y, Z para cada punto, y por las fuerzas ficticias, ó fuerzas de inercia, como también se dice, ó vectores, como dicen algunos,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{d^2y}{dt^2},\ m-\frac{d^2z}{dt^2},$$

correspondiente al mismo punto.

Y este equilibrio está representado, analíticamente, por los trabajos virtuales.

Claro es que el signo Σ comprende una suma de términos

de la misma forma que el que aparece escrito, refiriéndose cada uno de estos grupos á cada punto del sistema, como explicábamos en la última conferencia.

Y se comprende, por lo demás, que puede haber problemas de Mecánica, en que por ser infinito el número de puntos del sistema, la Σ se convierte en integral.

Recordados todos estos preliminares, entremos en materia.

***

Ya dijimos, que si no existía ningún enlace, todas las variaciones virtuales $\partial x, \partial y, \partial z$ serían independientes y arbi-

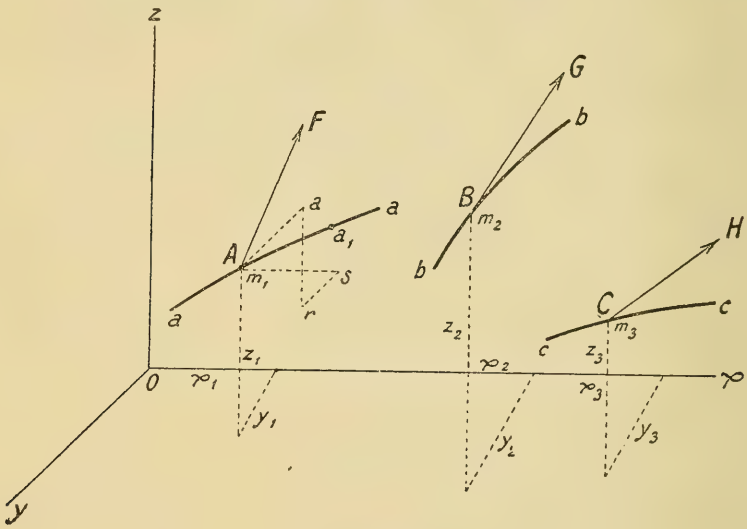


Figura 1.ª

trarias, y que para que la ecuación anterior quede satisfecha, será *necesario y suficiente,* que los coeficientes de estas variaciones virtuales sean iguales á cero.

Pero fijemos bien las ideas para alejar toda duda del ánimo de mis alumnos.

Sea un sistema de puntos $A, B, C,...$ (fig. 1.ª) con las masas $m_1, m_2, m_3...$

Estos puntos, ó mejor dicho, estas masas $m_1, m_2, m_3, \ldots$ están sujetas á fuerzas F, G, H,... que serán fuerzas exteriores al sistema, ó fuerzas interiores del mismo, ó mejor dicho, resultantes de todas ellas.

Si además se dan las condiciones iniciales de dicho sistema, es decir, las posiciones de los puntos A, B, C... y las velocidades en el instante inicial, el problema de Mecánica de que se trata estará perfectamente definido por las siguientes ecuaciones, que son las generales de la Mecánica para los puntos libres:

$$\left.\begin{array}{l} -m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+X_1=o,\ -m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}+Y_1=o,\ -m_1\dfrac{d^2z_2}{dt^2}+Z_1=o \\ -m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+X_2=o,\ -m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}+Y_2=o,\ -m_2\dfrac{d^2y_3}{dt^2}+Z_2=o \\ -m_3\dfrac{d^2x_3}{dt^2}+X_3=o,\ -m_3\dfrac{d^2z_1}{dt^2}+Y_3=o,\ -m_3\dfrac{d^2z_3}{dt^2}+Z_3=o. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}(2)$$

Integrando estas ecuaciones, y teniendo en cuenta las condiciones de los límites, mejor dicho, del instante inicial, obtendremos todas las x, y, z, en función del tiempo y de los datos del problema; y el problema quedará completamente resuelto.

En la Dinámica se obtienen estas ecuaciones directamente, porque todos los puntos son libres; pero también se deducen, sin dificultad de ningún género, de la ecuación (1), según explicábamos en la conferencia anterior.

En efecto, si los puntos son libres, para todos ellos las $\delta x, \delta y, \delta z$, serán completamente arbitrarias.

Pero expliquemos esto aún más minuciosamente.

El movimiento de todos y de cada uno de los puntos del sistema está perfectamente determinado.

Por ejemplo, el punto A, describe la trayectoria $a\,a$; el

punto B, la trayectoria $b\,b$; el C, la $c\,c$; ..... y no puede moverse ninguno de ellos más que en la trayectoria de su movimiento. Las variaciones de sus coordenadas, están también determinadas en cada instante, en función de t, así dx, dy, dz no son arbitrarias, en manera alguna; son *únicas, determinadas y reales.*

Pero no hay que confundir estas variaciones de las coordenadas dx, dy, dz, que el movimiento determina, con las δx, δy y δz, que son *virtuales*, que constituyen, por decirlo de este modo, un artificio del método para expresar el equilibrio.

Para concebir δx, δy, δz, hay que *prescindir del movimiento* del sistema, hay que atender tan sólo á los enlaces ó, si no existen, á que no existen enlaces, y este es nuestro caso.

Así en la figura 1.ª, el punto A no puede moverse más que en su trayectoria $a\,a$; pero si se prescinde del movimiento, es decir, si el movímiento no existe, el punto A, como no está sujeto á ningún enlace, podrá moverse alrededor de sí mismo libremente; por ejemplo, podrá pasar de A á a', en cuyo caso las componentes de la velocidad virtual $A\,a'$, serían

$$As = \delta x_1, \quad rs = \delta y_1, \quad a'r = \delta z_1$$

componentes que nada tienen que ver con las del punto a_1 de la trayectoria, á saber dx, dy, dz.

Estas están determinadas. Las primeras son arbitrarias; tan arbitrarias que hasta pueden ser iguales á las segundas (aunque no siempre), cuando así nos convenga para alguna demostración.

En esta hipótesis, es decir, suponiendo libres todos los puntos, es claro que todos los coeficientes deben ser iguales á cero.

Ya hemos demostrado esto en la conferencia anterior; repitamos aquella demostración precisándola más.

Supongamos, para fijar las ideas, una ecuación de esta forma

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + \ldots\ldots A_n \alpha_n = o \qquad (\alpha)$$

en la que las cantidades α son completamente arbitrarias, y aun, para nuestro caso, podemos suponer que son muy pequeñas. Representarán, por ejemplo, las velocidades virtuales. Y vamos á demostrar que si la ecuación (α) ha de verificarse para todos los valores de las α, los coeficientes A han de ser iguales á cero.

En efecto, dejemos invariables $\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$, y démosle á α_1 otro valor distinto, α'_1; por la condición del problema deberá verificarse la ecuación

$$A_1 \alpha'_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + \ldots\ldots + A_n \alpha_n = o$$

y restando una ecuación de otra, tendremos

$$A_1 (\alpha_1 - \alpha'_1) = o.$$

Pero el segundo factor no puede ser cero, porque hemos supuesto que α_1 y α'_1 son distintas; luego, para que esta última ecuación se verifique, será preciso que tengamos

$$A_1 = o.$$

Lo mismo demostraríamos, que deben ser cero todos los demás coeficientes, y por eso hemos dicho, y repetimos ahora, que cuando los puntos son todos ellos libres, de la ecuación (1) se deducen las ecuaciones (2).

Por el contrario, si las α no fueran independientes, no podríamos aplicar el razonamiento anterior, porque no hubiéramos podido dejar invariables las últimas, cambiando el valor de la primera.

Por esta razón se deduce que, en el caso general, es preciso, en la ecuación (1), eliminar las variaciones dependien-

tes, sustituyendo sus valores en función de las variables independientes.

Y con esto podemos abordar desde luego la demostración de las ecuaciones generales de Lagrange para el caso en que existan enlaces.

***

La ecuación de que partimos es la ecuación (1) que volvemos á escribir

$$\Sigma\left[\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\right.$$
$$\left.+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z\right]=o. \qquad (1)$$

Si existen enlaces, las cantidades

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots\ldots \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$$

no serán arbitrarias: unas dependerán de otras.

O dicho de otro modo: todas dependerán de un número determinado de variables independientes, que podrán ser distintas de las coordenadas de los puntos y que serán inferiores en número á $3n$, que es el número total de coordenadas.

Designemos las nuevas variables independientes por

$$q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_{n'}$$

siendo

$$n' < 3n$$

porque si no, si estos dos últimos números fueran iguales, todas las coordenadas tendrían valores determinados y los puntos serían puntos fijos.

Presentemos un ejemplo elemental para fijar bien las ideas.

Supongamos que el sistema comprende tres puntos A_1, A_2, A_3, cuyas masas son m_1, m_2, m_3 (fig. 2), y admitamos que los enlaces son los siguientes:

El punto A_1 se ha de mover forzosamente sobre una curva $O_1 B_1$.

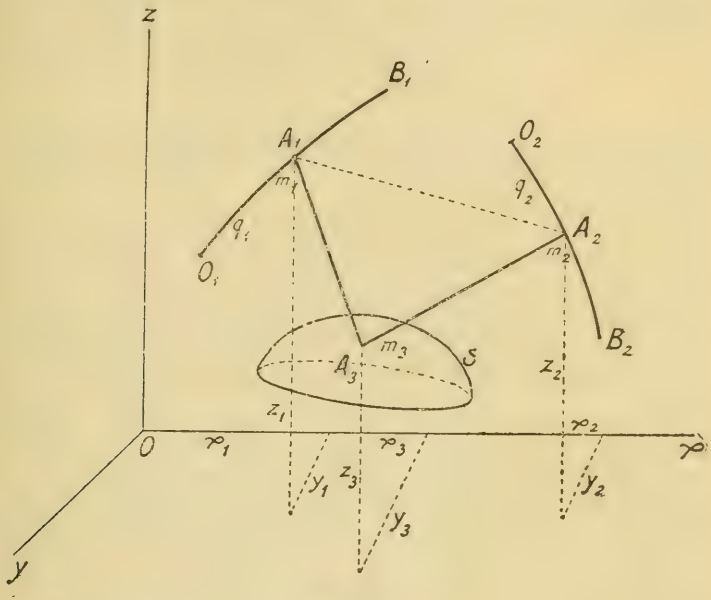


Figura 2.ª

El punto A_2 se ha de mover asimismo sobre otra curva $O_2 B_2$.

Y el punto A_3 ha de moverse sobre la superficie S.

Además, los puntos A_1, A_3 están enlazados por una barra ideal é invariable, cuya longitud representaremos por R_1.

Y del mismo modo los puntos A_2, A_3 estarán unidos por otra barra R_2, también invariable de forma.

Si los puntos A_1, A_2, A_3 estuvieran libres, las coordenadas, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 (aparte el movimiento) serían completamente arbitrarias, y arbitrarias é in-

dependientes serían sus variaciones, ó llamémoslas velocidades virtuales.

Pero no es así. Aquí, en rigor, no son nueve las variaciones independientes, sino únicamente dos.

Tomemos sobre la curva $O_1 B_1$ un punto fijo O_1 para origen de los arcos y representemos el arco $O_1 A_1$ por q_1; y tomando sobre la segunda curva $O_2 B_2$, el punto O_2 como origen y representando por q_2 el arco $O_2 A_2$, de modo que

$$O_1 A_1 = q_1, \quad O_2 A_2 = q_2$$

los puntos A_1, A_2 quedarán determinados por las dos variables independientes q_1, q_2.

Pero determinadas las posiciones A_1, A_2, si hacemos girar á la figura A_1, A_3, A_2 alrededor del eje ideal $A_1 A_2$, el punto A_3 describirá una circunferencia, y el punto en que ésta corte á la superficie S será la posición del punto A_3; de modo que las coordenadas de este punto dependerán de q_1 y q_2.

Suponemos por descontado, que las condiciones de este enlace se fijan de tal modo, que no hay ambigüedad.

Resulta de todo esto, que las nueve coordenadas x, y, z son funciones de q_1 y q_2.

Y podemos especificar esto para más claridad en las siguientes ecuaciones.

$$x_1 = \alpha_1 (q_1), \quad y_1 = \beta_1 (q_1), \quad z_1 = \gamma_1 (q_1)$$
$$x_2 = \alpha_2 (q_2), \quad y_2 = \beta_2 (q_2), \quad z_2 = \gamma_2 (q_2)$$
$$x_3 = \alpha_3 (q_1, q_2), \; y_3 = \beta_3 (q_1, q_2), \; z_3 = \gamma_3 (q_1, q_2).$$

Deberemos, pues, según antes explicábamos, eliminar de la ecuación (1) las δx, δy, δz en función de las variaciones de las q, con lo cual podremos ya igualar todos los coeficientes que quedan á cero.

Esto es lo que vamos á hacer en general, con lo cual llegaremos á las ecuaciones llamadas de Lagrange, que demos-

tramos por otro procedimiento distinto del que vamos á exponer, en el primer curso de esta asignatura.

***

Para más claridad en la explicación modifiquemos, ante todo, las anteriores notaciones.

La ecuación general de la Mecánica, que es la ecuación (1), la escribiremos de este modo:

$$\Sigma_1^N \left[\left(-m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + X_n \right) \delta x_n + \left(-m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + Y_n \right) \delta y_n + \right.$$

$$\left. + \left(-m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} + Z_n \right) \delta z_n \right] = o. \qquad (1')$$

Hemos supuesto que el número de puntos del sistema es N.

Hemos representado un punto cualquiera y las magnitudes que á él se refieren por el subíndice general y variable n.

De modo que como el número de puntos es N, el subíndice n variará desde 1 hasta N, según la serie 1, 2, 3 ... N.

Σ contendrá, por lo tanto, N grupos análogos al grupo general que se especifica en la fórmula.

Por eso á dicho signo Σ le ponemos, como en las integrales definidas, un limite inferior 1, y un límite superior N.

Un punto cualquiera del sistema estará designado, como hemos dicho, por el valor correspondiente de n: su masa será m_n; sus coordenadas serán x_n, y_n, z_n; la fuerza que sobre él actúa tendrá por componente X_n, Y_n, Z_n; y, por último, las variaciones virtuales de sus coordenadas serán δx_n, δy_n, δz_n.

El número de las coordenadas, siendo N el número de puntos, será evidentemente $3N$, y este será también el número de las velocidades virtuales.

Pero en el caso general, que vamos á considerar, los puntos no son libres, están sujetos á enlaces, y suponemos,

análogamente al ejemplo que antes presentamos, que el sistema depende de k variables independientes que designaremos por

$$q_1, q_2, q_3 \cdots\cdots q_k$$

siendo k, como antes explicábamos, inferior á $3N$.

En el sistema, prescindiendo del movimiento y atendiendo á los enlaces, estas k variables determinan la posición de todos los puntos; es decir, las $3N$ coordenadas dependen de las k variables independientes q.

Suponemos, además explícitamente que los enlaces están expresados por ecuaciones; es decir, que las $3N$ variables x, y, z, están expresadas en función de las q por ecuaciones perfectamente determinadas.

Podremos, pues, escribir

$$\begin{aligned} x_n &= \alpha_n(q_1, q_2 \cdots\cdots q_k, t) \\ y_n &= \beta_n(q_1, q_2 \cdots\cdots q_k, t) \qquad (E) \\ z &= \gamma_n(q_1, q_2 \cdots\cdots q_k, t). \end{aligned}$$

y claro es que n tendrá todos los valores desde 1 á $N \cdot O$ de otro modo; todas las coordenadas de todos los puntos estarán expresadas sin ambigüedad en función de $q_1, q_2 \ldots q_k$, por funciones perfectamente determinadas α, β, γ.

Las ecuaciones (E) expresan, por lo tanto, los *enlaces,* y en rigor no son tres ecuaciones, sino que este grupo se repite N veces, de modo que son $3N$ ecuaciones; tantas como coordenadas.

Claro es que si los enlaces son de otra naturaleza, y se expresan analíticamente de otro modo, estos nuevos casos deberán estudiarse en particular, y *à priori* no puede decirse si están ó no comprendidos en el caso único que nos proponemos estudiar.

Por último, expresamos el tiempo t en los segundos miembros para comprender el caso más general, que será aquél

en que los enlaces dependan del tiempo y sean variables de un instante á otro, aunque estas variaciones se verifiquen por la ley de continuidad, pues suponemos que las funciones α, β, γ, son continuas con relación al tiempo.

Y todas estas salvedades que aquí parecen ociosas, tendrán su importancia cuando tratemos de aplicar las ecuaciones de Lagrange á los fenómenos de electricidad y magnetismo.

Si el sistema (E) de $3N$ ecuaciones, enlaza las coordenadas de los diferentes puntos del sistema con las nuevas variables independientes q, claro es que diferenciando dicho sistema (E), es decir, dando al sistema (E), variaciones virtuales, compatibles con sus condiciones, obtendremos relaciones en número $3N$ entre las velocidades virtuales de las coordenadas y las velocidades virtuales ó variaciones de las variables independientes q.

Tendremos, pues, diferenciando el sistema (E)

$$\left.\begin{aligned}
\delta x_n &= \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_n}\delta q_n \\
\delta y_n &= \frac{\partial \beta_n}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_n}\delta q_n \\
\delta z_n &= \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_n}\delta q_n .
\end{aligned}\right\}(E')$$

Este sistema (E') enlaza las variaciones de x, y, z, q, como el sistema (E) enlazaba las magnitudes mismas.

Pero dicho sistema (E') es el que nos importa, porque hemos demostrado, que es preciso eliminar de la ecuación $(1')$ todas las variaciones ó velocidades virtuales, en función de las independientes; luego, de la ecuación $(1')$, tenemos que eliminar todas las δx, δy, δz, en función de las δq, y precisamente las ecuaciones (E'), nos expresan las primeras en función lineal de las segundas.

En suma, no hay más que sustituir en las ecuaciones $(1')$

en vez de δx, δy, δz, sus valores tomados de las ecuaciones (E'); ó, en forma más sencilla, sustituir en el término general de la ecuación (1′), los valores generales δx_n, δy_n, δz_n, que nos dan las ecuaciones (E').

Hecha la sustitución en el término general, el signo Σ con sus límites, extiende dicha sustitución á todos los términos que comprende.

Pero antes de hacer la sustitución expresada, veamos lo que representan los coeficientes de los diferentes términos de las ecuaciones (E') que expresan los enlaces.

Tomemos uno de estos coeficientes $\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1}$; lo que de él digamos, pudiéramos repetir para los demás.

Las observaciones que vamos á indicar, claro es que sólo las hacemos para los principiantes; observaciones que por elementales que sean pueden evitar dudas y confusiones.

No hay que confundir, ni en este caso, ni en ningún otro, los coeficientes diferenciales, que son verdaderas *incógnitas,* con los coeficientes diferenciales, que expresan una operación analítica sobre funciones conocidas; operación que puede efectuarse y que, una vez efectuada, da una función de una forma analítica determinada y concreta.

Más claro todavía. Si en las ecuaciones diferenciales de un movimiento encontramos el coeficiente diferencial $\frac{dx}{dt}$ de una de las coordenadas x con relación al tiempo, antes de efectuar la integración este coeficiente diferencial será *una incógnita*: x es una función del tiempo, y si se conociese, se podría efectuar la diferenciación; pero hasta que se logre integrarla, el coeficiente será una expresión desconocida. Es lo mismo que si en un cálculo algebráico siendo x la incógnita hubiera un término, por ejemplo de esta forma, $\sqrt{x^3}$; sería un término desconocido también, mientras no conociéramos el valor de x.

No expresa otra cosa, sino operaciones determinadas, que

han de efectuarse sobre x, cuando se conozca: habrá que elevarla al cubo una vez conocida, y luego extraer la raíz cuadrada de lo que resulte. Las operaciones son determinadas y conocidas; la cantidad sobre la cual hay que efectuarlas, es desconocida aún.

Pues lo mismo podemos decir del coeficiente diferencial $\frac{dx}{dt}$.

También indica una operación perfectamente determinada, á saber: tomar la derivada de x, que es función de t.

Operación tan determinada y definida es una diferenciación, ó una derivación, como una potencia ó una raíz.

Ahora bien, mientras no se conozca x en función de t, el resultado de la operación no se podrá conocer tampoco, y por eso todo el coeficiente diferencial será una incógnita.

No sucede esto con el coeficiente diferencial citado $\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1}$, porque la función α_n es una función de forma perfectamente conocida, es uno de los datos del problema; en suma es, como hemos dicho,

$$\alpha_n(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k).$$

De modo que es función de $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ y en particular de q_1.

Luego este coeficiente diferencial se podrá obtener, diferenciando con relación á q_1 la expresión precedente, en la que se considerarán como constantes para esta diferenciación $q_2 \ldots\ldots q_n$.

En suma, el coeficiente diferencial que estamos considerando es el símbolo de una operación definida, operación que ha de efectuarse sobre una función determinada, de suerte que deberemos considerar á este coeficiente como una función de forma perfectamente conocida y determinada.

Podremos decir

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} = f(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, t).$$

Y otro tanto ha de repetirse para todos los demás coeficientes.

Si se representan por el signo general A, los de la primera línea de (E'), representando siempre A una función de forma determinada de las q, podríamos escribir

$$\delta x_n = A_1(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k)\,\delta q_1 + A_2(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k)\,\delta q_2 + \\ + \ldots\ldots + A_k(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k)\,\delta q_k.$$

Y lo mismo para las otras dos ecuaciones que dan δy_n, δz_n; pero les dejaremos á estos coeficientes su forma primitiva, que indica su origen y da la manera de obtenerlos en cualquier ejemplo que se presente.

***

Pasemos ya á eliminar de la ecuación (1′)

$$\Sigma_1^N \left[\left(-m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + X_n\right)\delta x_n + \left(-m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + Y_n\right)\delta y_n + \\ + \left(-m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} + Z_n\right)\delta z_n\right] = o$$

por medio de las (E') todas las variaciones $\delta x, \delta y, \delta z$ en función de las variaciones de las variables independientes q; es decir,

$$\delta x_n = \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta y_n = \frac{\partial \beta_n}{\partial q_2}\delta q_1 + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_k}{}_2 q_k$$

$$\delta z_n = \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_1}\delta q_4 + \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_k}\delta q_k.$$

Hecha esta sustitución en todos los términos de la Σ obtendremos evidentemente el siguiente resultado:

$$\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}+X_n\right)$$

$$\left(\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\alpha_a}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots\ldots+\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_k}\delta q_k\right)$$

$$+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}+Y_n\right)$$

$$\left(\frac{\partial\beta_n}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\beta_n}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots\ldots+\frac{\partial\beta}{\partial q_k}\delta q_k\right)$$

$$+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}+Z_n\right)$$

$$\left(\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots\ldots+\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_k}\delta q_k\right)=o.$$

Hemos separado el signo Σ para los tres grupos; pero es claro que en cada uno de éstos el subínde n varía desde 1 hasta N.

Esta expresión que resulta es lineal respecto á las variaciones δq, como debía ser puesto que era lineal respecto á δx, δy, δz y éstas á su vez eran lineales respecto á δq_1, $\delta q_2 \ldots\ldots \delta q_k$.

Ordenando, pues, con relación á dichas variaciones la expresión precedente, y sacándolas fuera del signo Σ, que en el fondo es sumar por columnas, tendremos el resultado

$$\delta q_1\left[\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{\partial^2x_n}{\partial t^2}+X_n\right)\frac{d\alpha_n}{dq_1}+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}+Y_n\right)\frac{\partial\beta_n}{\partial q_1}+\right.$$

$$\left.+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}+Z_n\right)\frac{\partial\gamma_n}{\partial y_1}\right]$$

. . . . . .

$$+\delta q_i\left[\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{\partial^2x_n}{\partial t^2}+X_n\right)\frac{d\alpha_n}{dq_i}+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2y_n}{dt_2}+Y_n\right)\frac{\partial\beta_n}{\partial q_i}+\right.$$

$$\left.+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}+Z\right)\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_i}\right]$$

. . . . . .

$$+\delta q_k\left[\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}+X_n\right)\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_k}+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}+Y_n\right)\frac{\partial\beta_n}{\partial q_k}+\right.$$
$$\left.+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}+Z_n\right)\frac{\partial\gamma_n}{\partial p_k}\right]=0.$$

Puesto que las q varían desde q_1 hasta q_k, hemos puesto el término correspondiente á la primera q_1, el correspondiente á la última q_k, y el término general correspondiente á q_i en que es claro que la i varia desde 1 hasta k.

Como en la expresión anterior ordenada por relación á las variaciones de q, á saber

$$\delta q_1 \ldots\ldots \delta q_i \ldots\ldots \delta q_k$$

estas variaciones son independientes; según antes explicamos, para que dicha ecuación quede satisfecha, será necesario y suficiente que todos los coeficientes sean iguales á cero, de modo que tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}+X_n\right)\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_1}+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}+Y_n\right)\frac{\partial\beta_n}{\partial q_1}+\\
\qquad+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}+Z_n\right)\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_1}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}+X_n\right)\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_i}+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2y_a}{dt^2}+Y_n\right)\frac{\partial\beta_n}{\partial q_i}+\\
\qquad+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}+Z_n\right)\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_i}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}+X_n\right)\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_k}+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}+Y_n\right)\frac{\partial\beta_n}{\partial q_k}+\\
\qquad+\Sigma_1^N\left(-m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}+Z_n\right)\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_k}=0.
\end{array}\right\}\quad(3)$$

Este grupo (3) contiene evidentemente k ecuaciones, y con estas ecuaciones el problema de mecánica, en rigor queda resuelto desde este momento, porque agregando al grupo (3) el grupo (E) de las ecuaciones de los enlaces, que era:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 (q_1 \ldots\ldots q_k, t) \ldots\ldots x_n = \alpha_n (q_1 \ldots\ldots q_k, t) \ldots\ldots x_N = \alpha_N (q_1 \ldots\ldots q_k, t) \\ y_1 = \beta_1 (q_1 \ldots\ldots y_k, t) \ldots\ldots y_n = \beta_n (y_1 \ldots\ldots q_k, t) \ldots\ldots y_E = \beta_N (q_1 \ldots\ldots q_k, t) \\ z_1 = \gamma_1 (q_1 \ldots\ldots q_k, t) \ldots\ldots z_n = \gamma_n (q_1 \ldots\ldots q_k, t) \ldots\ldots z_N = \gamma_N (q_1 \ldots\ldots q_k, t) \end{array}\right\} (E)$$

y que comprende $3N$ ecuaciones, tendremos entre las (3) y las (E) un número de ecuaciones igual á $k + 3N$, número exactamente igual al de incógnitas, que son las x, y, z, en número $3N$ y las q, en número k: suponiendo todas las q distintas de las x, y, z.

Verdad es que estas incógnitas entran de diversas maneras: ya aisladamente, quiero decir, como magnitudes finitas, pero desconocidas, ya bajo coeficientes diferenciales.

Pero esto importa poco; lo que importa es que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. Y, por otra parte, en las expresadas ecuaciones todas las demás cantidades son datos del problema: las masas m, las fuerzas X, Y, Z, y las demás constantes, como por ejemplo las que contengan las funciones α, β, γ de los enlaces.

El problema está, pues, perfectamente definido, y ya es un problema de análisis matemático: el de despejar x, y, z, q en función del tiempo t.

El problema de Mecánica ó de Física Matemática ha concluído con lo dicho, puesto que tenemos tantas ecuaciones como incógnitas para despejarlas en función del tiempo.

Mas si la lógica está satisfecha, no lo está, si se me permite la palabra, la estética matemática; porque la solución que hemos bosquejado es complicada, difícil, y en su última parte carece en absoluto de elegancia.

La solución es la indicada; pero es preciso transformarla.

para darle las cualidades que hemos echado de menos, y esta transformación es la que nos conduce á las célebres ecuaciones de Lagrange, que no sólo se aplican á los problemas de la materia ponderable, sino que uno y otro matemático insigne se empeñan, como veremos, en aplicarla á la teoría de la electricidad.

*
* *

Las ecuaciones (3) y las (E) pueden escribirse bajo una forma más breve y que deben conocer ya mis alumnos porque es muy usada en obras modernas.

Por ejemplo, en vez de escribir como en las ecuaciones (3) la primera, la última y la ecuación para el índice general i, se escribe una tan sólo: la que corresponde al índice general i, y enfrente la serie de valores que ha de recibir i. Por ejemplo, la siguiente, en que sólo ponemos una Σ que abarca todos los términos

$$\Sigma_1^N \left[\left(- m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + X_n \right) \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} + \left(- m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + Y_n \right) \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} + \right.$$
$$\left. + \left(- m_n \frac{d^2 z_n}{dq_i} + Z_n \right) \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right] = 0 \ldots\ldots (i = 1, 2, 3 \ldots\ldots k) \quad (3')$$

Escribir esta ecuación con el paréntesis inmediato de los valores de i es lo mismo que escribir las k ecuaciones (3).

Análogamente en vez de escribir las $3N$ ecuaciones (E) con una columna para el índice 1, otra para el índice final N y otra para el índice general n, se puede escribir esta última tan sólo y enfrente, en un paréntesis, n con los valores que ha de recibir desde 1 á N, en esta forma

$$\left. \begin{array}{l} x_n = \alpha_n (q_1 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q_k\, t) \\ v_n = \beta_n (q_1 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q_k\, t) \\ z_n = \gamma_n (q_1 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q_k\, t) \end{array} \right\} \ldots\ldots (n = 1, 2, 3 \ldots\ldots N). \quad (E')$$

En adelante sólo á estos grupos (3′) y *(E′)* nos referiremos por ser los que tienen la forma más sencilla.

Pero el (3′) lo vamos á escribir formando dos grupos con términos análogos, y que han de sufrir transformaciones también análogas.

Tendremos, pues, cambiando previamente los signos á toda la ecuación para acomodarnos al uso corriente

$$\Sigma_1^N \left(m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} + m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} + m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right)$$
$$+ \Sigma_1^N \left(- X_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} - Y_n \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} - Z_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right) =$$
$$= 0 \ldots\ldots (i = 1, 2, 3 \ldots\ldots k)$$

ó bien

$$\Sigma_1^N m_n \left(\frac{d^2 x_n}{dt^2} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} + \frac{d^2 y_n}{dt^2} \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} + \frac{d^2 z_n}{dt^2} \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right)$$
$$- \Sigma_1^N \left(X_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} + Y \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} + Z \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right) =$$
$$= 0 \ldots\ldots (i = 1, 2, 3 \ldots\ldots k) \qquad (4)$$

Esta ecuación, ó mejor dicho, este grupo de k ecuaciones y el grupo *(E′)* de $3N$ ecuaciones son, como decíamos antes, el sistema de ecuaciones que resuelven todos los problemas de Mecánica, salvo las restricciones establecidas y sobre las cuales aun insistiremos algo en adelante.

Pero se presenta, desde luego, una idea que pudiéramos llamar *idea directriz* para nuevas transformaciones.

Realmente, lo que nos interesa, es tener k ecuaciones diferenciales entre las q variables independientes, que fijan la posición de los puntos del sistema; porque obteniendo los valores de todas las q en función del tiempo el problema está resuelto, puesto que las ecuaciones *(E′)* de los enlaces nos dan las x, y, z, en función de las q, y por lo tanto, de t.

Mas en las ecuaciones (4) no entran las q en los coeficientes diferenciales, sino las x, y, z; luego la transformación que inmediatamente se indica es la de eliminar los eoeficientes diferenciales de x, y, z con relación al tiempo

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

en función de coeficientes diferenciales de las q.

Y esta es, precisamente, la transformación fundamental de esta teoría, y que en el fondo es sencillísima.

Transformemos, pues, el primer grupo de la ecuación (4), ó mejor dicho, el término general de este grupo, porque de igual modo podremos transformar todos los que comprende Σ.

Consideremos, pues, dicho término

$$m_n\left(\frac{d^2x_n}{dt^2}\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_i} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial\beta_n}{\partial q_i} + \frac{d^2z_n}{dt^2}\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_i}\right).$$

Para evitar dobles diferenciaciones con relación á t, y hacer que una de ellas comprenda los dos factores de cada término, podremos escribir la expresión precedente de este modo:

$$m_n\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_n}{dt}\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_i}\right) - \frac{dx_n}{dt}\frac{d\frac{\partial\alpha_n}{\partial y_i}}{dt} + \right.$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\frac{dy_n}{dt}\frac{\partial\beta_n}{\partial q_i}\right) - \frac{dy_n}{dt}\frac{d\frac{\partial\beta_n}{\partial q_i}}{dt} +$$

$$\left. +\frac{d}{dt}\left(\frac{dz_n}{dt}\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_i}\right) - \frac{dz_n}{dt}\frac{d\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_i}}{dt}\right]$$

Transformación evidente porque los términos, con el signo — se destruyen con los segundos términos que resultan de diferenciar el término precedente.

Agrupando los términos análogos, y que han de sujetarse luego á la misma transformación, podremos escribir los dos siguientes grupos

$$\left[m_n \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_n}{dt}\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} + \frac{dy_n}{dt}\frac{\partial \beta_n}{\partial y_i} + \frac{dz_n}{dt}\frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{dx_n}{dt}\frac{d\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}}{dt} + \frac{dy_n}{dt}\frac{d\frac{\partial \beta_n}{\partial q_i}}{dt} + \frac{dz_n}{dt}\frac{d\frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i}}{dt} \right) \right] \quad (5)$$

Tomemos ahora en el primer grupo el siguiente término, que vamos á transformar,

$$\frac{dx_n}{dt}\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i};$$

y para simplificarlo aun más, representemos las componentes de la velocidad, como generalmente se hace, por x', y', z'. Es decir, que x', y', z' son las derivadas de x, y, z con relación á t; y como para este término hacemos $\frac{dx_n}{dt} = x'_n$ dicho término se convertirá en

$$x'_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}$$

cuyo segundo factor se obtiene fácilmente bajo otra forma.

En efecto, las ecuaciones de los enlaces (E) dan

$$x_n = \alpha_n(q_1 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q_k, t).$$

Y tomando la derivada, con relación al tiempo de x_n, es decir, determinando la componente paralela al eje de las x, de la velocidad del punto (n) que consideramos, tendremos

$$\frac{dx_n}{dt} = x'_n = \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} +$$

$$\ldots\ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}.$$

Siguiendo la misma notación, podremos expresar las derivadas de q con relación al tiempo, del cual son naturalmente funciones, aunque desconocidas, por q', y tendremos

$$x'_n = \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} q'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} q'_i + \ldots\ldots + \\ + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}.$$

Estas q' claro es que no son componentes de velocidades como lo son x', y', z'; pero son derivadas con relación al tiempo y expresan á su modo la *velocidad de variación* de estas cantidades q, y hasta en cada ejemplo pueden tener su representación geométrica.

El segundo miembro de la ecuación anterior tiene una composición analítica perfectamente determinada desde el momento en que está determinada α_n; así podremos decir que x'_n tiene una *forma determinada* en que entran las q y las q' con sus diversos subíndices desde 1 á k; las q en los coeficientes, las q' en forma lineal.

Pero si en el segundo miembro de dicha ecuación considerásemos á las q y á las q' como independientes, es claro que tendríamos en general

$$\frac{\partial x'_n}{\partial q'_i} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}$$

porque $\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}$ es el coeficiente que multiplica á q'_i.

Más claro, porque conviene fijar bien las ideas.

Expresando x de una manera determinada en función de las q, la x' resultará expresada también en forma determinada en función de las q y q'; y se expresará la derivada parcial de x'_n con relación á q'_i por una forma determinada, que será $\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}$.

De aquí resulta, que el término que venimos transformando se convertirá en

$$x'_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} = x'_n \frac{\partial x'_n}{\partial q'_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial x'^2}{\partial q'_i}.$$

Una transformación análoga podremos hacer del segundo y del tercer término, y tendremos en la ecuación (5)

$$\frac{dy_n}{dt} \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} = y'_n \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} = y'_n \frac{\partial y'_n}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial y'^2_n}{\partial q'_i}$$

$$\frac{dz_n}{dt} \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} = z'_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} = z'_a \frac{\partial z'_n}{\partial q'_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial z'^2_n}{\partial q'_i}.$$

Sustituyendo estos valores en el primer grupo de la expresión (5) se convertirá en

$$m_n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'^2_n}{\partial q'_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial y'^2_n}{\partial q'_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial z'^2_n}{\partial q'_i} \right) - \right.$$

$$\left. \left(\frac{dx_n}{dt} \frac{d \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}}{dt} + \frac{dy_n}{dt} \frac{d \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i}}{dt} + \frac{dz_n}{dt} \frac{d \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i}}{dt} \right) \right]$$

que reuniendo los tres términos del primer grupo en uno solo tendrá esta forma:

$$m_n \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{1}{2} \left(x'^2_n + y'^2_u + z'^2_n \right)}{\partial q'_i} -$$

$$- m_n \left(\frac{dx_n}{dt} \frac{d \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}}{dt} + \frac{dy_n}{dt} \frac{d \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i}}{dt} + \frac{dz_n}{dt} \frac{d \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i}}{dt} \right).$$

Y no hay que olvidar lo que significa la diferenciación de $x'^2_n + y'^2_n + z'^2_u$ con relación á q'_n. Ya lo hemos explicado una vez y aun lo recordaremos otras para evitar toda confusión.

Significa que en $x_n'^2 + y'^2_n + z'^2_n$, se han de expresar las x'_n, y'_n y z'_n, por medio de las ecuaciones de los enlaces en función de las q y de las q', lo cual dará una función en q y q' de forma determinada, y que en esta ecuación, considerando á las q y á las q' como cantidades independientes, hay que tomar la derivada parcial con relación á q'_i. Es regla práctica para obtener este término, puesto que esta es la significación que se le ha dado á las derivaciones x', y', z' con relación á q'.

De todas maneras, este primer grupo de la expresión anterior ya no contiene más que las q y las q', las x, y, z, y sus derivadas han desaparecido.

Por último

$$\frac{1}{2} m_n (x'^2_n + y'^2_n + z'^2_n)$$

no es otra cosa más que la mitad de la fuerza viva del punto *(n)* que estamos considerando y cuya masa hemos representado por m_n.

Si, como es costumbre, representamos por T_n esta semifuerza viva, tendremos que el primer grupo del término *(n)* de Σ, que es el término que estamos transformando, podrá escribirse de este modo:

$$\frac{d\,\dfrac{\partial T_n}{\partial q_i}}{dt} - m_a \left(\frac{dx_n}{dt}\,\frac{d\,\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}}{dt} + \frac{dy_n}{dt}\,\frac{d\,\dfrac{\partial \beta_n}{\partial q_i}}{dt}\,\frac{dz_u}{dt}\,\frac{d\,\dfrac{\partial \gamma_n}{\partial q_i}}{dt} \right) \quad (6)$$

Habiendo eliminado las x, y, z, y sus derivadas de la primera parte, podemos efectuar una transformación análoga para el segundo grupo.

Tomemos el primer término

$$\frac{dx_n}{dt}\,\frac{d\,\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}}{dt}$$

ó con la notación abreviada para las velocidades,

$$x'_n \frac{d\frac{\partial x_n}{\partial q_i}}{dt}.$$

Desarrollemos ahora el segundo factor

$$\frac{d\frac{\partial x_n}{\partial q_i}}{dt}.$$

Puesto que

$$x_n = x_n(q_1, q_2 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q_k, t)$$

es claro que $\frac{\partial x_n}{\partial q_i}$ será función de las mismas cantidades q y t. De modo que para diferenciarla con relación al tiempo, tendremos que considerarla como una función compuesta de $q_1\, q_2 \ldots\, q_i \ldots\, q_k$, t, y resulta

$$\frac{d\frac{\partial x_n}{\partial q_i}}{dt} = \frac{\partial\frac{\partial x_n}{\partial q_i}}{\partial q_1} q'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial\frac{\partial x_n}{\partial q_i}}{\partial q_i} q'_i + \ldots\ldots + \frac{\partial\frac{\partial x_n}{\partial q_i}}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial\frac{\partial x_n}{\partial q_i}}{\partial t}$$

en que hemos cuidado de distinguir, como siempre, empleando la d y la ∂, las diferencias totales de las que se refieren á una de las variables, suponiendo todas las demás constantes.

Así, por ejemplo, fíjense mis alumnos en que si al parecer el primer miembro es igual al último término del segundo, no lo es porque en este último todas las diferenciaciones son parciales y están expresadas por ∂.

Además hemos empleado para las derivadas $\frac{dq}{dt}$ la notación q'.

También podemos expresar la ecuación anterior bajo esta forma definitiva:

$$\frac{d\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}}{dt} = \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial q_1 \, \partial q_i} q'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial q_i \, \partial q_i} q'_i + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial q_i \, \partial q_k} q'_k + \frac{\partial_2 \alpha_n}{\partial q_i \, \partial t}. \qquad (a)$$

Por otra parte, del valor de x_n se deduce diferenciando con relación al tiempo

$$\frac{d\, x_n}{dt} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} q'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} q'_i + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}$$

ó bien

$$x'_n = \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} q'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} q'_i + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k} q'_s + \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}.$$

Y puesto que el segundo miembro en sus coeficientes contiene las variables q podremos diferenciar con relación á q_i y tendremos

$$\frac{\partial x'_n}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial q_1 \, \partial q_i} q'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial q_i \, \partial q_i} q'_i + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial q_i \, \partial q_k} q'_k + \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial t \, \partial q_i}.$$

Pero el segundo miembro de esta ecuación es exactamen-

te igual al de la ecuación (a), luego los primeros miembros serán iguales, y tendremos

$$\frac{d\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}}{dt} = \frac{\partial x'_n}{\partial q_i}.$$

Empleando la misma transformación para los dos últimos términos de la expresión (6), podremos escribir

$$\frac{d\frac{\partial \beta_n}{\partial q_i}}{dt} = \frac{\partial y'_n}{\partial q_i}$$

$$\frac{d\frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i}}{dt} = \frac{\partial z'_n}{\partial q'_i}.$$

Con lo cual el segundo grupo de dicha expresión (6) se convierte en

$$- m_n \left(\frac{dx_n}{dt} \frac{d\frac{d\alpha_n}{dq_i}}{dt} + \frac{dy_n}{dt} \frac{d\frac{d\beta_n}{dq_i}}{dt} + \frac{dz_n}{dt} \frac{d\frac{d\gamma_n}{dq_i}}{dt} = \right.$$

$$= - m_n \left(x'_n \frac{\partial x'_n}{\partial q_i} + y'_n \frac{\partial y'_n}{\partial y_i} + z'_n \frac{\partial z'_n}{\partial q_i} \right)$$

que equivale á

$$- m_n \frac{\partial \frac{1}{2} \left(x'^2_n + y'^2_n + z'^2_n \right)}{\partial q_i};$$

y como el paréntesis expresa, según antes vimos, el cuadrado de la velocidad del punto que se considera y la semi-

fuerza viva la hemos representado por T_n, podremos escribir la expresión anterior de este modo

$$-\frac{\partial T_n}{\partial q_i}$$

y, por lo tanto, la expresión (6) se convertirá en

$$\frac{d\frac{\partial T_n}{\partial q_i}}{dt} - \frac{\partial T_n}{\partial q_i}.$$

Pero esta expresión era un término, el término (n) de la Σ, y suponiendo que se efectúan iguales transformaciones sobre todos los demás términos, tendremos por último que el sistema de ecuaciones (4) podrá escribirse de este modo:

$$-\Sigma_1^N \frac{d\frac{\partial T_n}{\partial q_i}}{dt} - \Sigma_1^N \frac{\partial T_n}{\partial q_i} - \Sigma_1^N \left(X_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} + Y_n \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} + Z_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right)$$
$$= 0 \ldots\ldots (i = 1, 2 \ldots\ldots k).$$

Finalmente, para cada ecuación de este grupo podemos pasar evidentemente la Σ hasta unirla con T_u, puesto que sumas y diferenciaciones pueden invertirse, y como $\Sigma_1^N T_n$ no es otra cosa que la semifuerza viva total del sistema, representándola por T y por Q_i el último grupo, á saber

$$Q_i = \Sigma_1^N \left(X_n \frac{d\alpha_n}{dq_i} + Y_n \frac{d\beta_n}{dq_i} + Z_n \frac{d\gamma_n}{dq_i} \right)$$

tendremos en definitiva

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \ldots\ldots i = (1, 2 \ldots\ldots k)$$

que es el sistema de ecuaciones de Lagrange; sistema que comprende k ecuaciones análogas á la anterior, tantas, por consiguiente, como variaciones independientes q.

Aunque las minuciosas explicaciones en que hemos entrado no permiten duda de ningún género, como las ecuaciones de Lagrange son fundamentales en la Mecánica y en la Física Matemática, aun en la moderna, todavía en la conferencia próxima insistiremos sobre el sentido y la extensión de las ecuaciones expresadas.

XXII. — Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowski.

(Continuación.)

POR B. CABRERA.

CAPITULO III

CAMPOS VECTORIALES

22. *Campo de un vector laminar.* — Estudiaremos en este capítulo las propiedades generales de los campos vectoriales estáticos, esto es, suponiendo que las propiedades características de cada punto son independientes del tiempo. Esta teoría general es aplicable á los campos eléctrico y magnético, al campo gravitatorio, á los fenómenos que se presentan en un flúido en movimiento permanente, etc., etc.

Comencemos considerando el caso en que el vector está definido por una función escalar mediante la ecuación

$$\vec{a} = \text{grad}\, \varphi.$$

Langevin propone llamar la función φ *laminar* de $\vec{a}$

$$\varphi = \text{lam}\, \vec{a},$$

por las razones que luego veremos.

Aplicando el teorema de Stockes á este vector se obtiene

$$\int_c \vec{a}\, \vec{dl} = \int_s \text{rot grad}\, \varphi\, \vec{ds} = o,$$

puesto que el elemento diferencial de la segunda integral es

nulo, según hemos visto en el anterior capítulo. Así, pues, sea cual fuere la curva cerrada que elijamos en el campo del vector grad φ, la circulación es nula. La recíproca es cierta: si la circulación de un vector sobre una curva cerrada es nula, sea cual fuere la curva, el vector es el graduante de una función escalar. En efecto; si

$$\int_c \vec{a}\,\vec{dl} = \int_c a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = o,$$

el elemento diferencial es una diferencial exacta de una cierta función escalar $\varphi\,(x\,y\,z)$ y, por consiguiente,

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

ó

$$\vec{a} = \text{grad}\,\varphi.$$

La misma propiedad puede enunciarse de esta otra manera: la circulación del vector grad φ para una curva abierta depende exclusivamente de los extremos de la curva. Para demostrarlo, sean A y B (Fig. 12) dos puntos fijos en el campo, y las líneas 1 y 2 dos trayectorias cualesquiera seguidas al pasar de A á B. La trayectoria 1 y la 2 invertida, esto es, pasando de A á B, constituyen una curva cerrada; de suerte, en virtud del teorema de Stockes,

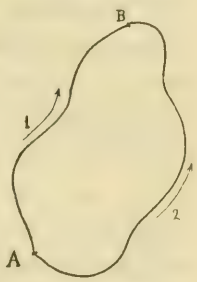


Figura 12.

$$\int_c \vec{a}\,\vec{dl} = \int_B^A \vec{a}\,\vec{dl}_1 + \int_A^B \vec{a}\,\vec{dl}_2 = o,$$

y, por ende,

$$\int_A^B \vec{a}\,\vec{dl}_1 = \int_A^B \vec{a}\,\vec{dl}_2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

23. Evidentemente, el valor de la circulación entre A y B será igual á la diferencia de los valores de φ en estos dos puntos

$$\int_A^B \vec{a}\, d\vec{l} = \varphi_B - \varphi_A;$$

de suerte que la constancia de dicha magnitud, no sólo se refiere á cualquier trayectoria entre estos dos puntos, sino entre las dos superficies

$$\varphi(xyz) = \varphi_B \text{ y } \varphi(xyz) = \varphi_A.$$

Si por los dos puntos A y B pasa una misma superficie de la familia

$$\varphi(xyz) = \text{const.},$$

esto es, si $\varphi_B = \varphi_A$, la circulación será nula sin que la curva sea cerrada.

Se comprende que dos superficies de la familia indicada no pueden cortarse; de forma que, haciendo crecer la constante del segundo miembro por saltos infinitamente pequeños, podemos dividir el campo en hojas ó láminas, y de aquí el nombre de *campo laminar* con que se designa el de este vector. Así como el dado por Langevin á la función φ. Suponiendo, además, que los incrementos de φ al pasar de una superficie á otra sean constantes, su conjunto define completamente el vector $\vec{a}$ en un punto cualquiera. En efecto; puesto que dicho vector tiene por componentes las derivadas de φ, sus cosenos directores son los mismos que los de la normal á la superficie que pasa por el punto considerado; de suerte que en cada punto del campo el vector será tangente á la trayectoria normal de las superficies φ, con lo cual queda determinado el argumento de $\vec{a}$. Por otra parte, se desprende también de la relación entre $\vec{a}$ y la normal $\vec{n}$, que

$$a\,dn = d\varphi = \text{const.},$$

que, traducida al lenguaje ordinario, nos dice que el módulo de $\vec{a}$ es inversamente proporcional á la distancia normal entre las dos superficies.

Las superficies φ se llaman *superficies de nivel,* y sus trayectorias normales *líneas de flujo.*

24. *Teorema de Green.*—Aplicando el teorema de Gauss, el vector grad φ toma la forma

$$(a) \qquad \int_V \text{div grad}\,\varphi\, dV = \int_s \text{grad}\,\varphi\, \vec{ds},$$

ó en otra forma

$$(b) \qquad \int_V \nabla \cdot \nabla \varphi\, dV = \int_s \nabla \varphi \cdot \vec{ds}.$$

Si el producto escalar que figura en el segundo miembro lo expresamos en función de las componentes de los vectores, teniendo en cuenta que las de $\vec{ds}$ son λds, μds y νds, donde λ, μ, ν son los conos directores de la normal á ds, resulta que

$$\text{grad}\,\varphi\, \vec{ds} = \nabla \varphi \cdot \vec{ds} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\nu\right) ds = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds,$$

puesto que el paréntesis es evidentemente igual á la derivada parcial de φ según la normal á la superficie S. Así el teorema de Gauss, en este caso particular, puede escribirse

$$\int_V \Delta \varphi\, dV = \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds,$$

que es la forma generalmente adoptada.

Aplicando ahora el propio teorema en su forma *(b)* al vector $\psi \nabla \varphi$, donde ψ es una función escalar de las coordenadas, obtendremos

$$\int_V \nabla \cdot \psi \nabla \varphi \, dV = \int_s \psi \nabla \varphi \, \vec{ds}.$$

Pero nosotros sabemos ya que

$$\nabla \cdot \psi \nabla \varphi = \psi \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \psi,$$

de suerte que la ecuación anterior se convierte en esta otra:

$$\int_V \psi \nabla^2 \varphi \, dV + \int_V \nabla \varphi \nabla \psi \, dV = \int_s \psi \nabla \varphi \, \vec{ds}.$$

Permutando ahora ψ con φ, esto es, considerando el campo del rector $\nabla \psi$ y aplicándole el teorema de Gauss, previa su multiplicación por φ, se deduce inmediatamente

$$\int_V \varphi \nabla^2 \psi \, dV + \int_V \nabla \psi \nabla \varphi \, dV = \int_s \varphi \nabla \psi \, \vec{ds}.$$

Restando esta expresión de la anterior

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \varphi \nabla^2 \psi) \, dV = \int_s (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \, \vec{ds},$$

ó escrito en la forma corriente

$$\int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \, ds = \int_s \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds,$$

que expresa el teorema de Green. Esta fórmula es una generalización de la de Gauss, pues basta hacer en ella una de las funciones φ ó ψ constante para obtener esta última.

25. Hasta aquí nada hemos dicho de las condiciones que han de cumplir las funciones φ y ψ en el interior de la superficie S para que el teorema de Green les sea aplicable;

condiciones que se extienden necesariamente á toda función á que hayamos de aplicar el teorema de Gauss. Tales condiciones se reconocen inmediatamente observando cuáles son las funciones derivadas de φ y de ψ que figuran en la fórmula en cuestión: además de φ y ψ existen sus primeras y segundas derivadas; luego φ y ψ han de admitir segundas derivadas finitas en todos los puntos del espacio V, y sobre la superficie S primeras derivadas finitas, por lo menos. Estas condiciones implican la continuidad de φ y ψ en todo el espacio y sobre S, y la de las primeras derivadas en V.

Cuando en el espacio á que haya de aplicarse el teorema en cuestión hubiere ciertos puntos ó regiones en que no se cumplan las condiciones indicadas para alguna de las funciones, será menester eliminarla del campo de integración, mediante una superficie que los envuelva. Así, en la fig. 13 sea S la superficie que limita el volumen (Fig. 13) á que queremos aplicar el teorema de Green, y la porción rayada una cierta región donde aquellas condiciones no se cumplen. Bastará envolver esta región por una superficie Σ y excluir el espacio limitado por ella del campo de integración. En este caso tendremos

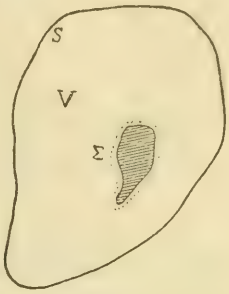


Figura 13.

$$\int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi)\, dV =$$
$$= \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) ds + \int_\Sigma \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) d\Sigma.$$

Un caso interesante es aquel en que la región de discontinuidad se reduce á una superficie σ; Σ se compondrá entonces de dos superficies paralelas, y como pueden estar tan próximas como nos plazca, podemos confundirlas con las dos caras de σ.

26. *Representación del campo laminar por masas que actúan según la ley de Newton.*—Tomemos para función φ la inversa de la distancia á un punto P del campo

$$\varphi = \frac{1}{r}.$$

Esta función es discontinua en este punto, y, por lo tanto, será indispensable excluirlo del campo de integración para que podamos aplicarle el teorema de Green. Con este fin trazaremos una esfera Σ (Fig. 14) con centro en P y radio R. Llamando V' el volumen entre Σ y S, podemos escribir

Figura 14.

$$\int_{V'} \left(\frac{1}{r} \Delta \varphi - \varphi \Delta \frac{1}{r} \right) d V =$$

$$= \int_s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) ds + \int_\Sigma \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\Sigma.$$

Puesto que la proyección del vector $\nabla \frac{1}{r}$ sobre $\vec{r^0}$ es

$$\vec{r^0} \nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2},$$

el vector $\nabla \frac{1}{r}$ tendrá el valor $-\frac{\vec{r^0}}{r^2}$, y sus componentes serán

$$-\frac{r_x}{r^3}, \quad -\frac{r_y}{r^3}, \quad -\frac{r_z}{r^3}.$$

Si, pues, hallamos la divergencia de este vector, se ve sin dificultad que

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\vec{r}_0}{r^2}\right) = \Delta\frac{1}{r} = 3\,\frac{r^2_x + r^2_y + r^2_z}{r^5} - 3\,\frac{1}{r^3} = 0,$$

de suerte que el segundo término de la integral de volumen desaparece.

Fijémonos ahora en la

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right) d\Sigma.$$

En primer lugar, es evidente que

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R} = \frac{1}{R^2},$$

y en segundo término, llamando $d\omega$ al elemento de superficie esférica de radio unidad que corresponde al $d\Sigma$, podemos escribir este último en la forma

$$d\Sigma = R^2\,d\omega,$$

de suerte que la integral en cuestión se transforma en la siguiente suma:

$$\int R\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\omega - \int\varphi\,d\omega.$$

Hasta ahora el radio R de la esfera que excluye el punto P lo hemos dejado arbitrario; si suponemos que tiende hacia cero, la primera de estas integrales se anula. La segunda, en cambio, tiende hacia un límite finito perfectamente determinado, puesto que la aplicación de un teorema bien

conocido de análisis, nos permite escribir la serie de igualdades

$$\int \varphi \, d\omega = \overline{\varphi}_{\Sigma} \int d\omega = \overline{\varphi}_{\Sigma} \, 4\pi,$$

donde $\overline{\varphi}_{\Sigma}$ es el valor medio de φ sobre la superficie Σ. Por consiguiente, al tender R hacia cero, $\overline{\varphi}_{\Sigma}$ tenderá hacia el valor perfectamente definido que posee en el punto P; de forma que la integral en cuestión admite el límite

$$4\pi \varphi_p .$$

Pero al mismo tiempo el volumen V' tiende hacia la totalidad del V, con lo cual la igualdad de Green se convierte en

$$4\pi \varphi_p = -\int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi \, dV + \int_s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) ds.$$

que da el valor de φ en un punto cualquiera del campo, cuando se conoce $\Delta \varphi$ en todo el volumen, y $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ y φ sobre las superficies que le limitan.

Para simplificar, supongamos que no existen superficies de discontinuidad en el dominio de la integración, y extendamos esta á la totalidad del espacio. Si φ es para todos los puntos á distancia infinita un infinitamente pequeño de primer orden, y $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ de segundo, la integral de superficie se anula, puesto que, si bien el dominio de la integración es infinitamente grande de segundo orden, la función integrada es infinitamente pequeña de tercero. Así, pues, la igualdad anterior se convierte en

$$4\pi \varphi_p = -\int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi \, dV.$$

Conocido el valor de φ en un punto, se calcula sin dificultad el vector $\vec{a} = \text{grad}\ \varphi$, puesto que bastará aplicarle el operador ∇; de suerte que

$$\vec{a} = \nabla \varphi_p = -\int_V \nabla \left(\frac{1}{r} \frac{\Delta \varphi}{4\pi} \right) d\,V.$$

Para transformar el segundo miembro es menester tener en cuenta que la acción del operador ∇ tiene lugar en el punto P, mientras que la magnitud $\Delta \varphi$ se refiere al elemento de volumen $d\,V$ colocado en la otra extremidad de r; de suerte que esta última magnitud debemos considerarla constante. Por otra parte,

$$\left(\nabla \frac{1}{r} \right)_p = -\left(\nabla \frac{1}{r} \right)_{dV} = \frac{\vec{r}^{\,0}}{r^2}.$$

Así, en definitiva,

$$\vec{a}_p = -\int_V \frac{\vec{r}^{\,0}}{r^2} \frac{\Delta \varphi}{4\pi} d\,V.$$

Si definimos una nueva función escalar

$$\rho = -\frac{\Delta \varphi}{4\pi},$$

las igualdades que definen φ_p y $\vec{a}_p$ se convierten en

$$\varphi_p = \int_V \frac{\rho}{r} d\,V,$$

$$\vec{a}_p = \int_V \frac{\vec{r}^{\,0} \rho}{r^2} d\,V.$$

Si suponemos que ρ expresa la densidad de ciertas masas

distribuídas en el espacio, el vector $\vec{a}$ puede considerarse como una acción ejercida por ellas en razón inversa del cuadrado de la distancia, esto es, según la ley de Newton. La función φ se denomina potencial de las masas de densidad ρ. Lagevin propone expresar esta relación por los símbolos

$$\varphi = \text{Pot}\,\rho,$$

$$\vec{a} = \text{New}\,\rho.$$

27. A primera vista esta representación de $\vec{a}$ mediante la acción newtoniana de las masas ρ parece inútil, puesto que para determinar ρ parece indispensable conocer φ en todo el campo. Pero es necesario no olvidar que toda función de φ y $\vec{a}$, cuando estas magnitudes representan fenómenos físicos, expresan á su vez un nuevo fenómeno, que con frecuencia es más fácilmente determinable que la distribución de los valores de aquellas magnitudes en todo el campo.

Consideremos, por ejemplo, que el vector $\vec{a}$ es la velocidad de un líquido incompresible que llena una vasija, admitiendo además que el movimiento sea tal, que $\vec{a} = \text{grad}\,\varphi$. En este caso,

$$\int_V \Delta\varphi\, dV = \int_s \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds = \int_s \vec{a}\, \vec{ds},$$

en virtud del teorema de Gauss; de suerte que si $\Delta\varphi$ ha de ser diferente de cero en alguna región del campo, es menester que el flujo de líquido que atraviese una cierta superficie que envuelva dicha región sea diferente de cero. Mas ello equivale á decir que en el interior de la superficie indicada existe una generación ó destrucción continuada de líquido.

Esta generación, en ciertos puntos de la masa líquida, podemos imitarla mediante la colocación de una esfera sólida

cuyo diámetro crece bajo la acción de una fuerza interior, mientras los puntos de destrucción se pueden remedar por otra esfera de radio decreciente. Ahora bien; se comprende inmediatamente que el reconocimiento de la existencia de estos puntos y la medida del valor de $\Delta\varphi$ que les caracteriza es enormemente más sencillo que hallar los valores de $\overleftarrow{a}$ en todos los puntos del líquido.

28. Desde otro punto de vista, tiene gran importancia el teorema que acabamos de demostrar. Continuando con el ejemplo anterior, supongamos que en un punto del espacio que llena el líquido se coloca un cuerpo sólido: la cantidad de movimiento del líquido en los diferentes puntos de la superficie del sólido determina una impulsión que será proporcional al valor de $\overrightarrow{a}$, y, por ende, vendrá definida por la ley de Newton. Supongamos ahora un observador incapaz de apreciar la existencia del flúido, pero cuyos sentidos le denuncien la presencia de aquellas esferas con que hemos imitado los puntos de generación ó destrucción del mismo, así como las fuerzas de que hemos hecho mención. Este observador se encontrará respecto del fenómeno supuesto, que, por otra parte, ha sido realizado experimentalmente por Bjerknes, en idénticas condiciones que nosotros para los fenómenos gravitatorios, electrostáticos, magnetostáticos y, en general, de todos aquellos que se rigen mediante la ley de Newton.

En otros términos: en presencia de un orden de fenómenos que satisface la repetida ley, podemos admitir una de estas dos hipótesis, sin que la teoría se encuentre jamás en contradicción con la experiencia: ó suponemos la realidad de las masas actuantes y una acción á distancia, sin medio alguno que la transmita, ó imaginamos que aquellas masas son el resultado aparente de ciertas cualidades del movimiento de un flúido continuo que llena el espacio, sin que podamos percibirle. La elección de una hipótesis ú otra es indiferente, si se las juzga por los resultados últimos obte-

nidos; sólo razones de comodidad ó de hábito mental pueden aducirse en pro de cualquiera de ellas.

29. *Campo de un vector solenoidal.*—Estudiado el campo del vector $\vec{a} = \text{grad}\,\varphi$, conviene ahora fijar la atención en el campo del vector

$$\vec{a} = \text{rot}\,\vec{b}.$$

Para determinar sus propiedades vamos á seguir un camino paralelo al que nos sirvió en el caso anterior. Aplicando aquí el teorema de Gauss, como antes lo hicimos con el de Stockes, se obtiene

$$\int_s \vec{a}\,\vec{ds} = \int_V \text{div rot}\,\vec{b}\,dV = 0,$$

puesto que el elemento diferencial de la segunda integral es nulo, según vimos en el Capítulo II. Según esto, sea cual fuere la superficie cerrada que elijamos en el campo de un vector de este género, su flujo será nulo. La recíproca es cierta: si el flujo emergente de una superficie cerrada cuales quiera es nulo, el vector es la rotación de otro vector. Para demostrarlo con mayor sencillez es preferible enunciar la misma cuestión en otra forma equivalente. El flujo que atraviesa una superficie abierta en el caso del vector que estudiamos, depende exclusivamente del contorno de esta superficie; puesto que si S y S' (Fig. 15) son dos superficies del mismo contorno y las flechas indican la dirección en que se han de tomar los dos flujos, cambiando la dirección del flujo en S' y sumando, se obtiene

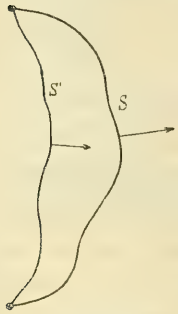


Figura 15.

$$\int_s \vec{a}\,\vec{ds} - \int_{s'} \vec{a}\,\vec{ds'} = 0,$$

según la anterior aplicación del teorema de Gauss; fórmula que demuestra la propiedad señalada. Recíprocamente, si esta fórmula es exacta y, por ende, el valor del flujo depende exclusivamente del contorno, podremos siempre escribir

$$\int_s \vec{a}\, \vec{ds} = \int_c f_1(xyz)\, dx + f_2(xyz)\, dy + f_3(xyz)\, dz.$$

Pero como dx, dy, dz son las componentes del vector $\vec{dl}$, y el elemento diferencial es una cantidad escalar, las tres funciones f_1, f_2 y f_3 serán también las componentes de un vector. Basta para reconocerlo aplicar el criterio de la transformación de coordenadas.

Por otra parte, el teorema de Stockes nos dice que la circulación del vector cuyas componentes son las funciones indicadas, vector que podemos llamar $\vec{b}$, es igual flujo de rot $\vec{b}$ sobre una superficie que tiene aquella curva por contorno; de suerte que

$$\int_s \vec{a}\, \vec{ds} = \int_s \text{rot}\, \vec{b}\, \vec{ds},$$

y como esta igualdad es independiente del campo de integración,

$$\vec{a} = \text{rot}\, \vec{b}.$$

30. Admitiendo que el campo sea continuo, salvo en ciertas regiones, hipótesis que corresponde á todos los casos físicos, podremos siempre trazar curvas cuyas tangentes se confundan con el vector en cada uno de sus puntos. Estas curvas equivalen aquí á las trayectorias normales á las superficies de nivel en el caso del vector grad φ, y las llamaremos también líneas de flujo. Trazando una curva cerrada cualquiera en el campo, por cada uno de sus puntos pasará una línea de flujo y su conjunto constituye un tubo de flujo.

Vamos á demostrar que el flujo del vector $\vec{a}$ a través de una superficie cualquiera limitada por este tubo en una región cualquiera del mismo es constante. En efecto; consideremos dos cualesquiera de estas superficies. Ellas dos y el tubo forman una superficie cerrada a través de la cual flujo ha de ser nulo; y como en el tubo el elemento diferencial es cero, porque los vectores $\vec{a}$ y $\overrightarrow{ds}$ son perpendiculares, la suma de los correspondientes á las superficies en cuestión será nula, ó

$$\int_s \vec{a}\ \overrightarrow{ds} = \int_{s'} \vec{a}'\ \overrightarrow{ds'},$$

que demuestra el teorema.

Cuando los tubos son muy delgados, se puede escribir

$$\vec{a}\ \overrightarrow{ds} = \text{const.},$$

que nos dice que el valor del campo en un punto es inversamente proporcional á la sección del tubo. Resulta, pues, que dividiendo el campo en tubos de igual flujo, tendremos un medio de medir el módulo del mismo en cada punto, y como al mismo tiempo el argumento viene dado por la tangente á las líneas de flujo, la determinación es completa. Así, pues, los tubos de flujo sirven para representar gráficamente la clase de campos que estudiamos, de igual forma que las superficies de nivel para los campos de vectores que admiten una función laminar.

31. De igual suerte que la función laminar φ no queda unívocamente definida por el vector $\vec{a}$, tampoco lo está aquí el vector $\vec{b}$ por el $\vec{a}$. En efecto; las tres ecuaciones de derivadas parciales á que equivale la ecuación vectorial que define $\vec{b}$ por $\vec{a}$ no son independientes, puesto que han de satisfacer á la identidad div $\vec{a} = 0$. Así, pues, podemos agre-

gar á la ecuación de definición una nueva condición, que puede ser el que la divergencia de $\vec{b}$ sea también cero, esto es,

$$\vec{a} = \text{rot } \vec{b},$$

$$0 = \text{div } \vec{b}.$$

con estas dos ecuaciones, $\vec{b}$ queda completamente definida.

Si se nos diere directamente $\vec{b}$, en vez de $\vec{a}$, dicho se está que no podríamos someterle á la expresada condición; pero en todos los casos en que tratemos de deducir una propiedad del vector derivado $\vec{a}$, podremos sustituir al $\vec{b}$ un nuevo vector que satisfaga á la referida nueva ecuación, conservando el mismo valor para su rotación. Que esto es en todo caso posible, lo veremos claramente más adelante; y admitiéndolo ahora como exacto, se deduce que en todos los casos en que nos interese directamente $\vec{a}$ podemos suponer $\vec{b}$ definido por el sistema transcrito.

32. *Represenación del vector por masas que actúan según la ley de Laplace.*—Tomando la rotación de $\vec{a}$ y transformando su segundo miembro, se obtiene, en virtud de la segunda condición á que hemos sometido $\vec{b}$,

$$\text{rot } \vec{a} = \text{rot}^2 \vec{b} = -\Delta \vec{b}.$$

Pero el primer miembro es un vector axial que podemos designar mediante $4\pi \vec{i}$, con lo cual la ecuación toma la forma

$$4\pi \vec{i} = -\Delta \vec{b},$$

ecuación vectorial de idéntica forma á la escalar

$$4\pi \rho = -\Delta \varphi.$$

Mas en este último caso hemos visto que, si esta ecuación se cumple

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r} \, d\,V,$$

luego para cada una de las componentes de $\vec{b}$ podremos escribir, puesto que son magnitudes escalares ligadas á las correspondientes componentes de $\vec{i}$, como φ lo está á ρ,

$$b_x = \int \frac{i_x}{r} \, d\,V, \quad b_y = \int \frac{i_y}{r} \, d\,V, \quad b_z = \int \frac{i_z}{r} \, d\,V,$$

ó sea

$$\vec{b} = \int \frac{\vec{i}}{r} \, d\,V.$$

Conocido $\vec{b}$, lo está $\vec{a}$, puesto que

$$\vec{a} = | \nabla \vec{b} | ;$$

de suerte que, teniendo en cuenta la observación hecha en el párrafo 26 respecto á las variables sobre que ha de operar ∇, podemos escribir

$$\vec{a} = \int \left| \vec{i} \nabla \frac{1}{r} \right| d\,V = \int \frac{| \vec{i} \, \vec{r^0} |}{r^2} \, d\,V.$$

Traduciendo esta ecuación al lenguaje vulgar, nos dice que el vector $\vec{a}$ puede conceptuarse engendrado por ciertas masas vectoriales $\vec{i}$ que actúan en razón inversa al cuadrado de la distancia y en la dirección definida por el producto vector de $\vec{i}$ por $\vec{r^0}$. Esta ley de acción es la misma que la formulada por Laplace para el campo de un elemento de corriente eléctrica, y de aquí el nombre con que la hemos designado.

Aquí podríamos desarrollar idénticas consideraciones á las expuestas en los párrafos 27 y 28 respecto á la importancia filosófica del teorema. Bástenos agregar que, aquí como allí, la equivalencia de las dos hipótesis fundamentales que se presentan naturalmente al espíritu, ha recibido una comprobación en los experimentos del propio Bjerknes.

33. *Campo de un vector cualquiera. Su descomposición en un vector grad φ y un vector rot* $\overset{\frown}{b}$.—Ya hemos dicho que un vector cualquiera que no satisfaga á las condiciones características de los anteriormente estudiados, se puede descomponer en dos partes, cada una de las cuales es de la naturaleza de aquéllos. Sea el vector $\vec{a}$, y consideremos otros dos $\vec{c}$ y $\vec{d}$ definidos por las relaciones

$$\text{rot } \vec{a} = \text{rot } \vec{c}$$

$$0 = \text{div } \vec{c}$$

$$\text{div } \vec{a} = \text{div } \vec{d}$$

$$o = \text{rot } \vec{d}.$$

Ahora bien; en virtud de estas ecuaciones, el vector $\vec{c} = \text{rot } \overset{\frown}{b}$ y el $\vec{d} = \text{grad } \varphi$ quedan perfectamente definidos, según hemos demostrado anteriormente. Recíprocamente, conocidos $\vec{c}$ y $\vec{d}$ lo será $\vec{a}$, puesto que escribiendo

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{d},$$

las dos ecuaciones

$$\text{div } \vec{a} = \text{div } (\vec{c} + \vec{d}) = \text{div } \vec{d}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \text{rot } (\vec{e} + \vec{d}) = \text{rot } \vec{c}$$

definen $\vec{a}$ sin ambigüedad.

Así, en definitiva, el vector $\vec{a}$ viene definido por las magnitudes φ y $\overset{\frown}{b}$, en virtud de la ecuación

$$\vec{a} = -\int \frac{\vec{r^0}}{r^2} \frac{\Delta \varphi}{4\pi} d\,V - \int \frac{|\Delta \overset{\frown}{b} \cdot \vec{r^0}|}{4\,\pi\,r^2} d\,V.$$

Si en vez de ser un vector polar fuera $\overset{\frown}{a}$ axial, sus componentes serían de la misma naturaleza $\vec{c}$ y $\vec{d}$; de suerte que φ sería un pseudoescalar y $\overset{\frown}{b}$ un vector polar.

(Continuará).

XXIII.—Geometría Analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades.

POR MODESTO DOMÍNGUEZ HERVELLA.

(Continuación.)

Potencias con exponentes enteros.

18. Se sabe que una potencia es un producto de factores iguales; pueden ser abstractos ó concretos, pero el primero, que viene á ser multiplicando, es el único que en la multiplicación se puede tomar como concreto, así como los productos sucesivos, que se convierten en multiplicandos en las multiplicaciones ulteriores, de modo que todos menos el primero entran como multiplicadores, y, por tanto, en su relación con la unidad real y positiva de su naturaleza. Así consideramos todas las potencias de una cantidad de la misma naturaleza que su base, y sean lo que fueren, las representaremos por vectores.

Sea OA (fig. 9.ª) el eje real, Ou la unidad positiva y $OB = b_{\beta}$ la cantidad cuyas potencias vamos á determinar gráficamente. Según la regla de la multiplicación, haremos deslizar el triángulo OuB girando alrededor del punto O hasta ocupar la posición $Ou'B'$, y BC, paralela á $u'B'$, determina el punto C en que finaliza el vector

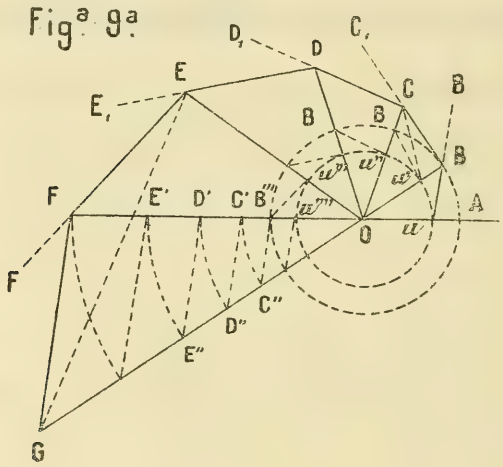
$$OC = (b_{\beta})^2 = b^2{}_{2\beta}.$$

Trasladando el mismo triángulo OuB á $Ou''B''$, prolongando OB'' hasta su encuentro con CD, paralela á $u''B''$, se tendrá el vector $OD = OB \times OC = (b_{\beta})^3 = b^3{}_{3\beta}$, ter-

cera potencia de b_β. Así sucesivamente se determinan las potencias

$$OE = \overline{OB}^4 = (b_\beta)^4 = b^4{}_{4\beta},$$
$$OF = \overline{OB}^5 = (b_\beta)^5 = b^5{}_{5\beta},$$
$$OG = \overline{OB}^6 = (b_\beta)^6 = b^6{}_{6\beta},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En el caso particular de la figura resultan OF y OG en las prolongaciones inversas respectivas de Ou y OB, por-



que los ángulos β son de 36°, y repetidos cinco veces hacen 180°. Así resultará la séptima potencia en la prolongación negativa de la segunda, y, en general, cada potencia $n+5$ en la prolongación inversa de la potencia n. Las potencias $5n$, si n es impar, coincidirán con la parte negativa del eje real, y si n es par, serán potencias reales positivas.

19. Los lados de la línea poligonal $uBCDEFG$, que llamaremos *polígono potencial*, expresan, según esta teoría, la diferencia entre dos potencias consecutivas (núm. 10), y, en general, la línea que, como EG une dos vértices cualesquiera del polígono, es en magnitud y dirección, la diferen-

cia entre los vectores potencias que corresponden á dichos vértices. Para comprobarlo analíticamente respecto al módulo ó valor absoluto, tomemos dos potencias cualesquiera $(b_\beta)^m$ y $(b_\beta)^n$, siendo $m > n$. La diferencia entre estos dos vectores es

$$(b_\beta)^m - (b_\beta)^n = (b_\beta)^n [(b_\beta)^{m-n} - 1]$$

y designando por d la diferencia $m - n$:

$$(b_\beta)^n [(b_\beta)^d - 1] = b^n{}_{n\beta}(b^d{}_{d\beta} - 1) =$$
$$= b^n{}_{n\beta}[b^d(\cos d\beta + \sqrt{-1} \operatorname{sen} d\beta) - 1].$$

El módulo de esta expresión es

$$b^n \sqrt{(b^d \cos d\beta - 1)^2 + b^{2d} \operatorname{sen}^2 d\beta} =$$
$$= b^n \sqrt{b^{2d} - 2\, b^d \cos d\beta + 1}\,;$$

b^{2d} es la segunda potencia de b^d, $2b^d \cos d\beta$ es el doble de la proyección de b^d sobre el eje real, y está demostrado, en Geometría Elemental, que un lado de un triángulo es, en magnitud, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de la proyección de uno de éstos sobre el otro; advirtiendo que, si el coseno es negativo, la proyección está fuera del triángulo y el término sustractivo se convierte en aditivo.

Por consiguiente, el radical es equivalente al tercer lado de un triángulo formado por la unidad, el lado b^d y el ángulo comprendido $d\beta$.

Multiplicando por b^n los módulos de los lados de este triángulo, se tendrá otro triángulo semejante cuyos lados son b^n, b^{d+n} y

$$b^n \sqrt{b^{2d} - 2\, b^d \cos d\beta + 1}\,.$$

Introduciendo b^n bajo el radical se tendrá

$$\sqrt{b^{2(d+n)} - 2\,b^{d+2n} \cos d\beta + b^{2n}} =$$
$$= \sqrt{b^{2n} - 2\,b^{m+n} \cos (m-n)\,\beta + b^{2n}}$$

que es en magnitud el tercer lado del triángulo formado por las potencias b^n, b^m y el ángulo comprendido $(m-n)\beta$, como se quería comprobar.

En cuanto á la dirección, tomemos los vectores

$$OE = b^4{}_{4\beta},\ OG = b^6{}_{6\beta};\ \text{será}\ EG = b^6{}_{6\beta} - b^4{}_{4\beta} =$$
$$= b^6(\cos b\beta + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ b\beta) - b^4(\cos 4\beta + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ 4\beta).$$

La proyección de EG sobre una paralela al eje real es $b^6 \cos 6\beta - b^4 \cos 4\beta$, y sobre un eje perpendicular á aquél $b^6\ \text{sen}\ 6\beta - b^4\ \text{sen}\ 4\beta$.

Estas son las diferencias entre las proyecciones de las potencias OG y OE, de modo que la diferencia EG entre estas dos potencias es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son las diferencias de las dos proyecciones sobre una paralela y una perpendicular al eje real; es decir, la dirección que debe tener la diferencia EG.

20. La semejanza de los triángulos OuB, OBC, OCD..... conduce á algunas propiedades del polígono potencial que son comunes á los polígonos regulares:

1.ª El ángulo que forma cada lado EF con el radio que le precede, OE, es constante, y lo mismo el que forma con el radio que le sigue, OF.

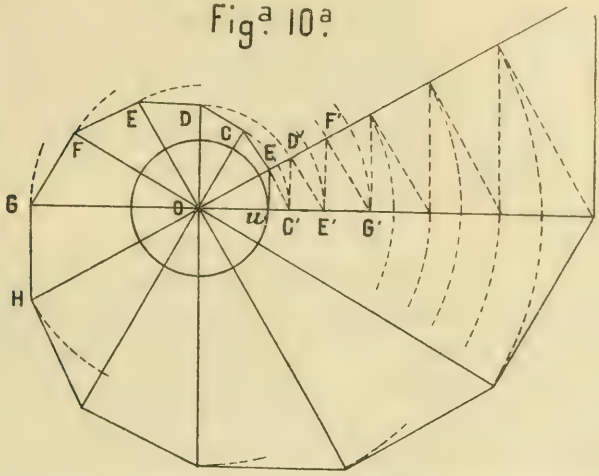
2.ª El ángulo DEF de dos lados consecutivos es constante y suplemento de θ, y, por consiguiente, el ángulo formado por un lado cualquiera y la prolongación de otro contiguo es igual á θ.

Estas propiedades pueden servir para trazar el polígono de distintas maneras, sin tirar las líneas $u'B'$, $u''B''$..... ó

para comprobar si están bien hechas las construcciones; que si se trata de potencias algo elevadas están expuestas á errores que se van aglomerando.

Haciendo girar los triángulos OuB, OBC..... alrededor del punto O sin salir de su plano, hasta que se coloquen todos en uno mismo de los ángulos 6 del centro, los lados opuestos á 6 vendrán á ser paralelos, de donde resulta la sencilla construcción que se ve en el ángulo FOG, y de la

Fig.ª 10.ª



cual se puede tomar la magnitud de una potencia cualquiera para llevarla sobre el radio correspondiente.

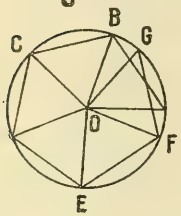
A otra construcción más sencilla se llegará si suponemos que los triángulos semejantes, cuyo vértice está en O, se van doblando unos sobre otros, girando alrededor de los radios que los separan, hasta que vengan á sobreponerse en el ángulo uOB. Las potencias pares se colocarán sobre Ou prolongada, las impares sobre la dirección OB de la primera potencia, y los lados del polígono formarán dos series de rectas paralelas.

Así, siendo OB (fig. 10) la cantidad cuyas potencias enteras se buscan y Ou la unidad, se tirará uB, se formará un ángulo $OBC' = OuB$, se tirará $C'D'$ paralela á uB, $D'E'$

paralela á BC', y así sucesivamente, y tendremos la magnitud de las potencias 1.ª, 3.ª, 5.ª..... en OB, OD', OF'..... y las pares O, 2.ª, 4.ª, 6.ª..... en Ou, OC', OE', OG'..... y para llevarlas á sus verdaderas posiciones bastará trazar arcos hasta que encuentren á los respectivos radios.

21. Es fácil ver que, aunque varíe θ, mientras permanezcan las mismas las magnitudes Ou y OB en valor absoluto, el de las distancias OC', OD', OE', etc., no sufrirá alteración; por consiguiente, la construcción se puede hacer aparte en un ángulo arbitrario; servirá una sola figura para hallar los módulos de las potencias de todas las cantidades de la misma magnitud, y se podrá aplicar el método á cualquier cantidad real.

Fig.ª 11.ª



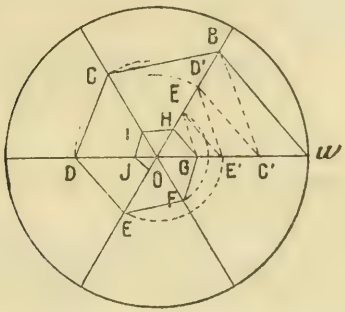
22. En las figuras 9.ª y 10 el módulo de OB es mayor que la unidad, puesto que el punto B está fuera de la circunferencia; cuanto más lejos se halle de ésta, tanto más rápidamente crecerán los módulos OC', OD', OE'....., aumentándose la divergencia del polígono potencial. Si el punto B (fig. 11) está sobre la circunferencia del radio Ou, el triángulo OuB será isósceles, y todos los demás, OBC, OCD..... le serán iguales, por tener de dos en dos un lado común y ser semejantes, formándose así un polígono $uBCDEFG$....., que podemos llamar regular aunque no sea cerrado, por tener, además de las propiedades enumeradas (núm. 20), la de ser iguales sus lados y tener sus vértices equidistantes del origen.

Si el punto B está dentro de la circunferencia, el ángulo OBu (fig. 12) es mayor que OuB, la recta BC' queda dentro del triángulo OBu, y la línea $uBC'D'E'F'$..... converge hacia el origen sin llegar nunca á él.

23. Es de advertir que en el caso particular de la fig. 12, de ser θ un submúltiplo de π, coincidirá en G un punto de la *espiral potencial* con otro del zig-zag, un lado de aquélla

con un trozo de éste, paralelo á uB, y los lados siguientes HI, IJ..... serán paralelos á BC, CD....., circunstancia que puede encontrarse lo mismo en el caso de estar B fuera de la circunferencia y cuando está en ella; en este último caso la espiral se convierte en un verdadero polígono regular y

Fig.ª 12.ª



las potencias se reproducen. En otros términos: siendo n un número entero y $n\beta = 2\pi$, la expresión

$$1_\beta = 1_{\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

no tiene mas que n potencias distintas.

En efecto; elevemos esta expresión á la potencia m, y se tendrá:

$$(1_\beta)^m = 1_{m\beta} = 1_{\frac{2m\pi}{n}} = \cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2m\pi}{n}.$$

Si se dan á m valores enteros de 1 á n se tendrán las potencias

$$1_\beta,\ 1_{2\beta},\ 1_{3\beta}\ \ldots\ldots \text{ y } 1_{n\beta} = 1_{\frac{2n\pi}{n}} = \cos 2\pi +$$
$$+ \sqrt{-1}\,\text{sen}\ 2\pi = 1$$

que forman entre sí el ángulo β.

Dando á m valores enteros mayores que n se obtienen vectores que siguen formando entre sí el ángulo β, y, por consiguiente, son los mismos anteriores.

Lo mismo sucede cuando β es comensurable con 2π, porque entonces será comensurable con un número entero m de veces 2π, y después de m evoluciones completas llegará á formarse polígono cerrado, aunque estrellado; y para el valor entero m la expresión

$$\cos\frac{2m\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2m\pi}{n}$$

no tendrá mas que n potencias distintas, viniendo á ser idénticas á la primera, la $n+1$, $2n+1$....., y reproduciéndose también las demás, de las cuales las potencias rn, cualquiera que sea el número entero r, siempre serán la unidad positiva.

Vemos, pues, que la invariabilidad de la unidad positiva en sus potencias, el no tener la unidad negativa mas que dos potencias distintas, etc., todo forma parte de una teoría completa. En efecto; haciendo $m=1$ en la expresión anterior, se encuentra que las potencias enteras de

$$1=\cos\frac{2\pi}{1}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{1}$$

no tienen mas que un valor; que las de

$$-1=\cos\frac{2\pi}{2}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{2}$$

no tienen mas que dos; que las de

$$1_{\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{3}$$

no tienen mas que tres valores; que las de

$$1_{\frac{2\pi}{4}} = \cos\frac{2\pi}{4} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}$$

no tienen mas que cuatro distintos, y así sucesivamente.

24. Puesto que un exponente positivo es el número de veces que la cantidad afectada es factor, el exponente negativo tiene que ser el número de veces que dicha cantidad es lo contrario á factor, esto es, divisor.

Habiendo demostrado que $(b_\beta)^n = b^n{}_{n\beta}$, será

$$(b_\beta)^{-n} = b^{-n}_{-n\beta} = \left(\frac{1}{{}^n b}\right)_{-n\beta},$$

de manera que las potencias negativas de b_β se encuentran prolongando en sentido negativo la línea potencial en las figuras 9, 10, 11 y 12, es decir, construyendo, á partir del vector $O\,u$, otra serie de triángulos semejantes á los anteriores; si éstos van aumentando en magnitud, como sucede en las figuras 9 y 10, los otros irán disminuyendo, y el polígono potencial se acercará siempre al origen sin llegar á él. Lo contrario sucederá en la fig. 12, en que las potencias positivas van disminuyendo.

En la fig. 11, todas las potencias, tanto positivas como negativas, son equivalentes.

25. Un procedimiento especial se sigue para la construcción de la raíz cuadrada de cualquier cantidad. Sea (figura 13) $O\hat{A} = a_\alpha$ y $Ou = 1$, y representemos por b_β la raíz cuadrada de $a_\alpha = b^2{}_{2\beta}$. El vector b_β estará en la bisectriz del ángulo $u\,O\,A = \alpha = 2\beta$. Se ha demostrado (número 20) que el ángulo de dos lados consecutivos del polígono potencial es suplemento de β, de modo que el extremo de b_β estará en el arco $u\,B\,A$, capaz del ángulo $\pi - \beta$, arco que ha de ser tangente á la recta $A\,D$, que forma con $A\,u$ un ángulo β; este arco tendrá por centro el punto C in-

tersección de AC perpendicular á AD y la recta CE perpendicular á uA en su punto medio. En el mismo núm. 20 también se ha demostrado que el ángulo que forma cada lado del polígono potencial con el radio que le precede es constante, y también lo es el que forma con el radio que le sigue; de la semejanza de los triángulos OuB y OBA resulta que OB es media proporcional, tanto en magnitud

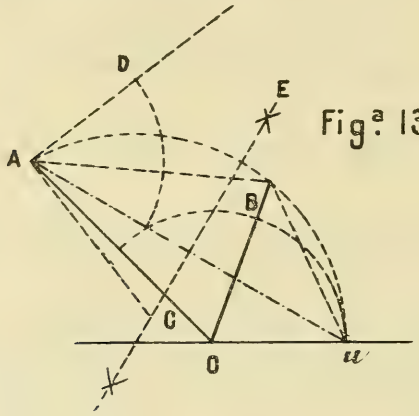


Fig.ª 13.ª

como en dirección, entre Ou y OA, quedando bien demostrado que $OB = b_\beta$.

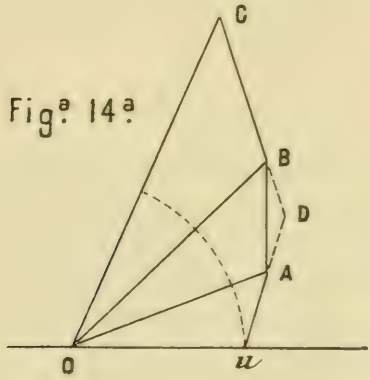
Si $\alpha = \pi$, OA estará en la prolongación negativa de Ou, será $\beta = \frac{\pi}{2}$, y el arco capaz de $\pi - \beta$ será una semicircunferencia con diámetro uA reducido al eje; resultando e caso particular de que se trata en la Geometría Elemental.

Este procedimiento sirve para extraer la raíz cuyo índice no contiene más factores primos que 2. Supongamos conocida la potencia $(b_\beta)^8 = b^8{}_{8\beta}$; extrayendo la raíz cuadrada se tendrá $b^4{}_{4\beta}$, media proporcional entre 1 y $b^8{}_{8\beta}$. Análoga construcción dará $b^2{}_{2\beta}$, y, finalmente, se llegará á b_β, raíz octava de $b^8{}_{8\beta}$.

26. El procedimiento para la construcción gráfica de la raíz cúbica tiene que fundarse en las propiedades del polí-

gono potencial. Sea Ou, (fig. 14), la unidad positiva, $OA = b_\beta$, $OB = b^2{}_{2\beta}$ y $OC = b^3{}_{3\beta}$; la línea poligonal que una los extremos de estos cuatro vectores será $uABC$. El triángulo ADB, formado por el lado AB y las prolongaciones de los lados contiguos uA y CB, es isósceles, porque los ángulos en A y en B son iguales á β (núm. 20); el ángulo en D será $\pi - \beta$.

En la figura tenemos dados los vectores $Ou = 1$ y $OC = b^3{}_{3\beta}$ y las direcciones OA y OB de los vectores desconocidos b_β y $b^2{}_{2\beta}$. Los dos se determinan á la vez, á falta de procedimiento, con sólo regla y compás, por el si-



guiente método, sencillo y tan exacto como permiten las construcciones gráficas:

Se recorta en un papel, con cuidado, un ángulo igual á $\pi - 2\beta$; se coloca de modo que sus lados pasen por u y por C, y que el vértice del ángulo esté en el ángulo AOB; se mueve sin que sus lados dejen de pasar por u y por C, hasta que, con un compás, se encuentren equivalentes las distancias del vértice á las intersecciones de los lados del ángulo móvil con las rectas de direcciones β y 2β. Se marcan los puntos A y B y, se tiene, no sólo la raíz desconocida b_β, sino también su segunda potencia $b^2{}_{2\beta}$.

Para mayor facilidad, se puede trazar, sobre la cuerda uC,

el arco capaz del ángulo $\pi - 2\beta$, en el cual se ha de mover el vértice del ángulo móvil; además, se pueden marcar en dicho ángulo algunas rectas perpendiculares á su bisectriz, á distancia de un milímetro, ó menos, unas de otras, y esto facilita la colocación final del papel móvil.

27. Esta construcción sirve para todos los exponentes fraccionarios cuyo denominador no contiene más factores primos que 3, y, combinada con la del núm. 25, servirá para los exponentes cuyo denominador no contiene factores primos distintos de 2 y 3.

Se trata, por ejemplo, de $(a_\alpha)^{\frac{5}{12}}$. Haciendo $(a_\alpha)^{\frac{1}{12}} = b_\beta$, la incógnita del problema será $b^5{}_{5\beta}$, que forma parte de la progresión

$$\div\!\!\div 1 : b_\beta : b^2{}_{2\beta} : b^3{}_{3\beta} : b^4{}_{4\beta} : b^5{}_{5\beta} : b^6{}_{6\beta} : b^7{}_{7\beta} : b^8{}_{8\beta} : b^9{}_{9\beta} : b^{10}{}_{10\beta} : b^{11}{}_{11\beta} : b^{12}{}_{12\beta}$$

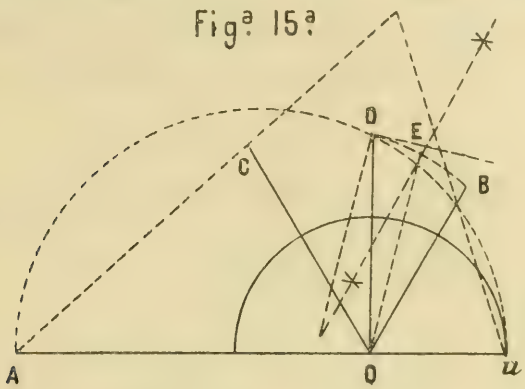
en que sólo se conocen el primero y último términos.

El principal objeto de la construcción gráfica de las potencias fraccionarias es determinar su valor absoluto. Cuando el denominador del exponente es par, conviene tomar la potencia dada en la prolongación negativa de la unidad positiva; la construcción se hará como si fuese $\beta = \frac{\pi}{12}$ y las magnitudes que se determinen se llevarán á sus verdaderas direcciones.

Los datos del problema así modificados serán, (fig. 15) $Ou = 1$, $OA = a_\alpha = a_\pi = b^{12}{}_{12\beta} = b^{12}{}_\pi$. El término $b^6{}_6$ es media proporcional entre 1 y $b^{12}{}_\pi$, y será la ordenada OD, perpendicular á uA, terminada en la semicircunferencia uDA. Intercalando entre Ou y OA dos términos proporcionales se tendrá la progresión $\div\!\!\div 1 : b^4{}_{4\beta} : b^8{}_{8\beta} : b^{12}{}_{12\beta}$; por el procedimiento del núm. 26, con el ángulo móvil $\frac{\pi}{3}$ se determinan los vectores $OB = b^4{}_{4\beta}$ y $OC = b^8{}_{8\beta}$. El vector $b^5{}_{5\beta}$ estará en la bisectriz del ángulo BOD, y su punto final en e

arco BED capaz del ángulo $\pi - \beta = \pi - \frac{\pi}{12}$. Así se tendrá el vector $OE = b^5{}_{5\beta}$, y si se quieren las demás potencias de b_β se obtendrán por triángulos semejantes á OBE, llenando los huecos uOB, DOC y COA; pero es mejor por medias proporcionales, siempre que se pueda como en este

Fig.ª 15.ª



caso; á saber: $b^2{}_{2\beta}$ entre $Ou = 1$ y $OB = b^4{}_{4\beta}$, b_β entre 1 y $b^2{}_{2\beta}$, $b^3{}_{3\beta}$ entre $b^2{}_{2\beta}$ y $b^4{}_{4\beta}$, $b^7{}_{7\beta}$ entre $b^8{}_{8\beta}$ y $b^6{}_{6\beta}$, $b^{10}{}_{10\beta}$ entre $b^8{}_{8\beta}$, y $b^{12}{}_{12\beta}$, $b^9{}_{9\beta}$ entre $b^8{}_{8\beta}$ y $b^{10}{}_{10\beta}$, y, finalmente, $b^{11}{}_{11\beta}$ entre $b^{10}{}_{10\beta}$ y $b^{12}{}_{12\beta}$. Estas magnitudes se llevarán á otros vectores que forman entre sí el verdadero ángulo $\beta = \frac{\alpha}{12}$.

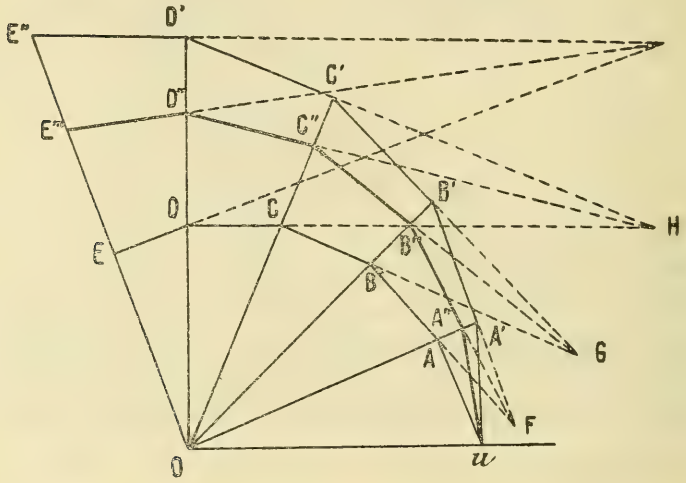
28. El problema general para cualquier raíz se resolverá en la segunda parte de esta obra; por ahora voy á indicar una resolución muy aproximada.

Si se prolongan los lados homólogos de dos polígonos potenciales, $uABCDE$, $uA'B'C'D'E'$, hasta los encuentros respectivos F, G, H, I, los ángulos BFB', CGG', DHD', EIE' son iguales al ángulo AIA' que forman los dos primeros lados.

Sea OE'' la potencia cuya raíz quinta se busca: tirando $E''I, D''H, C''G, B''F, A''u$ se tendrá un polígono muy

aproximado al verdadero potencial, y lo será tanto más, cuanto más agudo sea el ángulo EIE', si dentro de éste está el punto E''. Si eso satisface la aproximación, se construye otra figura conservando el polígono potencial que más se aproxima al punto dado E'', y tomando por base el vector OA'' se traza otro polígono potencial en reemplazo de $uABCDE$, que en la figura es el más apartado de E''; y si el nuevo polígono no termina en el punto E'', se hace desde este punto la misma construcción, uniéndolo con el nue

Fig.ª 16.ª



vo punto I, intersección de la recta $E'I$ con la prolongación del nuevo lado extremo, y tirando las demás rectas á los nuevos puntos de concurso. Se puede tomar como verdadero este último polígono potencial, sus radios como potencias fraccionarias de OE'', sin más error que el que suele haber en las construcciones gráficas.

29. Por ahora sólo hemos tratado de determinar la raíz n de cualquier cantidad a_α, suponiendo $\alpha < 2\pi$, prescindiendo de que el mismo vector a_α puede proceder de haber girado a un ángulo $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, $\alpha + 6\pi$, $\alpha + 2(n-1)\pi$;

y si se divide cada uno de estos ángulos en n partes iguales se tendrán n cocientes distintos

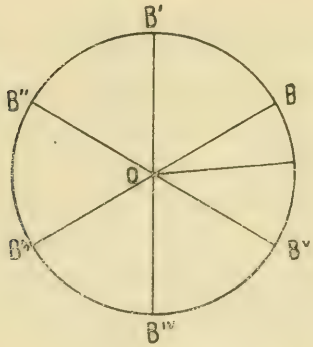
$$\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha+2\pi}{n}, \frac{\alpha+4\pi}{n}, \frac{\alpha+6\pi}{n} \ldots\ldots \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n};$$

el cociente que sigue

$$\frac{\alpha+2n\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi$$

forma con el eje el mismo ángulo $\frac{\alpha}{n}$ y corresponde al pri-

Fig.ª 17



mer vector; si se sigue aumentando circunferencias, volvemos á los mismos ángulos.

Sea, por ejemplo, $OB = \sqrt[6]{a_\alpha} = b_\beta$, (fig. 17) la primera raíz: cada dos raíces consecutivas forman entre sí el ángulo $\frac{2\pi}{6}$, todas tendrán la misma magnitud b, y serán los radios OB, OB', OB'', OB''', OB^{IV}, OB^{V} de la circunferencia de radio b.

30. *Raíces de la unidad.* La unidad real y positiva puede

ser 1_0, $1_{2\pi}$, $1_{4\pi}$..... $1_{2n\pi}$, y las raíces enésimas de estas $n+1$ unidades equivalentes serán

$$1_0,\ 1_{\frac{2\pi}{n}},\ 1_{\frac{4\pi}{n}},\ 1_{\frac{6\pi}{n}}\ .....\ \text{y}\ 1_{\frac{2n\pi}{n}} = 1.$$

Si se hace $\frac{2\pi}{n} = \beta$, se tienen las unidades

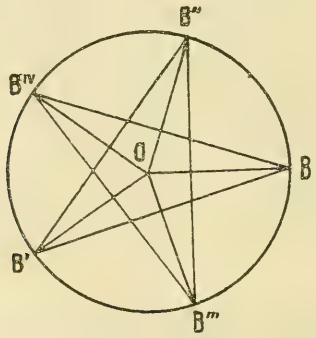
$$1,\ 1_\beta,\ 1_{2\beta},\ 1_{3\beta}\ .....\ 1_{n\beta} = 1_{2\pi} = 1$$

en que

$$1_{2\beta} = (1_\beta)^2,\ 1_{3\beta} = (1_\beta)^3\ .....\ 1_{(n-1)\beta} =$$
$$= (1_\beta)^{n-1},\ 1_{n\beta} = (1_\beta)^n = 1.$$

Considerando 1_β como su primera potencia tenemos n

Fig.ª 18.ª



raíces distintas, que son las potencias de la primera 1_β que sigue á la unidad positiva.

Estas raíces están representadas en el orden de las potencias siempre que n sea entero, es decir, si se trata de exponentes de la forma $\frac{1}{n}$. En el caso de un exponente $\frac{m}{n}$ habrá, entre cada dos potencias sucesivas, $m-1$ no sucesivas.

Sea, por ejemplo, $1^{\frac{3}{5}}$: la primera raíz es $1_{\frac{3}{5}2\pi}$ y las sucesivas $1_{\frac{3}{5}4\pi}$, $1_{\frac{3}{5}6\pi}$, $1_{\frac{3}{5}8\pi}$, $1_{\frac{3}{5}10\pi} = 1_{6\pi} = 1$.

Para el trazado de estas raíces se divide en cinco partes iguales la circunferencia del radio $OB = 1$ (fig. 18); á partir de B se trazan los respectivos radios. La primera raíz es OB', la segunda es $OB'' = \overline{OB'}^2$, la tercera es $OB''' = \overline{OB'}^3$, la cuarta $OB^{\text{IV}} = OB'^4$, y la quinta $OB^{\text{V}} = \overline{OB'}^5$; de modo que el orden de las potencias es el de los acentos, y el polígono potencial es $B\,B'B''B'''B^{\text{IV}}B$.

Si el exponente fuese $\frac{2}{5}$, la primera raíz sería OB^{IV}, y el polígono potencial es en este caso $B\,B^{\text{IV}}B'''B''B'B$.

Operaciones en el espacio.

31. Para expresar cualquier vector en el espacio elijamos un punto O (fig. 19) como origen de las entidades, en magnitud y dirección ó tendencia. De todas las rectas que parten de este punto elijamos una, OX, para tomar sobre ella las cantidades reales positivas, y sobre su prolongación negativa OX' las opuestas. Llamaremos *eje real* ó *eje principal* la recta, $X'X$ y entenderemos esta recta cuando se diga solamente el *eje*.

Todo plano que pase por él se llamará *meridiano*, y de todos ellos elegiremos uno, XY, llamado *meridiano principal*, para representar en él ó paralelamente á él, todas las entidades, hasta ahora conocidas sin exponente indirecto. El meridiano XZ perpendicular al principal, *meridiano secundario*, si hace falta nombrarlo. El plano YZ perpendicular al eje se llamará ecuador.

Imaginando una esfera cuyo centro está en el origen y cuyo radio es la unidad, llamaremos *meridiana* á su intersección con cualquier meridiano, paralelos los planos per-

pendiculares al eje ó sus intersecciones con la esfera, *polos positivo* y *negativo* los puntos en que OX y OX' son cortados por la esfera.

Siguiendo la nomenclatura geográfica, se da el nombre de *longitud*, y cuando sea preciso añadiremos *angular*, al ángulo diedro formado por cualquier meridiano con el principal, y *colatitud* al ángulo que cualquier vector forma con OX.

32. Convendremos en considerar como positiva la longitud engendrada girando el meridiano de izquierda á derecha para un observador situado en OX.

La colatitud será positiva cuando el vector esté en el se-

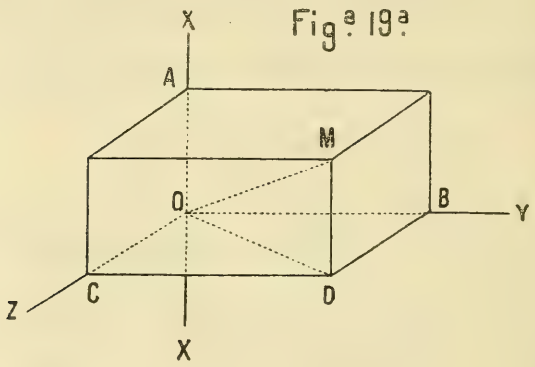


Fig.ª 19.ª

mimeridiano á que se refiere la longitud y negativa, si está en el semimeridiano opuesto.

Si se designa por a la magnitud de un vector, α su colatitud y α' su longitud, expresaremos esta cantidad por $a_{\alpha|\alpha'}$, que leeremos α sub α' con α' y que por ahora consideramos como un símbolo; pero como el vector expresado por este símbolo tiene relación geométrica con los vectores que están en el meridiano principal, no sería ciencia exacta la Geometría Analítica si no hubiese una relación analítica entre este nuevo vector y los conocidos de la forma a_α.

33. Euler, á fines del siglo XVIII, mal podía partir de una definición admisible del exponente $\sqrt{-1}$, que no era con-

siderado mas que como un símbolo, sin más significación que la imposibilidad y lo absurdo; así no es extraño que haya llegado á deducir que

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207875;$$

la unidad $\sqrt{-1}$, con un exponente unidad $\sqrt{-1}$, no puede tener un módulo diferente de la unidad.

En mis Elementos de Geometría Analítica adopté una definición del exponente $\sqrt{-1}$ afectando á $\sqrt{-1}$; pero me parece mejor definir, en general, todo exponente imaginario, utilizado lo que tiene de arbitrario toda definición, para analizar varias y elegir la más satisfactoria. Con las que voy á proponer, y con las que desecho, se llega á la misma interpretación de $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ que en dichos Elementos; pero, partiendo de distintas definiciones, no pueden menos de diferir algunas consecuencias.

34. Está visto que los resultados de las cuatro operaciones fundamentales y las potencias con exponentes reales no salen del plano en que están las cantidades operadas, y dichos resultados se pueden reducir siempre á la forma a_α, que es, por ahora, la forma analítica más general. Admitamos que las operaciones de que hemos tratado se han efectuado en el meridiano principal; la única operación que puede conducirnos á un vector situado en otro meridiano es la que no está definida, ó sea una potencia de a_α con exponente indirecto, y éste, no pudiendo ser de forma analítica desconocida sin caer en un círculo vicioso, tiene que ser de la misma forma $a'_{\alpha'}$.

Por la definición conocida, un exponente real es el número de veces que la cantidad afectada entra como factor. Si establecemos que el módulo del exponente indirecto es dicho número de veces, ya queda asegurada la condición de que el caso particular del exponente real esté comprendido,

sin alteración, en la definición general, sea cual fuere la interpretación que se dé al índice del exponente.

Existiendo una relación geométrica entre la cantidad conocida a_α y el símbolo $a_{\alpha|\alpha'}$, tiene que haber una relación analítica entre estas dos cantidades.

Puesto que el módulo del exponente no produce desviación del meridiano principal, lo único que puede hacer salir de dicho meridiano es la unidad indirecta 1_α, único exponente que todavía no está definido.

Así, la interpretación admisible del símbolo es

$$a_{\alpha|\alpha'} = (a_\alpha)^{1_\alpha}.$$

Establecido que el módulo de un exponente es el número de veces que la base es tomada como factor, siendo ésta a_α, será $(a_\alpha)^{a'_{\alpha'}} = a^{a'_{\alpha'}}{}_{a'_\alpha|\alpha'}$, quedando lleno el vacío que había entre el Análisis y la Geometría. Esta interpretación debe adoptarse mientras no se invente otra definición mas plausible, para que no quede reducida á un mero símbolo la expresión analítica de un vector en un meridiano cualquiera y se pueda someter, con su dirección, á las operaciones algebraicas.

Bajo las dos formas $a^{1_{\alpha'}}{}_\alpha = a_{\alpha|\alpha'}$ tenemos la representación analítica de cualquier punto del espacio.

35. En la expresión $a^{1_{\alpha'}}{}_\alpha$ hagamos

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha' = \frac{\pi}{2},$$

y se convertirá en

$$a^{1_{\frac{\pi}{2}}}{}_{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

Si $a = 1$, será

$$a_{\frac{\pi}{2}} = 1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1} \text{ y } 1^{1_{\frac{\pi}{2}}}{}_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

que es un vector unidad, con la colatitud $\frac{\pi}{2}$, situado en la intersección del meridiano secundario con el ecuador, es decir, en la dirección OZ (fig. 19), perpendicular al meridiano principal.

La expresión $a_{\alpha|\alpha'} = a^{1\alpha'}{}_{\alpha}$ ya no es un mero símbolo; ya está enlazada con cantidades conocidas por operaciones conocidas.

Siendo $a_{\alpha|\alpha'}$ la expresión general de toda cantidad, tenemos que recorrer de nuevo las operaciones para su representación gráfica y para ver qué propiedades consideradas hasta ahora como generales siguen siéndolo, y cuáles son especiales de las operaciones sin exponente indirecto.

XXIV. — La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopía, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912.

POR DOMINGO DE ORUETA.

I

Definición, historia, propiedades.

COMPOSICIÓN DEL ESPECTRO

Si proyectamos un espectro solar sobre una pantalla, vemos una banda brillante con los colores del arco iris: rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Antes del rojo y después del violeta la retina humana no percibe nada; es insensible á las radiaciones que puedan existir en dichas zonas (*).

Si se investiga con aparatos termométricos muy sensibles (bolómetro, pila termo-eléctrica, etc.) la zona anterior al rojo, se comprueba la existencia en ella de *radiaciones caloríficas*, que así se llaman. Del mismo modo, si se investiga la zona que sigue al violeta con una placa fotográfica, se comprueba que ésta se impresiona enérgicamente; lo que prueba existen allí *radiaciones químicas*, esto es, radiaciones capa-

(*) Los experimentos de Sir John Lubbock, comprobados después por otros naturalistas, demuestran que algunos animales, como, por ejemplo, las hormigas, *no ven* el color rojo, y en cambio ven la radiación que sigue inmediatamente al violeta. Esto prueba que la sensibilidad retiniana no es la misma en todos los seres, y que la luz ultra-violeta puede producir la sensación de luz en ojos distintamente organizados que los humanos.

ces de originar reacciones químicas, como es la de descomponer las sales de plata de la placa.

A las radiaciones anteriores al rojo se las da el nombre de *infra-rojas*, y á las que siguen al violeta, el de *ultra-violetas*. Queda así dividido el espectro total en tres zonas, que en el orden de menor á mayor refrangibilidad son: infra-roja, visible y ultra-violeta.

LONGITUD DE ONDA

La característica física de una radiación es su *frecuencia vibratoria*, esto es, el número de vibraciones por segundo de la molécula de éter que la origina. Así, por ejemplo, el color rojo está caracterizado por 375 trillones de vibraciones por segundo, y el extremo visible del violeta por 750 trillones, el doble, próximamente, del anterior. Pero como estas cifras tan enormes son difíciles de concebir, se las ha sustituído por las que expresan la *longitud de onda* de la radiación, que es el camino recorrido por la luz durante el tiempo que dura una vibración completa de la molécula de éter. Como la velocidad de la luz es conocida (unos 300.000 kilómetros por segundo), y la frecuencia vibratoria también, el valor de λ, ó sea de la longitud de onda, es función de cantidades conocidas y se deduce, por simple división, de la fórmula siguiente (*):

$$\lambda = \frac{v}{n}$$

en la que λ es la longitud de onda, que siempre se designa en Física con esta letra; v la velocidad de la luz, y n el número de vibraciones por segundo.

(*) En realidad, no se procede así, sino que se miden la velocidad y la longitud de onda y de ellas se deduce la frecuencia. No entramos en detalles de cómo se efectúan estas medidas, porque sería apartarnos demasiado de la finalidad de este artículo. El lector puede verlos en cualquier tratado de Física.

Haciendo la operación para las dos radiaciones antedichas, extremo rojo y extremo violeta, obtenemos las cifras $\lambda = 0{,}008$ milímetros y $\lambda = 0{,}004$ milímetros; y con objeto de no tener que escribir cifras tan largas, se adopta como unidad de medida á la *micra*, ó sea á la milésima de milímetro, que se designa con la letra griega μ, y los anteriores valores se escriben así: $\lambda = 0{,}8\ \mu$ y $\lambda = 0{,}4\ \mu$ (*). Estas dos cifras marcan los límites superior é inferior de las radiaciones que percibe la retina humana. Esta es *ciega*, por decirlo así, para todas las de longitud de onda mayor de $0{,}8\ \mu$ y menor de $0{,}4\ \mu$ que existen en el espectro.

LONGITUD DE LOS ESPECTROS INFRA-ROJO Y ULTRA-VIOLETA

¿Hasta dónde se extienden estas radiaciones infra-rojas y ultra-violetas? No se puede contestar categóricamente á esta pregunta, porque, á medida que se van perfeccionando los métodos de investigación, se van encontrando y midiendo nuevas radiaciones, tanto en una como en otra zona. Sólo podemos decir que, hasta ahora, se han estudiado y se han podido medir las radiaciones comprendidas entre las cifras $\lambda = 300\ \mu$ y $\lambda = 0{,}1\ \mu$, las cuales nos dan los valores siguientes para las tres zonas del espectro:

Zona infra-roja...	Desde	$\lambda = 300\ \mu$	hasta	$\lambda = 0{,}8\ \mu$
Idem visible.....	—	$\lambda = 0{,}8\ \mu$	—	$\lambda = 0{,}4\ \mu$
Idem ultra-violeta.	—	$\lambda = 0{,}4\ \mu$	—	$\lambda = 0{,}1\ \mu$

Esto sentado, prescindiremos de aquí en adelante de las radiaciones visibles é infra-rojas, y nos limitaremos al estudio de las ultra-violetas, cuya zona queda definida y actualmente limitada diciendo que es *el grupo de radiaciones comprendidas entre 0,4 μ y 0,1 μ de longitud de onda.*

(*) En microscopía suele emplearse también como unidad de medida la *milésima de micra*, ó millonésima de milímetro, que se escribe $\mu\mu$.

HISTORIA

Parece ser que el descubrimiento de estas radiaciones invisibles data de 1777, época en que el químico Scheele observó el efecto de ennegrecimiento que producían en las sales de plata los rayos extremos del espectro solar visible, y la zona obscura que inmediatamente seguía á aquél.

En 1801 el físico Wollaston, valiéndose también de las sales de plata, midió las diferencias de energía química de las distintas zonas del espectro, y comprobó que el fenómeno de descomposición se extendía bastante más allá del extremo violeta.

En 1842 E. Becquerell consiguió fotografiar, por primera vez, parte de la zona ultra-violeta, y poco después, en 1852, Stockes, también por medio de la fotografía, observó que dicha zona se extendía más en el espectro del arco eléctrico que en el solar; quedando así demostrada la absorción de la atmósfera terrestre para estas radiaciones. Este mismo físico descubrió también que la luz ultra-violeta pasa fácilmente á través del cristal de roca y difícilmente á través del vidrio. Por último, valiéndose de la fluorescencia que los rayos ultra-violetas producen en ciertas sales, consiguió *verlas directamente* proyectando el espectro sobre un papel impregnado de sulfato de quinina.

El óptico francés Mascart dedicó mucha atención al estudio del espectro invisible, y en sus trabajos de los años 1864 á 1867 consiguió fotografiar y medir la posición de unas 700 rayas de la zona ultra-violeta solar, determinando la longitud de onda exacta de cada una. Operando después con luces artificiales determinó los espectros del zinc, plata, cadmio y otros cuerpos, llegando á medir hasta la radiación de 0,22 μ de longitud de onda en el espectro del cadmio.

Soret aplicó por primera vez el espato-fluor al estudio del espectro invisible, y comprobó que este mineral es más transparente todavía que el cuarzo para estas radiaciones.

Merced á esta propiedad extendió y comprobó los resultados de Mascart, fotografió muchas rayas, y comprobó la obsorción del aire para las radiaciones de onda muy corta.

Recientemente, Cornu, Schuman, Lyman y otros, trabajando en el vacío, y valiéndose también de prismas y lentes de fluorina, han llegado á estudiar en el espectro del aluminio y del hidrógeno las radiaciones de 0,125 μ y 0,103 μ de longitud de onda, que marcan el límite inferior á que se ha llegado hasta ahora.

Por último, la aplicación de la luz ultra-violeta á la microscopia la ha realizado prácticamente, á principios del siglo actual, el óptico alemán Dr. Augusto Kohler, si bien aprovechando trabajos anteriores de C. Abbe y S. Kzapski, como veremos al hacer la historia de dicha aplicación.

ABSORCIÓN

La propiedad más característica de las radiaciones ultravioletas es la facilidad con que son absorbidas por los medios que atraviesan. Pocos, muy pocos de éstos hay que sean transparentes á ellas. Son tan absorbibles, que el espectro solar obtenido en la superficie de la tierra sólo contiene las radiaciones comprendidas entre $\lambda = 0{,}4\,\mu$ y $\lambda = 0{,}3\,\mu$. Todas las demás, que se supone sean muchas, dada la alta temperatura del sol, las absorbe la atmósfera terrestre. Esto se comprueba viendo que si el espectro solar se obtiene en lo alto de una montaña y con un tiempo seco, se acusan en él radiaciones de longitud de onda inferior al límite $\lambda = 0{,}3\,\mu$ que nos da el espectro obtenido al nivel del mar con una atmósfera cargada de humedad. Las impurezas del aire influyen también mucho, en el sentido de acortar la longitud del espectro ultra-violeta solar. Así, en una atmósfera cargada de polvo, dicho espectro se debilita y se acorta sensiblemente.

El aire mismo, con ser bastante transparente á estas ra-

diaciones, no lo es, sin embargo, en absoluto. Operando con espectros artificiales, ricos en radiaciones ultra-violetas, como, por ejemplo, la lámpara de arco de mercurio, y disponiendo las cosas de modo que la luz tan sólo recorra en el aire trayectos de pocos centímetros, se ha llegado á medir radiaciones hasta de $0{,}2\mu$ de longitud de onda. Las inferiores á ésta las absorbe ya el aire, aun con recorridos cortísimos dentro de él, y para estudiarlas ha sido preciso producirlas y transmitirlas en el vacío con todas las dificultades inherentes á este modo de operar. De aquí que la zona comprendida entre $\lambda = 0{,}2\mu$ y $\lambda = 0{,}1\mu$ sea muy poco conocida todavía.

El vidrio, que tan poco absorbe á las radiaciones visibles, es opaco ó casi opaco, en cambio, para las ultra-violetas, y no puede emplearse para su estudio. Como ya hemos visto al exponer la historia de este descubrimiento, el vidrio se ha sustituído por el cristal de roca ó por la fluorina ó espatofluor, que son, hasta ahora, los dos medios más transparentes que se han encontrado para ellas.

Esta facilidad de absorción establece una diferencia radical entre los rayos ultra-violetas y los rayos X y sus derivados, con los cuales se creyó en un tiempo tenían cierta analogía. En efecto; la característica principal de los rayos X es precisamente la facilidad con que atraviesan muchos cuerpos que son opacos á la luz visible, y en cambio, la característica de los ultra-violetas ya hemos visto que es precisamente la propiedad contraria: que casi todos los cuerpos transparentes para la luz visible detienen á la ultra-violeta.

De esta propiedad se ha sacado partido en microscopia y constituye una de las aplicaciones más interesantes de esta luz, sobre todo en lo que se refiere al estudio de tejidos orgánicos, como veremos luego. Por lo mismo interesaría mucho conocer y establecer sobre bases científicas las variaciones de esta absorción en función de las propiedades de que depende, y que son: el espesor del cuerpo absorbente, la composición química del mismo, y sus características ópti-

cas, índice de refracción, poder dispersivo, etc. Sería también importante determinar las variaciones que experimenta la absorción cuando cambia la longitud de onda y para cada medio de transmisión. Exponemos á continuación lo que hasta ahora se sabe de todo esto.

En función del espesor de cuerpo que atraviesa una radiación monocromática de luz ultra-violeta, sigue la misma ley de absorción que las radiaciones monocromáticas visibles. Esta ley es: *La absorción es proporcional al cuadrado del espesor.* Así, pues, dada una radiación monocromática ultra-violeta, si determinamos el valor de su absorción para una lámina de un milímetro de espesor de un cuerpo cualquiera, y llamamos a á este valor, el correspondiente á la absorción de una lámina de dos milímetros de espesor del mismo cuerpo vendrá expresado por a^2, siempre que operemos con la misma radiación en ambos casos, esto es, siempre que la longitud de onda no varíe. Pero al cambiar ésta, por poco que sea; al pasar de una radiación á otra, á veces muy próxima, la absorción varía, y rápidamente en muchos casos. Es frecuente, pues, que cuerpos totalmente opacos para tal longitud de onda ultra-violeta, sean transparentes ó semitransparentes para otra que difiera poco de la anterior, en más ó en menos. Dicho de otro modo, muchos cuerpos transparentes á la luz ultra-violeta no lo son en igual grado para todas las radiaciones de este nombre, sino que presentan una *banda de absorción* más ó menos ancha, que comprende muchas ó pocas radiaciones, pero que no se extiende á la totalidad de la zona ultra-violeta tal y como la definimos antes. A derecha e izquierda de esta banda hay en estos casos algo de transparencia, y á veces mucha. Lo más frecuente es, sin embargo, que para longitudes de onda más cortas que las de la banda de absorción, la transparencia sea mucho menor que para las de onda más larga que las de la banda.

La ley de relación entre la absorción y las propiedades

ópticas del cuerpo no se han determinado todavía, pero hay indicios de su existencia. Por ejemplo, en cuerpos cuyo índice de refracción cambia según su grado de pureza, como sucede, por ejemplo, con la glicerina, se nota que á mayor índice corresponde mayor transparencia; pero esto no basta para sentar una ley de relación entre ambas propiedades, máxime habiendo como hay casos de cuerpos de índice casi igual y que, sin embargo, son muy desigualmente transparentes. Por ejemplo, el cuarzo y el bálsamo de Canadá, cuyos respectivos índices son 1,54 y 1,52, y que son transparente el primero y opaco el segundo. No se conoce, pues, todavía cuál es la propiedad que determina en los cuerpos su mayor ó menor transparencia á estas radiaciones, y es lástima que así sea, porque su conocimiento facilitaría no poco los trabajos de investigación microscópica, y permitiría proceder sobre una base fija y no por tanteos, como se hace ahora.

Procediendo por experimentación directa y especial á cada cuerpo, se ha determinado para algunos de ellos el grado de absorción y la zona de opacidad máxima, ó lo que es lo mismo, la posición de su banda de absorción. Exponemos á continuación los datos recogidos hasta ahora en los cuerpos que más se han estudiado en este sentido. Parte de estos datos se han tomado de diversos autores, especialmente del notable trabajo de M. Daniel Berthelot (*). Algunos de los resultados que se consignan proceden de observaciones hechas en el laboratorio del autor. Nos limitaremos á reseñar los medios que más influyen en los trabajos microscópicos, por ser éstos el objeto principal de esta nota.

Atmósfera terrestre.—Ya hemos dicho que absorbe todas las radiaciones de onda menor de 0,3μ. Ahora bien; entre los componentes atmosféricos debemos descartar al aire, vapor de agua y ácido carbónico, porque los experimentos

(*) «Les rayons ultra violets et leurs applications pratiques.» Memoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingenieurs Civils de France. Diciembre, 1911.

prueban que son transparentes para todas las radiaciones comprendidas entre 0,3 μ y 0,2 μ de longitud de onda. Investigaciones recientes han demostrado que el ozono es el componente atmósferico que origina la absorción. Basta un espesor de $0^{m},10$ de ozono para retener á todo el citado grupo de radiaciones, y esto explica las variaciones bruscas que en muchos casos se han observado, y á veces en el mismo día, cuando se estudia el espectro ultra-violeta solar. Un cambio meteorológico que modifique la proporción de ozono de la atmósfera se traduce en un acortamiento ó alargamiento sensible del espectro.

En los experimentos de laboratorio, con luces artificiales, en los que la capa de aire que atraviesa la luz tiene poco espesor, la proporción de ozono en ese aire no altera sensiblemente los resultados. El aire normal deja pasar, como ya hemos dicho, las radiaciones de 0,2 μ para arriba y se vuelve rápidamente absorbente para las menores de esta cifra, las cuales exigen operar en el vacío para poderlas estudiar. Esto, que vemos consignado en todos los autores, es susceptible, sin embargo, de una observación. En los experimentos que se han hecho en el laboratorio, alumbrando al microscopio con la radiación $\lambda = 0,275\mu$ de la chispa del cadmio, se ha notado una disminución gradual en el brillo de la imagen, sobre todo cuando las observaciones se prolongaban cierto tiempo. Atribuímos esto á que el aire del laboratorio se cargaba de ozono, debido á la chispa eléctrica de alta tensión que salta continuamente durante los experimentos entre los electrodos de cadmio. Indicamos esta observación con toda clase de reservas, porque para poderla afirmar se necesitaría un acopio mayor de datos que el que hasta ahora hemos podido reunir. Lo expuesto podrá servir de guía á otros operadores.

Agua.—También el agua es transparente para las radiaciones de 0,20 μ de longitud de onda para arriba. A partir de esta cifra para abajo, el poder de absorción aumenta tanto,

que basta un espesor de 0,5 milímetros de agua para absorber las radiaciones que siguen inmediatamente á $\lambda = 0{,}20\mu$. Las de $0{,}18\mu$, por ejemplo, quedan detenidas totalmente con dicho espesor de agua.

Glicerina.—Es perfectamente transparente para todas las radiaciones que se transmiten en el aire. Esta transparencia es uniforme para todo dicho grupo de radiaciones, siempre que se opere con glicerina pura. Cuando ésta se mezcla con agua, la transparencia disminuye sensiblemente para todo el grupo, y especialmente para las longitudes de onda próximas al límite inferior de la transparencia en el agua, ó sea para $0{,}20\mu$. La pureza de la glicerina influye, pues, bastante en los resultados, y esto es de cierto interés para el micrógrafo, como veremos al tratar de los métodos especiales de técnica para luz ultra-violeta.

En ninguno de los tres cuerpos que acabamos de citar se ha observado hasta ahora ese cambio en la curva de transparencia, característico de las bandas de absorción. Esta es continua y va disminuyendo paulatinamente de la radiación de onda más larga á la más corta. Pero esto no basta para afirmar en absoluto que la banda de absorción no existe. Pudiera ser que se señalase su existencia dentro del grupo de radiaciones muy cortas, no estudiadas todavía. No es probable, sin embargo, que tal suceda dada la total opacidad del agua y aire, sobre todo para las radiaciones de $\lambda = 0{,}20\ \mu$ para abajo.

Sales de plata.—Su absorción es marcadamente discontinua, presentando dos bandas bastante bien marcadas dentro del espectro ultra-violeta. La primera está comprendida entre la radiación $0{,}4\mu$ y $0{,}33\mu$ de longitud de onda, y la segunda desde la de $0{,}26\mu$ para abajo. Hay, pues, una zona situada entre las radiaciones $\lambda = 0{,}26\ \mu$ y $\lambda = 0{,}33\mu$ en la cual son transparentes las láminas muy tenues de sales de plata. Claro está que se trata de una transparencia relativa, considerablemente menor que la de los medios citados hasta ahora.

Sales de oro.—De los experimentos hechos hasta la fecha en el laboratorio del autor, parece deducirse para ellas una ley de absorción muy semejante á las de las sales de plata.

Cuarzo.—Según datos tomados de varios autores, el cristal de roca deja pasar todas las radiaciones de longitud de onda superior á 0,2μ y aun las de 0,17μ y 0,16μ cuando el espesor de la lámina obsorbente es tan sólo de uno á dos milímetros; pero como los aparatos de experimentación (lentes y prismas) son siempre de espesor bastante mayor de estas cifras, puede decirse que el límite inferior de transparencia para el cristal de roca lo determina la radiación $\lambda = 0{,}20\ \mu$.

Espato fluor.—Es el cuerpo más transparente para las radiaciones ultra-violetas de cuantos se han experimentado hasta ahora. Deja pasar toda la zona conocida hoy día, desde $\lambda = 0{,}4\ \mu$ hasta $\lambda = 0{,}1\ \mu$. Es, pues, el espato fluor el material por excelencia para la construcción de lentes, prismas y demás elementos ópticos que requiere el estudio del espectro invisible. Por desgracia, no se ha conseguido todavía obtener espato fluor fundido, transparente y amorfo, y hay que valerse de los cristales naturales de este mineral, cuyas propiedades ópticas alteran las imágenes que forman los objetivos é introducen en ellas aberraciones. Por esto no se ha podido emplear el espato fluor solo, para construir objetivos de microscopio, y todos los empleados para trabajar con luz ultra-violeta son actualmente de cuarzo fundido y no de espato fluor. Por lo demás, el cuarzo es suficientemente transparente para las radiaciones que hasta ahora se han aplicado al microscopio.

Bálsamo de Canadá y medios semejantes.—Las resinas que se emplean corrientemente en técnica microscópica para montar objetos, como el bálsamo de Canádá, el de Damar, el Estoraque, etc., etc., son todas opacas á la luz ultra-violeta y esto ha sido una dificultad de cierta importancia en dicha técnica; dificultad que se ha vencido parcialmente ape-

lando á la glicerina y á sus mezclas con agua. La ventaja de las resinas estriba en que permiten montar directamente en ellas los objetos deshidratados, como, por ejemplo, los cortes en parafina de tejidos orgánicos, los cuales, para examinarlos con luz ultra-violeta, es preciso volverlos á hidratar después de obtenidos, hasta llevarlos á la glicerina. Sin embargo, el Dr. A. Kohler ha encontrado un medio, *el aceite de vaselina*, que es anhidro y transparente á la luz ultra-violeta, si bien menos que la glicerina y sus mezclas. Este medio puede sustituir hasta cierto punto á las resinas y permite montar los objetos sin hidratarlos; pero su empleo lleva consigo ciertas restricciones, como veremos al tratar de la técnica microscópica para esta luz.

Colores de anilina.—Sería interesantísimo saber con exactitud la ley de absorción de los múltiples colorantes que se emplean en técnica microscópica. Por desgracia, este trabajo apenas está comenzado y lo que se sabe de tal ley es muy poco. De las observaciones hechas en el laboratorio del autor, parece resultar que muchos colores de anilina presentan bandas de absorción en el espectro ultra-violeta y en distintas regiones de él, según la naturaleza del color; pero hasta ahora no hay datos bastantes para poderlo afirmar, y menos todavía para fijar la posición de dichas bandas. Más adelante se detallarán algunos resultados obtenidos con ciertos colorantes.

Gelatina.—La capa de gelatina que, impregnada de sales de plata (gelatino-bromuro), sirve para la emulsión de las placas fotográficas, es transparente á las radiaciones de $\lambda = 0,2\ \mu$ para arriba, y, por consiguiente, las imágenes obtenidas con estas radiaciones se fotografían sin dificultad con placas ordinarias. Pero para las longitudes de onda menores de las citadas, la gelatina es opaca, y ha sido preciso emplear placas fotográficas especiales, sin gelatina, en las que la sal de plata se aplica pura y directamente sobre el vidrio.

PROPIEDADES ABIÓTICAS

Los rayos ultra-violetas son *destructores de la vida*, esto es, nocivos para todos los organismos. Lo son en mayor grado que los rayos *X*, y similares, sobre todo, en los organismos monocelulares (infusorios, bacterias, etc.), sobre los cuales su acción es especialmente enérgica. De esto se ha sacado partido en la industria y en la higiene pública para la esterilización de líquidos, aguas potables, etc. Pero su acción se ejerce también sobre los organismos superiores como el hombre, y su acción prolongada sobre los tejidos produce en éstos alteraciones graves. Efectos atenuados de esta acción sobre la piel, los vemos todos los días en las personas expuestas durante algún tiempo á los rayos solares, sobre todo en países secos. El primer efecto es muy enérgico y llega á veces hasta destruir la piel de la cara y de las manos. Después, si la acción continúa, la piel se cubre de un pigmento obscuro, característico en las personas tostadas por el sol, y cuyo pigmento, por ser opaco á los rayos ultra-violetas, impide su acción ulterior. Se verifica, pues, en este caso uno de tantos fenómenos de auto-defensa tan frecuentes en los organismos.

A medida que disminuye la longitud de onda, aumentan los efectos destructores de las radiaciones. Las contenidas en la luz solar, tal y como ésta llega á la superficie terrestre, rara vez son peligrosas; pero en cambio, las de $\lambda = 0{,}3\ \mu$ y menores lo son siempre y se deben tomar precauciones cuando se trabaja con ellas. Los ojos, sobre todo, deben protegerse siempre, porque las radiaciones dichas obran enérgicamente sobre la retina y en poco tiempo pueden producir enfermedades graves de la vista y hasta la ceguera completa. Por fortuna el vidrio es opaco á ellas y basta, por lo tanto, tener la precaución de usar siempre gafas(aunque sean de vidrios planos) y no mirar nunca directamente al foco productor. En las instalaciones de microscopía, el vidrio de urano, indispensable para observar directamente la imagen,

sirve de pantalla protectora y basta guardar la precaución de no acercar la vista al microscopio cuando se separa de él dicho vidrio.

Esta acción sobre el organismo se ha utilizado con ventaja en microscopía en algunos casos, y en cambio en otros es un inconveniente. Sucede lo primero cuando se trata de fijar los organismos muy movibles, matándolos sin que se alteren sus formas. Sucede lo segundo cuando se examina un tejido orgánico fresco y muy sensible á la luz ultra-violeta, porque ésta produce alteración en él y obliga á trabajar por procedimientos especiales, como veremos luego.

INTENSIDAD QUÍMICA

Otra interesante propiedad de las radiaciones ultra-violetas es su *intensidad química*; término que emplean algunos autores modernos para expresar el curioso fenómeno de provocar, á la temperatura ordinaria, reacciones químicas que en circunstancias normales exigen elevaciones grandes de temperatura para poder verificarse. Esta acción está poco estudiada todavía; pero parece ser que es principalmente *catalítica*, ó sea aceleradora de reacciones. En microscopía no se ha sacado partido de esta propiedad, salvo en lo que se refiere á la impresionabilidad de las placas fotográficas, que, como hemos dicho, son muy sensibles á esta luz.

CLASIFICACIÓN DE LAS RADIACIONES ULTRA-VIOLETAS

Las propiedades que hemos expuesto someramente, permiten dividir en tres grupos el conjunto de radiaciones ultra-violetas hoy conocido. Estos tres grupos son:

Ultra-violeta solar.—Comprende las radiaciones contenidas en la luz del sol tal y como ésta llega á la superficie terrestre después de atravesar la atmósfera y sufrir la absorción de ésta. Se entiende, pues, desde la radiación $\lambda = 0{,}4\ \mu$

la $\lambda = 0{,}3\ \mu$. Sus acciones químicas y fisiológicas difieren poco de las radiaciones extremas violetas del espectro visible, salvo que son un poco más enérgicas. A este grupo se debe la acción esterilizante de los rayos solares y los efectos sobre la piel descritos antes.

Ultra-violeta medio.—Se extiende desde la radiación $\lambda = 0{,}3\ \mu$ á la $\lambda = 0{,}2\ \mu$. Este grupo, como el que le sigue, no puede ya obtenerse descomponiendo la luz solar por medio de un prisma, y es preciso apelar á luces artificiales, ricas en rayos ultra-violetas, como la chispa del Cadmio y del Magnesio, la lámpara de arco de mercurio, etc. No son absorbidas por el aire, á menos que la proporción de ozono que éste contenga sea muy grande. Se pueden, por lo tanto, estudiar sin necesidad de operar en el vacío.

Las radiaciones de este grupo son las que se emplean como esterilizadoras de aguas potables y otros líquidos, porque los efectos tóxicos enérgicos empiezan inmediatamente á partir del límite inferior del ultra-violeta solar. Son también las que se utilizan en microscopía.

Ultra-violeta extremo.—Se extiende desde la radiación $\lambda = 0{,}2\ \mu$ á la $\lambda = 0{,}1\ \mu$, si bien, como ya hemos dicho, las de $0{,}15\ \mu$ á $0{,}1\ \mu$ de longitud de onda son apenas conocidas todavía, debido á las grandes dificultades que su estudio ofrece. El aire absorbe á casi todas las radiaciones de este grupo, apenas si deja pasar las inmediatamente próximas á $\lambda = 0{,}2\mu$. El cristal de roca es también opaco ó casi opaco para ellas, y es preciso, por lo tanto, operar en el vacío y valerse de prismas de espato fluor. Sus acciones fisiológicas y químicas, sobre todo estas últimas, son más enérgicas aún que las de la zona precedente, siendo esto en realidad lo único que hasta ahora se ha comprobado en ellas.

(Continuará).

PROGRAMA DE PREMIOS

PARA EL CONCURSO DEL AÑO 1914

Artículo 1.° La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.° *"Deducción matemática de las modificaciones imprescindibles en los teoremas y fórmulas principales de la Mecánica general, racional ó teórica, á consecuencia del cambio ó cambios esenciales que, por causas ó hechos perfectamente comprobados, puedan tener alguna ó algunas de las leyes fundamentales de aquella Ciencia.,,*

"Transcendencia de tales modificaciones á las ciencias que tienen su apoyo en ella y principalmente á la Astronomía.,,

Márquense con toda precisión el cambio ó cambios dichos y las obras de reconocido mérito en que estén perfectamente demostrados, pudiendo hacerse sobre el particular las observaciones que se juzguen pertinentes.

Ejecútense con minucioso detalle los cálculos exigidos para la modificación de las fórmulas mecánicas y sus aplicaciones.

El trabajo estará redactado en estilo claro, pero conciso y con la corrección necesaria para ser desde luego publicado.

2.° *"Estudio ultramicroscópico de los compuestos albuminoideos.,,*

3.° *"Fauna ictiológica de las costas españolas del Atlántico ó del Mediterráneo.,,*

Art. 2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mención honorífica.*

Art. 3.° El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación, una medalla de oro de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiere merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1.500 pesetas; impresión,

por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada, y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

Art. 4.º El *premio* se adjudicará á las Memorias que no sólo se distingan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias y redacción bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicación.

Art. 5.º El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio y adjudicados del mismo modo, y en la impresión de la Memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

Art. 6.º El *accesit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas y que versen sobre los mismos temas, ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporación, á las impuestas para la adjudicación ú obtención del premio.

Art. 7.º La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accesit,* que se entregará también en sesión pública al autor ó concurrente agraciado ó á persona que le represente.

Art. 8.º La *mención honorífica* se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algún concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicación, por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accesit.*

Art. 9.º El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid,* y cerrado en 31 de Diciembre de 1914 á las diez y siete horas; plazo hasta el cual se recibirán en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, cuantas Memorias se presenten.

Art. 10.º Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó extranjeras, excepto los individuos numerarios de esta Corporación.

Art. 11.º Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín.

Art 12.º Las Memorias que se presenten optando al premio se

entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

Art. 13.º De las Memorias ó pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, á las personas que los presenten y entreguen, un recibo en que consten el lema que los distingue y el número de su presentación.

Art. 14.º Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accesit* se abrirán en la sesión en que se acuerde ó decida otorgar á sus autores una ú otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

Art. 15.º Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mención honorífica* no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas, y, en el improrrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen, y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distinción que legítimamente les corresponde.

Art. 16.º Los pliegos que tengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accesit,* ni con *mención honorífica,* se quemarán en la misma sesión en que la falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiere declarado. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mención honorífica* cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubieren concedido permiso para abrirlos.

Art. 17.º Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que,

por acuerdo especial de la Corporación, podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado, como modelos de construcción, atlas ó dibujos complicados de reproducción difícil, colecciones de objetos naturales, etcétera. Presentando en Secreraría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las Memorias que respectivamente les correspondan.

Madrid 31 de Diciembre de 1912.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXI. — Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia quinta 461

XXII. — Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkoswki (continuación), por *B. Cabrera* 490

XXIII. — Geometría Analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades (continuación), por *Modesto Dominguez Hervella* 509

XXIV. — La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopia, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912, por *Domingo de Orueta* 530

Programa de premios para el Concurso del año 1914 545

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NUMERO 8.
FEBRERO DE 1913.

Smithsonian Institution
FEB 7 1928
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1913

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXV.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia sexta.

SEÑORES:

Hemos demostrado la ecuación general de Lagrange, ó mejor dijéramos el sistema de ecuaciones comprendido bajo este nombre, y que en rigor son las ecuaciones generales de la Mecánica.

Y las hemos demostrado en esta serie de conferencias por vez segunda y por un método directo, que es el que, generalmente, emplean los autores.

Y digo por segunda vez, porque en el primer curso ya demostramos estas mismas fórmulas, como consecuencia del principio de Hamilton.

Entonces y ahora, hemos llegado á idénticas expresiones analíticas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1, 2 \ldots\ldots k) \quad (1)$$

Expresión que en rigor comprende k expresiones análogas que pudieran formar el siguiente cuadro:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k.$$

Sabemos, además, que el segundo miembro Q_i tiene esta forma:

$$Q_i=\Sigma_1^N\left(X_n\frac{\partial\alpha_n}{\partial q_i}+Y_n\frac{\partial\beta_n}{\partial q_i}+Z_n\frac{\partial\gamma_n}{\partial q_i}\right)\ldots\ldots(i=l,2\ldots\ldots k)\quad(2)$$

Y es claro que en vez de α_n, β_n, γ_n, pudiéramos poner x_n, y_n, z_n, porque las α, β, γ, son las funciones que determinan según los enlaces los valores de x, y, z: sería cuestión de notaciones, que son más ó menos cómodas unas ú otras, según los casos.

Por último, precisamente estos enlaces están expresados por el sistema de igualdades

$$\left.\begin{array}{l} x_n=\alpha_n(q_1,q_2\ldots q_i\ldots q_k,t)\\ y_n=\beta_n(q_1,q_2\ldots q_i\ldots q_k,t)\quad\ldots\ldots(n=1,2\ldots\ldots N)\\ z_n=\gamma_n(q_1,q_2\ldots q_i\ldots q_k,t)\end{array}\right\}(3)$$

Conjunto que comprende, como hemos dicho, $3N$ ecuaciones; á saber, tantas como son las coordenadas de los puntos del sistema material cuyos movimientos estudiamos.

Aunque todo esto lo hemos explicado en la conferencia precedente con minuciosidad, que pudiera parecer excesiva, como en el desarrollo de los cálculos, y en su materialismo,

acaso el alumno pierda de vista la idea fundamental, todavía vamos á sintetizar, con toda la brevedad posible, algo de lo que llevamos expuesto sobre los ecuaciones de Lagrange.

*
* *

Empezamos el estudio de dicha ecuación con un arranque de *soberbia*, si vale la palabra, no nuestra, pero que adivinábamos ó creíamos adivinar en los grandes matemáticos del pasado siglo, ante el triunfo que representaban las ecuaciones del admirable matemático; y decíamos:

Puesto que todos los fenómenos del Universo, en el orden inorgánico, son (ó se creía que eran) *materia*, *fuerza* y *movimiento*, todos serán fenómenos de Mecánica; y si la Mecánica está comprendida, por esfuerzo sublime del genio humano, en las ecuaciones de Lagrange, estas ecuaciones comprenden y explican todas las evoluciones del *Cosmos* y todas sus agitaciones internas; dejando aparte (algunos decían *por el pronto*) los fenómenos que á la vida se refieren.

Así empezamos; pero luego fué preciso ir acortando los vuelos.

En primer lugar, se niega que la hipótesis mecánica sea universal, y se reduce, por consiguiente, la aplicación de la Mecánica á esfera más modesta de aquella que, al principio, intentaba invadir.

Es decir, que las ecuaciones de Lagrange, como ecuaciones generales de la Mecánica, pudiera suceder que no fueran susceptibles de aplicación á cierto orden de fenómenos. Sólo se aplicarán, pues, y sólo podrán ser útiles, cuando puedan aplicarse.

Esta es una primera reserva de sentido común, y viene ahora otra segunda.

El punto de partida para demostrar las ecuaciones de Lagrange (1) era la aplicación del principio de las velocidades

virtuales. Pero este principio tiene también sus limitaciones. Por ejemplo, no se aplica á los sistemas en que hay rozamientos; tiene que modificarse, por lo menos, cuando los enlaces están expresados por desigualdades ó en general por enlaces *uni-laterales*; por ejemplo, que un punto deba quedar sobre una superficie cuando las fuerzas le oprimen contra ella, pero que pueda separarse en sentido contrario.

Y decíamos: Esta palabra *enlaces* es tan vaga, tan general, que la imaginación no puede tener la seguridad de abarcar el número infinito de clases geométricas, ó analíticas, ó físicas, que bajo la denominación general de *enlaces* puedan comprenderse.

Así como antes afirmábamos, que para aplicar á un fenómeno las ecuaciones de Lagrange, era preciso que la hipótesis mecánica fuese legítima, ahora diremos que no será legítima la aplicación de la fórmula (1) en el caso ó para el fenómeno de que se trata, si el principio de las velocidades virtuales no fuera aplicable.

Y aquí acaba la segunda reserva que debemos hacer, y empieza la tercera.

Para obtener la ecuación (1) hemos aplicado el principio de D'Alembert. Pero el principio de D'Alembert es un principio de la Mecánica racional clásica; supone el empleo de las *fuerzas de inercia*, y no es evidente, y hoy casi nos atreveríamos á decir que no es cierto, que la inercia en los sistemas eléctricos y magnéticos, inercia que, al fin y al cabo, se traduce por fenómenos de inducción; no es evidente, repetimos, que la expresión de las fuerzas de inercia en la electridad y en el magnetismo tenga la misma forma que la de las masas ponderables en la Mecánica clásica. Esto no puede aceptarse sino como aproximación en ciertos casos.

En apoyo de lo que acabamos de decir, está toda la *teoría dinámica del electrón*.

Y tal es la tercera reserva que debíamos formular.

Por último, haremos constar antes de pasar adelante, que

hemos supuesto y seguiremos suponiendo, mientras no advirtamos lo contrario, que siempre consideraremos expresados los enlaces *por igualdades*, según hemos escrito en las fórmulas (3).

Con todas estas reservas y todas estas aclaraciones, que consignamos, probablemente por última vez, al menos por ahora, sigamos estudiando la ecuación, ó si se quiere, las ecuaciones de Lagrange.

*
* *

Si son estas ecuaciones aplicables á un problema, es decir, á un fenómeno del mundo físico, el problema *estará resuelto.*

Pero aún vamos demasiado lejos; con más exactitud y con más modestia debiéramos decir: el problema *estará planteado.*

O bien pudiéramos afirmar que el problema, como problema de Física Matemática estaba resuelto, y que sólo faltaba que el matemático supiera resolver las ecuaciones (1).

En casi todos los problemas de la Física Matemática sucede otro tanto.

Cuando la ciencia físico-matemática ha expresado un fenómeno de la Naturaleza por medio de un sistema de ecuaciones, que casi siempre son ecuaciones diferenciales, da su misión por terminada, y ya corre á cargo del matemático la integración de dichas ecuaciones.

Por eso se ha dicho, que gran número de los problemas de las Matemáticas puras han sido sugeridos por la Física. Es decir, por fenómenos del mundo inorgánico. Mas este punto ya lo hemos discutido en otra ocasión.

Por ahora sigamos estudiando, ó mejor dicho, empecemos á estudiar la ecuación de Lagrange, que es ya estudio puramente matemático.

Sea, pues, la ecuación sintética

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q'_i}=Q_i \qquad i=(1,2\ldots k) \qquad (1)$$

y si esta ecuación, ó mejor dicho, este sistema de ecuaciones expresan un problema de Mecánica, claro es que suponemos verificadas todas las condiciones necesarias para que el sistema (1) sea aplicable al problema en cuestión.

Suponemos, pues, que para este caso es legítima la hipótesis mecánica; admitimos que es también legítima la aplicación del principio de las velocidades virtuales; afirmamos, explícitamente, que los enlaces están expresados por ecuaciones finitas del tipo (3); es decir, que se trata de un sistema *holonomo*, que este es el nombre empleado para este caso por el célebre físico Hertz.

Mis alumnos pueden completar estas nociones en la obra de Mr. Appell en que se estudian casos más generales.

Por último, damos por cierto que es aplicable al problema de que se trata el teorema de D'Alembert, partiendo del concepto general de la Mecánica clásica sobre las *fuerzas de inercia*.

Y admitiendo todas estas restricciones y admitiendo que la ecuación (1) sea aplicable al problema en cuestión, expliquemos una vez más la significación de todos los elementos que entran en las ecuaciones de Lagrange y el modo práctico de aplicarlas.

En primer lugar, y esto es muy importante para comprender el sentido de las operaciones, que cada ecuación (1) expresa, obsérvese, que distinguimos cuidadosamente dos *signos de diferenciación*, que designamos por la *d*, y la ∂, respectivamente. Es decir; la *d recta* y la ∂ *redonda*.

Esta última ∂, representa *diferenciaciones parciales*; la *d*, representa *diferenciaciones totales*.

Y dispénsenme que entre en estas minuciosidades, que

pueden, sin embargo, evitar confusiones al principiante.

Ya hemos dicho algo sobre tal sistema de notaciones en otra ocasión; mas ahora vamos á completar aquellas ideas, verdaderamente elementales.

Pongamos un ejemplo.

Supongamos que se tiene la expresión arbitraria

$$A = 3a^4b - abc + 2b^3 - c^3$$

y que, en el problema de que se trate, tenemos que estudiar esta fórmula

$$B = 12a^3b - bc.$$

Suponemos que a, b, c son cantidades variables; pero no decimos si son independientes entre sí, ó si son unas funciones de otras, ó si son funciones de nuevas variables: por ejemplo, funciones del tiempo.

Mas para abreviar los cálculos, que hubieramos de emplear, ó para simplificar el enunciado de los teoremas á que lleguemos, observamos que B se puede poner bajo una forma más sencilla.

Observamos, digo, que si en la expresión A se considerasen a, b, c como variables independientes, y se admitiera que sólo a variaba, la expresión B podía resultar de diferenciar el segundo miembro de A, sólo con relación á a, considerando á b y c como constantes.

De modo que pudiéramos escribir

$$B = \frac{\partial A}{\partial a}$$

porque, en efecto, si se diferencia

$$3a^4b - abc + 2b^3 - c^2$$

por relación á la variable a, resulta

$$12a^3\,b - bc$$

que es precisamente B.

Es un modo de derivar B de A por una operación determinada. Es un modo de expresar B en forma más sencilla. Es hasta, si se quiere, un método nemotécnico, en que nada se prejuzga respecto al fondo del problema, y en que sólo se dice: *Si se diferenciase* A *únicamente con relación á* a, *se obtendría* B.

Pues todo esto se expresa empleando la ∂:

$$B = \frac{\partial A}{\partial a}.$$

En suma: es el símbolo de una operación determinada; es como si tuviéramos

$$A = a^4$$
$$B = a^2$$

y expresáramos B de este modo:

$$B = \sqrt{A}.$$

Por el contrario, si dijéramos: en el valor de A la a y la b no son independientes, por ejemplo, se tiene $b = a^2$; y si agregáramos: vamos á diferenciar A con relación á *a totalmente*, ya no nos serviría la fórmula anterior, tendríamos que desarrollar el cálculo de este modo:

$$\frac{dA}{da} = 12a^3b + 3a^4\frac{db}{da} - bc - ac\frac{db}{da} + 6b^2\frac{db}{da}$$

y poniendo en vez de $\frac{db}{da}$ su valor deducido de $b = a^2$,

es decir:

$$\frac{db}{da} = 2a$$

resultaría

$$\frac{dA}{da} = 12a^3b + 3a^4.2a - bc - 2a^2c + 6b^2.2a$$

expresión completamente distinta de

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 12a^3b - bc.$$

Apliquemos estas sencillísimas ideas á la explicación de las notaciones del sistema (1).

El primer término de una cualquiera de las k ecuaciones que comprende el sistema es éste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)$$

en que aparecen los dos signos de diferenciación d y ∂.

Para comprender la aplicación de ambos signos, es preciso recordar lo que T significa.

T significa siempre en estas ecuaciones la semifuerza viva total del sistema ó, mejor dicho, la semifuerza viva en un instante cualquiera del tiempo, es decir, para cualquier valor de t.

Esta semifuerza viva será, para uno de los puntos, el de masa m_n

$$\frac{1}{2} m_n (x'^2_n + y'^2_n + z'^2_n),$$

representando x'_n, y'_n, z'_n, las componentes de la velocidad; porque, en efecto, en este caso el paréntesis represen-

tará el cuadrado de la velocidad de la masa m_n que suponemos reconcenrada en un punto.

La semifuerza viva total del sistema será, como se sabe, la suma de todas las semifuerzas vivas parciales; de modo que tendremos en todos los casos y para todos los problemas, á que esta teoría que vamos exponiendo, sea aplicable

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_1^N m_n (x'^2_n + y'^2_n + z'^2_n).$$

Claro es que esta cantidad no es conocida, porque como al llegar á este punto *no se ha resuelto todavía el problema* de que se trata, no podemos conocer en función del tiempo, ni la velocidad de cada punto, ni sus componentes, es decir, que no conoceremos

$$x'_n = \frac{dx_n}{dt}, y'_n = \frac{dy_n}{dt}, z'_n = \frac{dz_n}{dt};$$

pero sabemos que se expresa en función de estas tres componentes de cada punto, como indica la fórmula anterior.

Ahora bien: todas las x', y', z' se refieren á las coordenadas x, y, z, es decir, que son, prescindiendo del subíndice,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \; y' = \frac{dy}{dt}, \; z' = \frac{dz}{dt}$$

y empleamos d y no ∂, porque si bien aquí no cabe confusión, estas derivadas son, no diremos totales, pero sí *defitivas*, puesto x, y, z, una vez resuelto el problema, son funfunciones de t.

Pero hemos sustituído á las variables primitivas x, y, z, que están sujetas á enlaces, y que, por lo tanto, no son todas ellas independientes unas de otras, las verdaderas variables independientes, ó sea el número mínimo que hemos

designado por $q_1, q_2 \dots q_k$, y que corresponden á otros tantos grados de libertad.

Luego estas derivadas x', y', z' que entran en T, *es preciso eliminarlas en función de las* q, *y de sus derivadas.*

Esto hicimos al demostrar las ecuaciones de Lagrange y ahora lo recordamos para marcar la marcha, que ha de seguirse en cada problema.

Si el sistema es *holonomo*, es decir, si las x, y, z, están expresadas por ecuaciones en términos finitos, como indican las (3), diferenciando con relación al tiempo, obtendremos las derivadas de x, y, z en función de las derivadas de q con relación al tiempo unas y otras; y empleando para todas ellas la notación más breve x', y', z', q' tendremos

$$x'_n = \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} q'_i + \dots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}$$

$$y'_n = \frac{\partial \beta_n}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} q'_i + \dots + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \beta_n}{\partial t}$$

$$z'_n = \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} q'_i + \dots + \frac{\partial \gamma_u}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \gamma_n}{\partial t}$$

En todos los coeficientes del segundo miembro hemos empleado el signo de diferenciación ∂ porque, según las reglas del cálculo, todas estas derivadas son derivadas parciales con relación á una de las q, suponiendo todas las demás variables independientes q, constantes para dicha diferenciación.

Obsevaremos, además, que estos coeficientes son desde luego funciones de q y de t. De modo que, en rigor representándolas por una sola letra, por ejemplo, f, los valores de x, y, z, serían de esta forma; y no escribimos más que el de x'_n, porque los de y'_n y z'_n serían análogos:

$$x'_n = f_1(q_1 \dots q_k, t)\, q'_1 + f_2(q_1 \dots q_k, t)\, q'_2 + \dots + f_i(q_1 \dots q_k, t)\, q'_i$$
$$+ \dots + f_2(q_2 \dots q_k, t)\, q'_k + \frac{\partial \alpha_n}{\partial t};$$

donde se ve claramente, que los valores de x'_n, y'_n, z'_n son *todos ellos lineales* respecto á q'_1, q'_2 ... q'_k. Contienen las q en los coeficientes y además t, pero con otro orden de complicación analítica.

Las x'_n, y'_n, z'_n, son, pues, lineales en q'; pero no son *homogéneas* porque además de los términos lineales contienen el término final $\frac{\partial \alpha_n}{\partial t}$ que también es función de q_1, q_2 ... q_k, t, como todos los anteriores.

Si en los enlaces no entrase el tiempo, este último término no existiría, pues no entraría explícitamente t, y entonces *podríamos decir* que x'_n, y'_n, z'_n, *eran lineales y homogéneos* en q'_1, q'_2... q'_k.

Comprendido esto, sustituyamos, como hemos dicho, en el valor de T todos los valores de x', y', z', en función de q y q', y resultará:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_1^N \left[m_n \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \right)^2 \right.$$
$$+ m_n \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial \beta_n}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \beta_n}{\partial t} \right)^2$$
$$\left. + m_n \left(\frac{\partial \gamma_n}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right)^2 \right]$$

Claro es que en T, y cuando se desarrolle Σ, habrá tantos grupos análogos al que hemos escrito como puntos contiene el sistema desde 1 á N.

Cada paréntesis elevado al cuadrado, cuando estos cuadrados se desarrollen, dará términos de diferentes clases.

Unos contendrán los cuadrados de q'_1, q'_2... q'_k.

Otros los dobles productos de $q'_1 . q'_2 . q'_1 . q'_3$ ..

Otros los dobles productos lineales de q'_1, q'_2..., que resultarán de multiplicar los primeros términos por el término final en cada cuadrado.

Y, por último, el cuadrado del último término

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \text{ en } x'^2{}_n, \text{ el de } \frac{\partial \beta_n}{\partial t} \text{ en } y'^2{}_n, \text{ y el de } \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \text{ en } z'^2{}_n.$$

En suma, T será un polinomio de segundo grado en $q'_1, q'_2 \ldots q'_k$, pero en general no será homogéneo, porque contendrá primeras potencias de q' y un término independiente.

Claro es que si los enlaces fueran independientes de t, ni entraría el término independiente, ni las primeras potencias de las q', y entonces T sería *una función homogénea de segundo grado* en $q'_1, q'_2 \ldots q'_k$, en que los coeficientes serían funciones de $q_1, q_2 \ldots q_k$ distintas para cada clase de problemas.

De todas maneras vemos que nuestro objeto se ha conseguido, porque ya T no depende de las x', y', z', sino únicamente de las q y de sus derivadas con relación al tiempo, es decir, de $\frac{dq}{dt} = q'$.

Podemos, pues, decir que T es de esta forma

$$T = T(q_1, q_2 \ldots q_i \ldots q_k, q'_1, q'_2 \ldots q'_i \ldots q'_n, t)$$

y que esta función es de segundo grado en $q'_1, q'_2 \ldots q'_i \ldots q'_k$

Respecto á las q y á t nada decimos; los coeficientes de las anteriores q' y el término relativo á t serán lo que fuere, según sea cada problema, y en general serán complicados.

Pero algo es, para simplificar las soluciones, que las derivadas de las q con relación al tiempo, no pasen de la segunda potencia.

Expresando, pues, en el término que vamos considerando, que es el primero, lo que representa T, y abreviando las notaciones, tendremos

$$\frac{dt}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(q_1 \ldots q_k, q'_1 \ldots q'_i \ldots q'_k, t)}{\partial q'_i}\right).$$

Dos operaciones se indican para este término, y ambas son diferenciaciones, pero con símbolo distinto.

La primera es

$$\frac{\partial T(q_1 \dots q'_k, q'_1 \dots q'_i \dots q'_k, t)}{\partial q'_i}$$

y expresa una diferenciación parcial; por eso se escribe con ∂.

Es decir, que en la expresión de T hay que considerar á todas las cantidades como constantes menos á q'_i.

Y como habíamos dicho, que era un polinomio de *segundo grado en las* q', es claro que después de la diferenciación resultará una *expresión lineal en* q'; y si no entrase la t, una expresión lineal y homogénea también en las q'.

Esto es evidente, porque en esta hipótesis, con q'_i no aparecerán más que dos clases de términos

$$\dots\dots + Aq'_j q'_i + \dots\dots + Bq'^2_i + \dots\dots$$

y diferenciando con relación á q'_i quedará

$$\dots\dots + Aq'_j + \dots\dots + 2Bq'_i + \dots\dots$$

De los coeficientes A, B..., nada hay que decir, porque como no contienen más que las q, y éstas se consideran como constantes para la diferenciación actual, A, B... serán constantes también al diferenciar respecto á q'_i.

Si expresamos, para abreviar, por G el resultado de esta primera diferenciación y observamos que en G no podrán entrar, según acabamos de ver, más que las q y las q', tendremos que el término de que se trata se reducirá á lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = \frac{dG_i(q_1 \dots q_i \dots q_k, q'_1 \dots q'_i \dots q'_k, t)}{dt}$$

Esta última diferenciación ya *no es una diferenciación parcial,* es una diferenciación total con relación á t, y según la diferenciación de funciones compuestas, habrá que diferenciar, con relación á las q y á las q', cantidades todavía desconocidas, pero funciones de t; y además habrá que diferenciar con relación á esta variable t si entraba en T y ahora entra en G.

De suerte que el término que estamos considerando toma esta forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)=\frac{\partial G_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial G_i}{\partial q'_1}\frac{dq'_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial G_i}{\partial t}$$

ó bien

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)=\frac{\partial G_i}{\partial q_1}q'_1+\ldots+\frac{\partial G_i}{\partial q'_1}q''_1+\ldots+\frac{\partial G_i}{\partial t}$$

representando por q'' la derivada segunda de q con relación á t, es decir $q''=\frac{d^2q}{dt^2}$.

Los coeficientes no contienen más que las q y las q'; de suerte que, en último análisis, no entrarán más que las q, q', q'' y, además, la t en general.

Representando, pues, para abreviar, por H_i el resultado, tendremos que este primer miembro de cualquiera de las ecuaciones de Lagrange estará compuesto de este modo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)=H_i\,(q_1\ldots q'_1\ldots q''_1\ldots t)$$

y la ecuación de Lagrange será

$$H_i\,(q_1\ldots q'_1\ldots q''_1,t)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i.$$

Le hemos puesto á H el subíndice i para indicar que es-

tamos tratando de una de las ecuaciones del sistema (1); la que corresponde al índice i y que para cada ecuación del sistema podríamos repetir lo mismo.

Veamos ahora lo que significa el segundo término

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}$$

que también tiene la ∂ como signo de diferenciación; es decir, que aquí también se trata de una *diferencial parcial.*

Respecto á T no hemos de repetir lo que acabamos de explicar; T contiene las q, las q' y, en general, la t. De modo que tendremos

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial T(q_1 \dots q_i \dots q_k, q'_1 \dots q'_k, t)}{\partial q_i}.$$

Para obtener el segundo miembro no hay más que diferenciar T por relación á q_i, suponiendo que todas las demás cantidades, incluyendo á t, son constantes, y resultará una función de forma perfectamente conocida en cada problema, que con tendrá en general las mismas cantidades que T.

Si la representamos, para abreviar, por L_i, tendremos

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = L_i\,(q_1 \dots q_k, q'_1 \dots q'_k, t)$$

y la ecuación i de Lagrange en el sistema (1) tomará, por último, esta forma

$$H_i\,(q_1 \dots q'_1 \dots q''_1, t) - L_i\,(q_1 \dots q_k, q'_1 \dots q'_k, t) = Q_i\,.$$

Sólo nos falta por analizar el segundo miembro Q_i.

Pero recordemos que se tenía

$$Q_i = \Sigma_1^N \left(X_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i} + Y_n \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i} + Z_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i} \right)$$

en que α, β, γ eran las funciones que expresaban los valores de x_n, y_n, z_n. De modo que también podíamos escribir esta fórmula de este modo:

$$Q_i = \Sigma_1^N \left(X_n \frac{\partial x_n}{\partial q_i} + Y_n \frac{\partial y_n}{\partial q_i} + Z_n \frac{\partial z_n}{\partial q_i} \right).$$

Veamos á lo que se reduce la expresión anterior.

Todas las X, Y, Z que contienen los diferentes términos de Σ, es decir, las componentes de las fuerzas que actúan sobre el sistema, estarán en general definidas por funciones de x, y, z, es decir, de las coordenadas de los distintos puntos, por constantes, y en general por el tiempo t.

Esto era lo corriente en la Mecánica clásica, aunque se comprende que puedan existir casos más complicados; por ejemplo: que las fuerzas dependan de las velocidades, como sucede en muchos problemas de la ciencia moderna.

Ateniéndonos á las primeras hipótesis, vemos que X, Y, Z, serán funciones de x, y, z; y como éstas son funciones de las q, en último análisis y en general, X_n, Y_n, Z_n serán funciones de q_1, q_2 ... q_k y del tiempo.

Otro tanto podemos decir de las derivadas

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \beta_n}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i},$$

puesto que las α, β, γ en las ecuaciones de los enlaces dependen de las variables q.

En resumen, podemos decir que

$$Q_i = Q_i\,(q_1, q_2 \ldots q_i \ldots q_k, t)$$

y sabemos, según lo dicho, el modo de formar este término en cada caso.

Su sistema de formación, además, puede expresarse de este modo:

Se determina en cada problema el trabajo virtual de las fuerzas dadas

$$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y, + Z, \delta z, + \ldots + X_N \delta x_N + Y_N \delta y_N + Z_N \delta z_N .$$

Se expresa este trabajo virtual en función de las nuevas variables q, que en rigor es lo que hemos hecho para obtener Q, y como este trabajo virtual tomará la forma

$$Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_i \delta q_i + \ldots + Q_k \delta q_k ,$$

cada valor de Q, en cada ecuación del sistema, por ejemplo, Q_i, en la ecuación i, no será otra cosa que el coeficiente Q_i de δ_i en la expresión anterior.

Así como en los términos precedentes de cualquier ecuación del sistema de Lagrange cabe, según hemos visto, una simplificación importante en algunos casos, que son principalmente aquellos en que los enlaces son independientes del tiempo; puede, además, presentarse otra simplificación de importancia, y aun éste será casi el único caso que consideraremos.

Nos referimos á los problemas en que existe para las fuerzas que actúan sobre el sistema la *función*, que llamábamos en el curso precedente *función de fuerzas* ó, si se quiere, una potencial.

Supongamos que existe y representémosla por U.

En este caso tendremos para todos los valores de n

$$X_n = \frac{\partial U}{\partial x_n}, \; Y_n = \frac{\partial U}{\partial y_n}, \; Z_n = \frac{\partial U}{\partial z_n}$$

y el valor de Q_n se convertirá en el siguiente:

$$Q_n = \Sigma_1^N \left(X_n \frac{\partial x_n}{\partial q_i} + Y_n \frac{\partial y_n}{\partial q_i} + Z_n \frac{\partial z_n}{\partial q_i} \right)$$
$$= \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial g_i} + \frac{\partial U}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial q_i} \right).$$

Pero si la función U depende de todas las x, y, z y éstas, á su vez, de las variables independientes q, es claro que U será función de q_1, $q_2 \ldots q_k$ y la expresión precedente no será otra cosa, según la regla de la diferenciación de funciones compuestas y de funciones de funciones, que la derivada de U con relación á q_i. Es decir, que en este caso tendremos

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

expresando, previamente, U en función de las variables q; de modo que U podrá considerarse como función de éstas y en general de t, aunque nosotros no hemos de considerar este caso por lo ordinario: así,

$$U = U(q_1, q_2 \ldots q_i \ldots q_k, t).$$

Aunque ahora conservamos la letra U, es claro que la forma de la función será distinta, cuando la función de fuerzas está expresada en x, y, z, que cuando está expresada en función de las q.

Si se quisiera evitar confusiones, podríamos decir que la función primitiva de fuerzas para las X, Y, Z era

$$U(x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n \ldots x_N, y_N, z_N, t)$$

y la función de fuerzas para las cantidades q es

$$U_q(q_1, q_2 \ldots q_i \ldots q_k, t).$$

Derivando la primera con relación á x, y, z, se tienen las componentes de las fuerzas X, Y, Z, así

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}, \quad Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1} \ldots\ldots$$

Derivando las segundas con relación á q se tienen las Q_i en función de la nueva U, que llamaremos U_q

$$Q = \frac{\partial U_q}{\partial q_i}.$$

Estas Q_i, que en algún modo, y acudiendo á cierta simetría, puede decirse simbólicamente, que son las fuerzas ficticias en el sistema de variables independientes q, son las que entran en los trabajos virtuales

$$Q_i \, \delta q_i.$$

Y estas Q también resulta que tienen su *función de fuerzas;* ó sea, que todas las Q pueden obtenerse diferenciando, con relación á las q, una función de estas variables independientes, á saber, U_q.

Todavía dentro de estas notaciones, como hemos dicho, hay dos casos que considerar: el caso general, cuando las funciones de fuerza contienen t, ó aquel en que no contienen esta variable.

***

Resulta de lo expuesto, que las ecuaciones de Lagrange, todas y cada una de ellas, pueden escribirse inmediatamente con sólo conocer *dos funciones*. Una, la *semifuerza viva* T del sistema, igual para todas las ecuaciones. Otra, la Q_i que variará de una ecuación á otra. Pero si existe una función de fuerzas para ésta, en el sentido que hemos explicado, las ecuaciones de Lagrange tomarán, sustituyendo á Q_i su expresión, como derivada de la función U_q (ó suprimiendo el subíndice) esta forma, de una sencillez y de una elegancia evidentes:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots k).$$

Y entonces se ve que las ecuaciones de Lagrange no dependen más que de dos funciones capitales T y U, que son las mismas para todas las ecuaciones del sistema; y sólo difieren unas ecuaciones de otras en que las diferenciaciones se refieren á q_1, $q_2 \ldots$ y en general á q_i; pero obsérvese en comprobación, que este subíndice no entra ni en T ni en U.

Para plantear esta clase de problemas basta establecer á *priori* T y U; y en dichos problemas esto siempre puede hacerse, porque T y U dependen de las x, y, z, y estas variables, por las ecuaciones de los enlaces, dependen de las q.

Y, además, ambas funciones T y U tienen una significación mecánica muy característica.

T es la semifuerza viva, que otros llaman la energía cinética (ó cinemática), es decir, *energía del movimiento.*

Y en cambio, U era la función de las fuerzas, ó si se quiere (salvo el signo) la potencial, ó si se quiere introducir siempre la palabra energía, también podrá decirse que U es la *energía potencial.*

Así será legítimo afirmar que en las hipótesis de simplificación que hemos explicado, las ecuaciones de Lagrange dependen tan sólo de la energía cinemática (T) y de la energía potencial (U).

Esta circunstancia ha sido una tentación irresistible para matemáticos y físicos eminentes, que con gran atrevimiento, como hemos dicho otras veces, pero atrevimiento fecundo, han aplicado las ecuaciones de Lagrange á fenómenos ópticos, térmicos, eléctricos y magnéticos, cuando es lo cierto que estas ecuaciones, ni habían sido inventadas ni habían sido demostradas en la Mecánica clásica más que para la materia ordinaria, ó en otros términos, para las masas ponderables.

Pero eran tan naturales, tan sencillas, las ecuaciones de Lagrange, que era difícil resistir á la tentación.

En estas ecuaciones entraba T, es decir, la energía cine-

mática, pues también en la electricidad se habla de energía cinemática.

Entra, en las ecuaciones de que tratamos, U, es decir, la energía potencial, pues también en los sistemas eléctricos se calcula la energía potencial que les es propia.

Entran las variables independientes q, pues se supone que estas variables son en número infinito para determinar los infinitos puntos del sistema eléctrico, y si es preciso se cierra los ojos para no definir la naturaleza de los enlaces, y en caso de apuro se dice que son enlaces ocultos y desconocidos.

Con lo cual la aplicación de las ecuaciones de Lagrange dan casi siempre resultado satisfactorio.

Ejemplo notabilísimo, entre otros, es la teoría de la inducción de Maxwell; atrevimiento admirable, como antes decíamos, del admirable físico, coronado por el éxito.

En su día estudiaremos, á ser posible, estos problemas.

Hemos citado á Maxwell, hemos citado á Poincaré; citemos también un trabajo de Mr. Carvallo, trabajo notabilísimo y que tiene la misma orientación.

Esperemos, ya que la esperanza nunca se pierda, que todavía podremos estudiar en otros cursos estas diversas materias.

Precisamente ésta es una de las razones por las que hemos de dedicar en este curso lugar preferente á las célebres ecuaciones del gran matemático.

Hemos dicho que las ecuaciones de Lagrange dependen de T; pero no siempre es así. Para que esto se verifique es necesario, como hemos visto, que se cumplan ciertas condiciones.

Por ejemplo, si las ecuaciones de los enlaces no fueran *holonomas* y estuvieran representadas directamente por relaciones lineales entre las velocidades virtuales de las ordenadas, el problema se complicaría, y en vez de expresarse la fuerza viva en funciones cuadráticas, es decir, de segundo

grado de las q', aparecerían las segundas derivadas q'', y habría que introducir en vez de T otra función S.

Mas estos son casos y generalizaciones en que no podemos detenernos, y que todavía no tienen una aplicación corriente en los problemas de Física matemática.

Remitimos, pues, á nuestros lectores, discípulos y oyentes á la grande obra de Mr. Appell sobre Mecánica (3.ª edición), sin perjuicio de los trabajos y Memorias especiales de los que encontrarán en aquella obra una bibliografía muy completa.

Limitémonos, pues, en esta exposición elemental, á las ecuaciones de Lagrange, según las hemos obtenido, y que sustituyendo á los tres términos que contiene cada ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

las expresiones que hemos hallado, y que represetan la naturaleza de cada uno de dichos términos, se podrá escribir, como hemos visto, de este modo:

$$H_i\,(q_1 \dots q'_1 \dots q''_1 \dots t) + L_i\,(q_1 \dots q'_1 \dots t) = Q_i\,(q_1 \dots t).$$

ó reuniendo bajo un solo símbolo de función, que designaremos por M, los tres términos

$$M_i\,(q_1 \dots q'_1 \dots q''_1, t) = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots k).$$

En resumen: las ecuaciones generales de Lagrange, desarrolladas para cada caso particular, son, como acabamos de ver, *ecuaciones diferenciales, simultáneas, de segundo orden*, porque no ha de olvidarse que q' y q'' son las derivadas

$$\frac{dq}{dt}, \frac{d^2q}{dt^2}.$$

De suerte que, en rigor, tendremos k ecuaciones de esta forma:

$$M_i\left(q_1 \ldots \frac{dq_1}{dt} \ldots \frac{d^2 q_1}{dt^2}, t\right) = 0 \ldots\ldots (i = 1, 2 \ldots k)$$

que son, como decimos, ecuaciones *diferenciales simultáneas de las funciones* desconocidas q_1; $q_2 \ldots q_k$, y de la variable independiente única t.

Claro es que M es aquí un símbolo general; pero en estos problemas de Mecánica estas funciones M tienen una *forma particular*, precisamente la que resulta de aplicar á cada problema la forma especialísima

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i .$$

Terminemos esta conferencia con una observación.

Hemos supuesto siempre que q_1, q_2, q_3 ... eran las variables que determinaban, con arreglo á ciertos enlaces, la posición de los diferentes puntos del sistema.

En rigor, y deteniéndonos en la ecuación de las velocidades virtuales, aun podríamos suponer, que entre las q existen ciertos enlaces y determinar la solución del problema como hace Mr. Appell en su obra ya citada, de Mecánica, por el método de los multiplicadores.

Pero tampoco en este punto podemos detenernos.

Nosotros supondremos siempre tres condiciones fundamentales:

1.ª Que los enlaces están expresados por ecuaciones finitas, es decir, que son *holonomas* en el sentido que hemos explicado.

2.ª Que las variables q_1, $q_2 \ldots q_k$ están reducidas á un *número mínimo*. Son, pues, independientes entre sí.

3.ª Que las fuerzas X, Y, Z tienen una potencial, ó sea

una función de fuerzas; de modo que las ecuaciones de Lagrange tendrán esta forma definitiva:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial U_q}{\partial q_i} \quad (i=1,2\ldots k).$$

Son, pues, k ecuaciones diferenciales de segundo orden y de *forma especial:* la que resulta de las operaciones indicadas, entre las funciones desconocidas q_1, q_2 ... q_k y el tiempo t como variable independiente.

Son, lo repetimos una vez más, ecuaciones *diferenciales simultáneas*, entre k funciones q y una variable independiente t.

Generalmente agregaremos á estas tres condiciones la de que T y U_q ó sencillamente (3) son independientes de t.

Bajo la forma indicada se ve. que las ecuaciones de Lagrange dependen de dos funciones *únicas* y *las mismas* para todas las ecuaciones: á saber, T, ó sea la semifuerza viva del sistema ó energía cinemática y la energía potencial U_q (recuérdese que ponemos el subíndice q para distinguir esta potencial con relación á las q de la potencial con relación á las x, y, z).

Y este es, precisamente, el carácter de las ecuaciones de Lagrange, que se *han de efectuar en todas ellas sobre T y Q, operaciones de la misma naturaleza*, variando sólo la q_i á la cual se refieren estas derivaciones.

En la conferencia próxima todavía insistiremos sobre algunas consideraciones generales relativas á estas ecuaciones de la Mecánica.

XXVI.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

Por José Echegaray.

Conferencia séptima.

Señores:

Hemos demostrado, que las ecuaciones de Langrage, aplicables á casi todos los problemas de la Mecánica clásica, constituían el siguiente sistema,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2 \ldots k)$$

que haciendo variar el índice i desde 1 hasta k se resuelve en k ecuaciones diferenciales, una por cada valor de i, y que contiene k funciones; á saber: q_1, q_2..... q_k, todas ellas funciones de la variable independiente t, que es el tiempo.

En estas ecuaciones la T es siempre la misma, representa la semifuerza viva del sistema y es una función, que puede conocerse inmediatamente en cada caso, de las variables q y q', por medio de las ecuaciones de los enlaces.

Respecto á Q_i, explicamos cómo puede obtenerse en cada problema particular; y q_1, q_2..... q_k expresan el mínimum de variables necesarias para fijar la posicion relativa de los puntos, ó sea la configuración geométrica del sistema en cada instante.

Esta ecuación, como acabamos de decir, se aplica á casi todos los problemas de la Mecánica clásica, pero no á todos.

Excluye el caso en que hay rozamientos, y supone que el sistema es *holonomo*, es decir, que los enlaces se expresan por medio de ecuaciones finitas entre las x, y, z.

Por último, indicamos, que en estas conferencias probablemente no trataríamos el caso general, sino otros más particular, que es aquel en que no entra el tiempo explícitamente en las ecuaciones de los enlaces y, por lo tanto, en T, ni tampoco en las Q, y, además, supondremos que las fuerzas X, Y, Z tienen una potencial; por consiguiente, las que llamamos *fuerzas ficticias*, que son las Q, también pueden derivarse de una función U_q de las q, en cuyo caso las ecuacio- de Langrage tomarán esta forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U_q}{\partial q_i} \ldots\ldots (i = 1,2 \ldots k)$$

y en tal hipótesis, ni en T ni en U entra el tiempo t.

Insisto en repetir una vez más lo que ya he dicho en otras conferencias.

Mas cuando se empieza á estudiar una materia nueva conviene tener muy presente, *en cada instante*, las condiciones precisas *del punto de partida*.

Y hasta aquí los resultados obtenidos en las conferencias anteriores.

***

El por qué vamos á dedicar todo este curso, ó la mayor parte de él, al estudio de las ecuaciones de Langrange, ya lo hemos dicho y lo hemos repetido hasta la saciedad en las conferencias anteriores.

La Física Matemática clásica parte, en casi todas sus teorías, de la hipótesis mecánica, de suerte que, el estudio general, el más general posible, de los problemas de la Mecánica racional, no puede ser ajeno, y aun debe formar parte integrante de aquella ciencia; y como en la serie de nues-

tras lecciones, según tantas veces hemos repetido, nos proponemos condensar en algo así como en una enciclopedia elemental, no sólo la Física Matemática moderna, sino la Física Matemática clásica, y para esta última, por lo pronto las fórmulas generales de Lagrange son de todo punto indispensables, natural es que á ellas dediquemos preferente atención.

Pero hay más: cierta clase de problemas, como son todos los que se refieren á la Mecánica estadística y á sus aplicaciones á la Termodinámica, materia que tenemos la esperanza de estudiar en algunos de estos cursos, de la ecuación de Lagrange parten y en ella se fundan; como puede verse en la obra de J. Willard Gibbs y aun en un extracto muy interesante de esta materia publicado por el joven y brillante profesor D. Esteban Terradas.

Más todavía: aunque las ecuaciones de Lagrange hayan sido establecidas y demostradas para la materia ponderable, y casi pudiéramos decir para las acciones á distancia, así y todo, han sido aplicadas con gran atrevimiento, pero con brillante resultado, á la teoría de la electricidad en la Física Matemática moderna, y pudiéramos citar muchos ejemplos.

El admirable matemático, físico y pensador Mr. Poincaré, cuya reciente pérdida llora la Ciencia, aplica muchas veces las ecuaciones de Lagrange en la extensa serie de sus obras sobre Física Matemática. Por ejemplo, las aplica á la teoría de Lorentz.

Aún pudiéramos citar otros autores distinguidísimos, y recientemente M. T H de Douder ha hecho una aplicación de esta clase al movimiento de los electrones en un campo electromagnético.

Sin contar, entre otros muchos ejemplos, la admirable aplicación de Maxwell á la teoría de la inducción, reproducida por el propio Poincaré. Sin contar aún los notables trabajos de Carvallo y otros autores.

Digo esto para demostrar la importancia de las clásicas

ecuaciones de Lagrange, no sólo en la Física Matemática del pasado siglo, sino en las teorías más modernas de esta ciencia, justificando de este modo, si justificación necesita, la predilección que en este curso voy á dar á las ecuaciones de la Mecánica, derivadas todas ellas de las ecuaciones de Lagrange.

Y continuemos ya nuestra tarea.

***

Hemos dicho, que las ecuaciones de Lagrange, suponiendo que se han expresado en función de la fuerza viva T y de la potencial U_q, y aun, no sólo en este caso, sino en el caso general, constituyen un sistema de k funciones $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$ y de t.

Estas relaciones no son, como generalmente se dice, en términos finitos, sino que forman un sistema de *ecuaciones diferenciales* de las $q_1, q_2 \ldots\ldots$ con relación á la variable independiente t.

Tal es el tipo de casi todas las ecuaciones de la Física Matemática clásica ó moderna.

No entran en términos finitos las funciones y las variables independientes, sino que entran por sus coeficientes diferenciales, ó sea por sus elementos infinitamente pequeños.

Dijérase que el matemático y el físico encuentran más fácil hallar las relaciones entre los *incrementos infinitamente pequeños* de las magnitudes físicas, que entre las magnitudes finitas.

Y aún nos atreveríamos á afirmar que en la Física Matemática, si mediante ciertas hipótesis se pueden hallar relaciones diferenciales, no sería posible ó sería difícil encontrar directamente relaciones entre las magnitudes mismas.

Estas relaciones sólo puede encontrarlas, y no siempre, el método experimental; y aun éste, en ocasiones, en muchas ocasiones, pudiéramos afirmar, y aun agregaríamos, cuando

toma formas más perfectas, á las ecuaciones diferenciales se se ve obligado á acudir.

Pero aun esto mismo que acabamos de afirmar sobre la excelencia de las *ecuaciones diferenciales,* que es proclamar el *principio de continuidad,* ¿no necesita más explicaciones?

Las novísimas teorías de los *quanta,* ¿no nos da un toque de atención?

Pero no adelantemos las ideas.

Ya tendremos ocasión de comprobar y desarrollar las novísimas hipótesis.

Por el pronto repetiremos, que las ecuaciones de Lagrange, que son las ecuaciones generales de la Mecánica, son ecuaciones diferenciales, como ya hicimos notar en la última conferencia.

En el estudio del cálculo integral, que, como se sabe, tiene por objeto pasar de las relaciones entre las derivadas ó entre las diferenciales á relaciones entre cantidades finitas, se establecen, como saben mis alumnos, enumeraciones generales, en que se empieza por las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, cuya forma canónica es

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

y se acaba por ecuaciones diferenciales de un orden cualquiera de diversas funciones y de diversas variables independientes.

No hemos de recordar aquí esta clasificación, que es elemental y que, seguramente, conocen mis alumnos, y nos limitaremos tan sólo á hacer constar, que en nuestro caso se trata de integrar un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de diversas funciones y de una sola variable independiente. Además, el sistema de ecuaciones diferenciales es de segundo orden.

Hemos visto, efectivamente, en la conferencia anterior, que las ecuaciones de Lagrange son de este tipo:

$$f_1(t, q_1, q_2 \dots q_k, q_1', q_2' \dots q_k', q_1'', q_2'' \dots q_k'') = 0,$$
$$f_2(t, q_1 \dots q_1' \dots q_1'' \dots) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_k(t, q_1, \dots q_1' \dots q_1'' \dots) = 0.$$

Son, pues, k ecuaciones, es decir, tantas como funciones independientes existen en los enlaces, ó, como ahora se dice, tantas como grados de libertad tiene el sistema. En estas ecuaciones diferenciales entran, pues, k funciones $q_1, q_2 \dots \dots q_k$.

Entran, además, en general, las derivadas primeras de estas funciones con relación al tiempo: $q'_1, q'_2 \dots\dots q'_k$. Y entran, por último, las derivadas segundas: $q''_1, q''_2 \dots\dots q''_k$.

En suma: como antes indicábamos, son k ecuaciones de k funciones simultáneas con derivadas hasta el segundo orden, relativas á la única variable independiente, que es el tiempo.

Se sabe por cálculo integral, que siempre puede rebajarse el orden aumentando el número de funciones.

Para ello basta considerar las derivadas primeras como *nuevas funciones;* y en tal caso, las derivadas segundas serán derivadas primeras de estas nuevas funciones.

Si en el sistema precedente hacemos

$$q'_1 = p_1, q'_2 = p_2 \dots q'_k = p_k,$$

ó bien

$$\frac{dq_1}{dt} = p_1, \frac{dq_2}{dt} = p_2 \dots \frac{dq_k}{dt} = p_k,$$

representando por p estas primeras derivadas, podremos escribir, no k ecuaciones simultáneas de segundo orden, sino

$2\,k$ ecuaciones simultáneas de primer orden, con $2\,k$ funciones, que constituirán el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
& f_1\left(t, q, \ldots p_1 \ldots \frac{dp_1}{dt} \ldots\right) = 0, \\
& f_2\left(t, q_1 \ldots p_1 \ldots \frac{dp_1}{dt} \ldots\right) = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& f_k\left(t_1 q_1 \ldots p_1 \ldots \frac{dp_1}{dt} \ldots\right) = 0, \\
& \frac{dq_1}{dt} = p_1, \qquad\qquad (1) \\
& \frac{dq_2}{dt} = p_2, \\
& \quad \vdots \\
& \frac{dq_k}{dt} = p_k;
\end{aligned}
$$

en que, como vemos, entran las funciones $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$; además, las funciones $p_1, p_2 \ldots\ldots p_k$ y las derivadas primeras de unas y otras con relación al tiempo.

Son, como decíamos, $2\,k$ ecuaciones *diferenciales simultáneas* de $2\,k$ funciones, las q y las p, de primer orden, y de la variable t.

Se sabe, además, que á este sistema se le puede dar una forma que se llama *normal*, y que consiste en despejar todas las derivadas de primer orden en valores de dichas funciones y de la variable independiente t.

Más claro, y para fijar las ideas, suponiendo que se trata de tres funciones x, y, z y de una variable indepen-

diente t, si las ecuaciones en diferenciales simultáneas son de primer orden, tendrán esta forma:

$$f_1\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right) = 0,$$

$$f_2\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right) = 0,$$

$$f_3\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right) = 0;$$

y despejando las tres derivadas primeras, se comprenderá que la forma siguiente, que se llama *normal*, constituye un sistema equivalente al anterior:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y, z, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = F_2(x, y, z, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = F_3(x, y, z, t).$$

Bajo esta forma, y suponiendo que las funciones F fueran holomorfas, se les podría aplicar en el caso más general el sistema de integración de Cauchy, por el desarrollo de las F según la serie de Taydor, en un cierto círculo de convergencia, método que otros autores designan con el nombre de *teorema de existencia* de dichas integrales.

Pero éstas son cuestiones que ya no pertenecen á la clase de Física Matemática, que debo suponer conocidas de mis alumnos, y que, en todo caso, están á su alcance y pueden recordar ó aprender en cualquier tratado moderno de cálculo diferencial é integral.

Sólo resulta, y sólo hay que retener por el momento de

las explicaciones anteriores, que las ecuaciones diferenciales simultáneas de Lagrange, considerando las nuevas funciones $p_1, p_2 \ldots p_k$ que representen las derivadas primeras de q, pueden escribirse bajo esta forma:

$$\frac{dq_1}{dt} = F_1(q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k, t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dq_k}{dt} = F_k(q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k, t),$$

$$\frac{dp_1}{dt} = G_1(q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k, t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dp_k}{dt} = G_k(q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k, t),$$

que son 2 k *ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden* de las funciones $q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k$ y de la variable independiente única t, que es el tiempo, puestas bajo la forma que, como decíamos antes, se llama forma *normal.*

Si no todos, la mayor parte de los problemas de la Mecánica clásica quedan reducidos á este problema de análisis.

Y para la resolución de cualquier fenómeno natural de dicho orden, al llegar á este punto los físicos *pasan la mano,* si se me permite esta manera de expresarme, á la Ciencia pura, á las Matemáticas abstractas, para integrar el sistema de ecuaciones precedentes; sin perjuicio de recoger las soluciones y de interpretarlas, poniéndolas en relación con los fenómenos físicos, en los que de este modo, como hemos explicado en otras ocasiones, la Ciencia moderna procura explicar *las cualidades* por *las cantidades.*

Problema transcendental y muy debatido, en el que no podemos detenernos en este momento.

***

De todas maneras, resulta que los problemas de la Mecánica clásica, ó casi todos los que esta Ciencia estudia, están comprendidos en las ecuaciones de Lagrange, que se convierten en ecuaciones diferenciales simultáneas, aún más sencillas que las que hemos escrito hace un momento. Porque en todo el grupo de las derivadas de p, las F del segundo miembro toman una forma elemental, pues se convierten pura y simplemente en las p, como hemos visto al principio de esta conferencia; es decir, que tendremos:

$$\frac{dp_1}{dt} = G_1(q_1 \dots q_k, p_1 \dots p_k, t)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dp_k}{dt} = G_k(q_1 \dots q_k, p_1 \dots p_k, t)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = p_1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dq_k}{dt} = p_k$$

***

Esta es la forma á que pueden reducirse las ecuaciones de Lagrange como aplicación de los métodos generales del cálculo integral, y si no se hubiera llegado á mayores simplificaciones, nada tendríamos que agregar á lo dicho y casi

pudiéramos decir que aquí terminaba la materia del presente curso.

Pero no se olvide, que ésta es la forma *más general* que adquieren las ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden cuando se reducen á ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden, duplicando el número de las funciones dependientes de t, que comprende el problema.

Y nosotros *no estamos tratando el caso más general, sino* que estudiamos ecuaciones diferenciales simultáneas (ó sean, ordinarias) que *se refieren á problemas de Mecánica*; y por grande que sea la generalidad de estos problemas, en el campo infinito de la Ciencia pura no representan mas que una clase particular de las ecuaciones diferenciales simultáneas.

El último sistema que hemos escrito como aplicable á los problemas de Mecánica procede del sistema de ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U_q}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots k)$$

y este sistema tiene una forma particular y relativamente sencilla. Todas las ecuaciones son del mismo tipo; sólo varía el subíndice i de la función q, á que se refieren, y todas se obtienen repitiendo sobre los tres términos una operación analítica análoga; á saber:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q'_i}\right)$ sobre T, que siempre es la misma;

$\frac{\partial}{\partial q_i}$ también sobre T, y

$\frac{\partial}{\partial q_i}$ sobre U_q, la misma siempre.

Tal circunstancia nos hace comprender, que se trata de un *caso particular* en el campo inmenso de las ecuaciones

diferenciales simultáneas y que no debemos contentarnos con la simplificación indicada, á saber, con la introducción de las nuevas funciones p, que representen las derivadas de q. Además, hasta ahora no sabemos qué simplificaciones podrán introducirse en las funciones G del sistema precedente.

Debemos, pues, procurar simplificaciones propias, por decirlo así, de la forma especial que afectan las ecuaciones de Lagrange.

De aquí la transformación clásica de Poisson y Hamilton y las llamadas *Formas canónicas* de este último autor.

Tal es el estudio que vamos á emprender desde luego.

Transformación clásica de las ecuaciones de Lagrange por Poisson y Hamilton.—El objeto de dicha transformación es, en el fondo, el ya indicado. A saber: transformar el sistema de ecuaciones de Lagrange, que es, como hemos demostrado, un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden con k funciones q desconocidas, ó sea con k incógnitas y una variable independiente t, en otro sistema también de ecuaciones diferenciales simultáneas, no ya de *segundo orden*, sino de *primero*. Pero conteniendo, á cambio de esta ventaja, que algún sacrificio nos había de costar, doble número de funciones. Además, hemos de obtener este sistema bajo la forma canónica ó normal que antes señalábamos; que siendo, por ejemplo, x, y, z... las funciones, y siendo t la variable independiente, corresponden á este tipo, como vimos hace poco:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z \ldots t)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z \ldots t)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z \ldots t)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Parece, por lo tanto, que vamos á repetir lo que antes dijimos; pero no es así, porque no vamos á escoger por nuevas funciones, como se hace en el cálculo integral,

$$\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_k}{dt}$$

que antes representábamos por p_1, p_2 .... p_k.

En el sistema Poisson-Hamilton, las *nuevas funciones* auxiliares que se escogen no son éstas, y en esta elección está lo *ingenioso del método* y *la simplificación del cálculo*.

En las ecuaciones generales de Lagrange, se les ocurrió á los ilustres matemáticos antes citados (y no es ocasión de hacer reparto de méritos históricos) elegir para transformar las ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

en ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden; se les ocurrió elegir, repetimos, como nuevas funciones, las siguientes:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots \frac{\partial T}{\partial q'_i} \ldots \frac{\partial T}{\partial q'_k}.$$

Con lo cual, evidentemente, se suprimía una diferenciación de cada fórmula; y para ello se representaban las expresiones anteriores por p_1, p_2, ... p_i..... p_k.

Y advierto á mis alumnos que esta letra p es completamente distinta de la que antes empleábamos.

Allí las p representaban las derivadas de las q con relación al tiempo. Aquí representan funciones más complicadas; de modo que el sistema de ecuaciones de Lagrange que acabamos de escribir se convierte en este otro:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \\ &\frac{\partial T}{\partial q_i} = p_i \end{aligned}\right\} (i = l \ldots k) \qquad \begin{aligned} &(G_1) \\ &(G_2) \end{aligned}$$

Puesto que aquí las funciones son

$$q_1, q_2, q_3 \ldots q_k$$
$$p_1, p_2, p_3 \ldots p_k$$

siendo siempre t la única variable independiente, es claro que no deberán entrar en el sistema de ecuaciones de Lagrange transformadas, mas que estas funciones p, q, sus derivadas primeras con relación al tiempo, y la variable independiente t.

Analíticamente, y en disposición de que se le apliquen los procedimientos de integración ordinarios, ésta que decimos es la forma que debe afectar todo sistema de ecuaciones.

Pero el que acabamos de escribir, ¿cumple con las condiciones indicadas?

Verdad es, que sólo por haber elegido, como nuevo sistema de funciones, las que hemos llamado p, el primer término de la ecuación general de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$$

ha tomado ya la forma definitiva

$$\frac{dp_i}{dt}$$

que puede perfectamente entrar en las ecuaciones que buscamos; pero no sabemos si sucederá lo mismo con todos los términos restantes del sistema.

Examinémoslos uno por uno.

Empecemos por

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Recordemos que T, es decir, la mitad de la fuerza viva, tiene esta expresión en que suprimimos el subíndice:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

ó bien

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Pero cuando obtuvimos las ecuaciones de Lagrange fué preciso eliminar las x, y, z y, por lo tanto, las x', y', z', en función de las nuevas variables q_1, q_2 ..... q_k, que eran las del número mínimo necesario, según los enlaces, para fijar la forma del sistema material constituído por las masas m.

Recordarán también mis alumnos, que para eliminar las x, x'; las y, y', y las z, z', en función de las q y de las q', tenemos que acudir, como es natural, á las ecuaciones de los enlaces, que, suponiendo el sistema *holonomo*, es decir, que los enlaces pueden expresarse por medio de ecuaciones, representábamos por las siguientes (conferencia anterior):

$$\left.\begin{aligned} x_u &= \alpha_n (q_1, q_2 \dots q_i \dots q_k, t) \\ y_u &= \beta_n (q_1, q_2 \dots q_i \dots q_k, t) \\ z_u &= \gamma_n (q_1, q_2 \dots q_i \dots q_k, t) \end{aligned}\right\} (n = 1, 2 \dots N) \qquad (3)$$

Diferenciándolas con relación á la variable independiente t, nos darán las x', y', z' en función de las q, q', t.

Esto se ve sencillamente con sólo aplicar la regla de la

diferenciación; porque tendremos, suprimiendo el subíndice n, para facilitar la escritura:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{\partial \alpha}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial q_2}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \alpha}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\
y' &= \frac{\partial \beta}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \beta}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \beta}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \beta}{\partial t} \qquad (4) \\
z' &= \frac{\partial \gamma}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \gamma}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}
\end{aligned}
$$

y en los segundos miembros no entran mas que las derivadas primeras de las funciones q; á saber:

$$\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt} \ldots \frac{dq_k}{dt}$$

ó sea

$$q'_1, q'_2, \ldots q'_i \ldots q'_k,$$

que son cantidades que *pueden entrar* para la integración en las ecuaciones diferenciales que buscamos.

Y entran, además, en estos valores de x', y', z' y en todos los coeficientes

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial \beta}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial \gamma}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} \ldots \frac{\partial \beta}{\partial t} \ldots \frac{\partial \gamma}{\partial t},$$

las funciones q_1, q_2 ..... q_k y la variable independiente t.

En resumen, este término $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ contiene las cantidades

$$q_1, q_2 \ldots q_k, t$$
$$q'_1, q'_2 \ldots q'_k,$$

y en rigor *está preparado*, si vale la palabra, para la integración.

Por último, los términos Q_i sólo contienen cantidades que se refieren al nuevo sistema de variables, porque eliminando de los segundos miembros de las ecuaciones primitivas las x, y, z por medio de los enlaces, vimos que, en general, Q_i podía decirse que era una función de esta forma:

$$Q_i(q_1, q_2 \dots q_k, t).$$

En resumen, la ecuación correspondiente al índice i del grupo general, que antes escribimos,

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

está preparada para la integración, pues no contiene más que:

1.° Las funciones primitivas q_1, q_2 ..... q_k y la variable independiente t.

2.° Las derivadas con relación al tiempo q'_1, q'_2 ..... q'_k de dichas funciones.

Y 3.° Las derivadas con relación á t de las nuevas funciones p, ó sean las $\frac{dp_i}{dt}$, es decir, p'_1, p'_2 ..... p'_k.

De manera que, como todo esto que venimos explicando, acaso con excesiva minuciosidad para muchos de mis alumnos, oyentes y lectores, no es otra cosa que un *cambio de variables*, podemos afirmar que en las primeras ecuaciones del sistema de Lagrange está efectuado dicho cambio de variables y no entran mas que las q, sus derivadas primeras, las derivadas primeras de las nuevas funciones p y el tiempo t en el caso general.

Pero nos quedan las ecuaciones segundas del grupo general, que hemos expresado por $\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i$, y que dando á i todos sus valores, formarían en las ecuaciones (3) este

sistema ó esta segunda parte del expresado grupo (3)

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2 \ldots \frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i \ldots \frac{\partial T}{\partial q'_k} p_k.$$

A fin de interpretar estas ecuaciones, recordemos lo que significa T y cuáles son las cantidades que entran en esta función.

Ya lo hemos explicado otras veces, y aun en esta misma conferencia hace un momento lo hemos recordado; pero no está de más el precisar nuestras ideas.

Hemos dicho que T es la semifuerza viva del sistema, ó sea, suprimiendo el subíndice,

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

en que Σ se extiende á todos los puntos de dicho sistema, m representa la masa de cada punto, y x', y', z' representan las componentes de la velocidad del mismo, á saber:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Recordamos también que, para pasar de las notaciones ordinarias á las nuevas notaciones, ó mejor dicho, á las ecuaciones de Lagrange, había que expresar las componentes x', y' z' de la velocidad en función de las derivadas de las cantidades q, con relación al tiempo, y hemos conseguido esto diferenciando con relación á t los valores de x, y, z en las ecuaciones de los enlaces.

Así, pues, de las ecuaciones (3) que representaban los enlaces acabamos de deducir las ecuaciones (4), que podemos expresar también, para abreviar la escritura, bajo esta forma:

$$x' = A_1 q'_1 + A_2 q'_2 + \ldots\ldots + A_k q'_k + a,$$
$$y' = B_1 q'_1 + B_2 q'_2 + \ldots\ldots + B_k q'_k + b,$$
$$z' = C_1 q'_1 + C_2 q'_2 + \ldots\ldots + C_k q'_k + c,$$

y sabemos que los coeficientes A, B, C, a, b, c, son todos ellos funciones de las letras q y del tiempo t.

Así, una de ellas, por ejemplo, A, es una función de esta clase:

$$A = A\,(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, t),$$

cuya naturaleza analítica dependerá del problema de que se trate.

Estos valores de x', y', z' son los que debemos sustituir en la función T, que tomará, por lo tanto, la forma:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_1^N m \Big[(A_1 q'_1 + \ldots\ldots + A_k q'_k + a)^2 +$$
$$+ (B_1 q'_1 + \ldots\ldots + B_k q'_k + b)^2 + (C_1 q'_1 + \ldots\ldots + C_k q'_k + c)^2 \Big]$$

Dentro del paréntesis hemos suprimido el subíndice n; pero es claro que cada término de Σ corresponde á un valor de este subíndice desde 1 á N, siendo N el número de puntos.

De manera que de un término de Σ á otro variará la m y variarán todos los coeficientes A, B, C, a, b, c, mas no variarán las q', que siempre serán $q'_1\, q'_2 \ldots\ldots q'_k$.

Si desarrollásemos el paréntesis, que está bajo el signo Σ, encontraríamos un polinomio en que no entrarían mas que los *cuadrados de estas q' y los dobles productos* q_1, q'_2 ..... además, *las primeras potencias de la q'* y un término independiente de las q', que sería $a^2 + b^2 + c^2$.

Claro es que si, como luego hemos de suponer, las ecuaciones de los enlaces no contuvieran t, es decir, fueran independientes del tiempo, ni entrarían las primeras potencias

de las q', ni el término independiente, y el paréntesis se reduciría á un polinomio *homogéneo de segundo grado* de las $q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_k$.

Admitamos por el pronto el caso más general, y podremos decir, que el paréntesis se reduce á un polinomio de segundo grado completo de las q'.

Como todos los términos que están bajo el signo Σ serán de la misma clase, deduciremos, reuniendo los términos análogos, que T se reduce á un *polinomio de segundo grado completo,* en el caso general, de las cantidades $q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_k$, y si no entrase t en las ecuaciones de los enlaces, este polinomio sería homogéneo y de segundo grado.

Tendremos, pues, en el caso general:

$$T = D_1 q'^2_1 + D_2 q'^2_2 + \ldots\ldots + D_k q'^2_k +$$
$$+ E_{12} q'_1 q'_2 + \ldots\ldots + F_1 q'_1 + F_2 q'_2 + \ldots F_k q'_k + L.$$

Claro es que todos los coeficientes, según se deduce de lo que venimos explicando, son funciones de $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$, de las m y de las constantes propias del problema.

Estamos interpretando el término

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

y para ver lo que representa el primer miembro no habrá mas que sustituir en vez de T la expresión anterior, y tendremos:

$$\frac{\partial [D_1 q'^2_1 + \ldots + E_{12} q'_1 q'_2 + \ldots + F_1 q'_1 + \ldots L]}{\partial q'_i} = p_i$$

No olviden mis alumnos que se trata de diferenciación con ∂, es decir, de una diferenciación parcial. Así, al diferenciar con relación á q'_i, se supone que todas las demás letras son constantes.

Observemos en este caso, que el polinomio de segundo grado se reduce á uno de primero, con términos análogos á éstos:

$$2D_i q'_i + E_{1i} q'_1 + E_{2i} q'_2 + \ldots + F_i = p_i$$

Y se ve, desde luego, que el primer miembro de la anterior ecuación es una función lineal de $q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_k$.

De todas las demás ecuaciones análogas, que se obtienen haciendo variar el índice i de 1 á k, podremos decir otro tanto, de suerte que las ecuaciones

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = p_1; \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2 \ldots\ldots \frac{\partial T}{\partial q'_k} = p_k \qquad (G_2)$$

no serán otra cosa que una serie de ecuaciones en que los primeros miembros expresarán funciones lineales de las q'. Por fin, pasando las F al segundo miembro y representando los coeficientes por a, b, c, tendremos que el segundo grupo (G_2) de ecuaciones diferenciales, podrá escribirse de este modo:

$$\begin{array}{l} a_1 q'_1 + b_1 q'_2 + c_1 q'_3 + \ldots\ldots + l_1 q'_k = p_1 - F_1 \\ a_2 q'_1 + b_2 q'_2 + c_2 q'_3 + \ldots\ldots + l_2 q'_k = p_2 - F_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k q'_1 + b_k q'_2 + c_k q'_3 + \ldots\ldots + l_k q'_k = p_k - F_k \end{array} \qquad (4\text{ bis})$$

Ahora bien, como los coeficientes a, b, c hemos visto que son funciones de las q, podemos de las ecuaciones precedentes por los métodos ordinarios despejar las q' en función lineal de las p y en función de las q, que ya, en general estas últimas no serán funciones lineales; es decir, que tendremos:

$$\begin{array}{l} q'_1 = f_1(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) \\ q'_2 = f_2(q_1 \ldots\ldots\ldots, p_1 \ldots\ldots\ldots, t) \\ \vdots \\ q_k = f_k(q_1 \ldots\ldots\ldots, p_1 \ldots\ldots\ldots, t) \end{array} \qquad (5)$$

En rigor, esto supone que del grupo de ecuaciones lineales precedentes se pueden deducir los valores de las q', ó lo que es igual, que la determinante del denominador no se reduce á cero.

Por el pronto esto supondremos, sin perjuicio de dilucidar más adelante dicho punto.

Y resultará, que las ecuaciones de Lagrange, en que hemos introducido las nuevas funciones p, estarán preparadas para la integración, porque no contendrán mas que las funciones p y q, sus deriuadas primeras con relación á t y dicha variable independiente.

En efecto, hemos visto en esta misma conferencia que el primer grupo (G_1) de estas ecuaciones

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

ó si se quiere

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = Q_i - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

contiene en el primer miembro la derivada primera de la función p con relación á t, y que el segundo miembro no contiene mas que las q, las q' y, en general, la variable independiente.

Más aún: como las q' acabamos de expresarlas en las ecuaciones (5) en función de las q, de las p y de las t, puede considerarse, que de los segundos miembros de este último grupo de ecuaciones se eliminan las q'; y tendremos, como resumen de todo lo expuesto, que las ecuaciones de Lagrange, introduciendo las nuevas funciones p, se presentarán bajo la forma normal de las ecuaciones diferenciales simultáneas de $2k$ funciones y una sola variable independiente, forma que será ésta:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = g_1 (p_1 \dots q_1 \dots t)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = g_2 (p_1 \dots q_1 \dots t)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = g_k (p_1 \dots q_1 \dots t)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = f_1 (p_1 \dots q_1 \dots t)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = f_2 (p_1 \dots q_1 \dots t)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} = f_k (p_1 \dots q_1 \dots t)$$

ó abreviadamente, y en general:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial t} &= g_i (p_1 \dots p_k, q_1 \dots q_k, t) \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} &= f_i (p_1 \dots p_k, q_1 \dots q_k, t) \end{aligned}\right\} i = 1, 2 \dots k).$$

***

Es decir, que al llegar á este punto, el problema de Mecánica, como tal problema de Mecánica, y aun pudiéramos decir como problema de Física Matemática, pues en la hipótesis clásica todo problema de Mecánica es problema de Física Matemática; al llegar á este punto, repetimos, el problema de Mecánica ha terminado, y sólo queda un problema de Matemáticas puras, ó sea de cálculo integral.

Antes de llegar al último período, que es el de la interpretación física de las fórmulas matemáticas, lo que por el momento hay que hacer, en este segundo período, es inte-

grar las ecuaciones diferenciales á que el problema físico se ha reducido, y que lo expresan en el lenguaje del análisis matemático.

Mas si para resolver este problema, no tuviéramos que hacer otra cosa, que referirnos á los métodos del cálculo é integrar las últimas ecuaciones ó procurar integrarlas, por ejemplo, por los métodos clásicos de Cauchy ó por el que pudiéramos llamar el método del *seguimiento*, ó buscando simplificaciones, por el método de los multiplicadores, ó por la teoría de los grupos de transformación, y apunto todos estos nombres intencionalmente para evocar recuerdos en mis alumnos, ó acaso para estimular curiosidades; si no hubiera que hacer otra cosa, repito, que acudir á métodos comunes y conocidos, aquí pudiéramos dar por terminada nuestra tarea, al menos en esta parte del curso.

Pero no es así. La simplificación que hemos indicado trae consigo nuevas simplificaciones, nuevos artificios y hasta da origen á nuevas teorías.

Casi todos los problemas de la Mecánica clásica pueden reducirse por medio de las ecuaciones de Lagrange al sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden con 2 k funciones y una sola variable independiente, reducidas á la forma normal anterior.

En dicho sistema las funciones que nos interesan directamente son $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$, porque son el mínimo de variables, que determinan en cada instante la situación de los puntos $m_1, m_2 \ldots\ldots$ y las que por sus relaciones, según los enlaces, con x, y, z determinarán todas las condiciones del movimiento, no sólo la posición de los puntos, que estará determinada por las q, sino sus velocidades x', y', z', sus aceleraciones, su fuerza viva, es decir, todas las magnitudes del movimiento, ó sea del fenómeno físico que consideramos.

Respecto á las p, éstas son *funciones auxiliares* que nos han servido, según la transformación Poisson-Hamilton, para

convertir las ecuaciones diferenciales de segundo orden en ecuaciones diferenciales de primero.

Al integrar el sistema de ecuaciones, habrá que integrar casi siempre, las p, lo mismo que las q, porque están enlazadas en dicho sistema, y unas y otras habrá que expresarlas en función de la única variable independiente t; pero las funciones que á nosotros más directamente nos interesan, como acaba de decirse, son las funciones q, que constituyen las variables, en número mínimo, necesarias en cada instante para fijar la posición del sistema.

En las ecuaciones generales á que se reducen las de Lagrange,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial t} &= g_i \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} &= f_i \end{aligned}\right. \qquad (i = 1 - 1 \ldots k)$$

no deben considerarse las funciones g y f como funciones generales de las q, p y t, sino que tienen *formas particularísimas*, precisamente por tratarse de problemas de Mecánica, que se simplifican sin dificultad, y que permiten introducir, como acabamos de indicar, teorías especiales de integración al menos para muchos casos.

El sentido de la simplificación de Hamilton no es otro que este.

A saber: que las funciones f y g en los problemas de Mecánica tienen formas especiales.

Mas aún: vamos á ver en la conferencia próxima, que estas dos funciones f, g pueden expresarse inmediatamente en todos los problemas de esta clase por operaciones sencillísimas de diferenciación, aplicadas á una función única, que designaremos por K, que sólo dependerá de las p y q, y *que puede formarse inmediatamente en todos estos problemas* de Mecánica que estamos estudiando y aun en sus aplicaciones

más ó menos aventuradas, pero hasta hoy fecundas, ó, por lo menos, concordantes, á los problemas y á las teorías modernas sobre la electricidad.

Precisamente por este último motivo, como hemos adelantado otras veces, dimos importancia á las ecuaciones de Lagrange, y ahora damos importancia á la transformación de Hamilton.

***

El estudio de esta simplificación y el de la reducción de las funciones generales f, g á una función única K dependiente de p y q, será el objeto de la conferencia inmediata; mas antes de terminar ésta vamos á completarla indicando algo sobre un punto que antes dejamos en suspenso.

Al diferenciar las ecuaciones de los enlaces con relación á t, con el objeto de expresar las derivadas

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt},$$

de las primitivas variables x, y, z en función de las nuevas variables q, decíamos que nuestro objeto era sustituir aquéllas en la expresión de T. Con lo cual la fuerza viva T se expresaría en el caso general por un polinomio de segundo grado de las q'; polinomio que, si el tiempo t no entraba en las ecuaciones de los enlaces, sería un polinomio de segundo grado homogéneo de

$$q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_i \ldots\ldots q'_k.$$

Y continuábamos diciendo que, diferenciando estas ecuaciones con relación á las q', obtendríamos el sistema de ecuaciones, que eran ecuaciones de primer grado en q'_1, q'_2 ..., de las que deduciríamos, por los métodos elementales del Alge-

bra, los valores de las q'. Porque, en efecto, son k ecuaciones de primer grado en

$$q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_k.$$

Pero esto no siempre es posible en las ecuaciones de primer grado, porque á veces *la determinante* de los coeficientes, puede ser igual á cero. Si en nuestro caso esto se verificase, no podrían deducirse los valores de las q' y la transformación caería en defecto.

Tal es el punto sobre el cual vamos á hacer algunas observaciones, advirtiendo una vez más á mis alumnos, que sobre éste y otros puntos de la teoría, que vamos estudiando, pueden consultar, entre otros libros, la obra de Mecánica de Mr. Appell.

Viniendo ya á la cuestión concreta, indicaremos que el caso de que la expresada determinante sea igual á cero no puede presentarse.

Y para ello distinguiremos dos casos, como hace Mr. Appell.

En primer lugar, supondremos, que el tiempo no entre en las ecuaciones de los enlaces, ni tampoco en las fuerzas X, Y, Z.

En esta hipótesis, las ecuaciones (4 bis) se simplifican, porque T es un polinomio homogéneo de segundo grado; como se dice en la *teoría de las formas,* una *forma cuadrática,* y la determinante que consideramos es la que se llama en aquella teoría una *discriminante.*

Y para simplificar la demostración, de la cual no vamos á dar más que una idea, supongamos que sólo se trata de un punto y que el número k se reduce á 3.

Las ecuaciones (4 bis) se reducirán para esta hipótesis á las siguientes:

$$a_1 q'_1 + b_1 q'_2 + c_1 q'_3 = p_1$$
$$a_2 q'_1 + b_2 q'_2 + c_2 q'_3 = p_2$$
$$a_3 q'_1 + b_3 q'_2 + c_3 q'_3 = p_3$$

puesto que las F de las ecuaciones (5) desaparecen cuando la t no entra en las ecuaciones de los enlaces.

Y ahora vamos á demostrar que, como es imposible que la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

de los coeficientes sea igual á cero, siempre podrán despejarse q'_1, q'_2, q'_3 por los métodos del álgebra elemental.

Cuando decimos que la determinante anterior no puede ser cero, queremos decir que no puede ser *idénticamente nula;* si podrá serlo ó no para valores particulares de las q, que son las que entran en los coeficientes a, b, c, y si, por lo tanto, en el caso general podrá anularse para *valores determinados del tiempo*, esta es otra cuestión que deberá estudiarse detenidamente en cada caso particular; por el momento tratamos de la marcha general del sistema en un instante cualquiera.

Ahora bien; si suponemos que dicha determinante es idénticamente nula, será legítimo suponer que se verifica

$$p_1 = o, p_2 = o, p_3 = o;$$

porque las tres ecuaciones anteriores podrán escribirse de este modo:

$$o = a_1 q'_1 + b_1 q'_2 + c_1 q'_3$$
$$o = a_2 q'_1 + b_2 q'_2 + c_2 q'_3$$
$$o = a_3 q'_1 + b_3 q'_2 + c_3 q'_3$$

y de ellas será fácil deducir, como se sabe por álgebra elemental, valores correspondientes de q'_1, q'_2, q'_3; pues si bien

es cierto, que en rigor éstas son *tres* ecuaciones con *dos* incógnitas

$$\frac{q'_1}{q'_3}, \frac{q'_2}{q'_3}$$

á saber

$$o = a_1 \frac{q'_1}{q'_3} + b_1 \frac{q'_2}{q'_3} + c_1$$

$$o = a_2 \frac{q'_1}{q'_3} + b_2 \frac{q'_2}{q'_3} + c_2$$

$$o = a_3 \frac{q'_1}{q'_3} + b_3 \frac{q'_2}{q'_3} + c_3$$

precisamente el ser nula la determinante anterior es la condición para que sean compatibles dichas tres ecuaciones.

Es dable por lo tanto determinar las q' de modo que se tenga, como hemos dicho,

$$p_1 = o, \; p_2 = o, \; p_3 = o,$$

ó recordando lo que significa p

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = o, \frac{\partial T}{\partial q'_2} = o, \frac{\partial T}{\partial q'_3} = o.$$

Por otra parte, siendo T un polinomio homogéneo de segundo grado, se sabe por la teoría de los polinomios homogéneos, que se tiene en esta hipótesis

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \frac{\partial T}{\partial q'_3} q'_3,$$

y en virtud de las tres ecuaciones anteriores resultaría $T = o$.

Mas es imposible que la fuerza viva sea nula durante el movimiento; y el movimiento persiste desde que varían las

q con el tiempo, es decir, no siendo nulas las derivadas de todas ellas, único caso en que no podrían despejarse las dos relaciones

$$\frac{q'_1}{q'_3}, \frac{q'_2}{q'_3}$$

pues desaparecerían por completo las tres ecuaciones de donde las hemos deducido.

Caso en que el sistema no se hallaría en movimiento.

Lo repetimos: en el movimiento real las tres ecuaciones existen porque no todas las q' son nulas.

Nuestro razonamiento es aplicable, y el resultado obtenido, de que la fuerza viva sea nula en el movimiento, es evidentemente absurdo.

Mr. Appell examina después el caso general, del qne sólo haremos una indicación.

Si en las ecuaciones de los enlaces entra el tiempo t, ya no es una forma cuadrática T y no es aplicable el razonamiento anterior; pero al *movimiento real* se puede sustituir un *movimiento virtual* para un instante determinado del tiempo, y como la determinante resulta en este caso la misma para dicho movimiento virtual y para su fuerza viva, se pueden aplicar los razonamientos anteriores.

En la conferencia inmediata, como hemos dicho, estudiaremos la transformación de Hamilton.

XXVII—Principios fundamentales de análisis vectorialen el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowsky.

(Continuación.)

Por B. Cabrera.

CAPITULO IV

TENSORES

34. *Tensores: división y notación.*—Ya hemos dicho que los fenómenos tensoriales están caracterizados por una simetría mayor que la característica de los vectores. Como ellos, poseen un eje de simetría, pero este eje carece de sentido determinado; es un eje doblado, valiéndonos de una expresión á veces empleada en cristalografía. Así como existen dos clases de vectores, se distinguen tembién dos clases de tensores, que Voigt, el autor de estas magnitudes, ha llamado polares y axiales. Los primeros, cuya simetría característica es la correspondiente á la fig. 16 de Curie, poseen, además del eje principal y de los ejes secundarios que engendra la equivalencia de los dos sentidos de aquél, un centro de simetría, y por consiguiente un plano de simetría perpendicular á cada eje, incluso el principal; la compresión ó la tensión son fenómenos de este

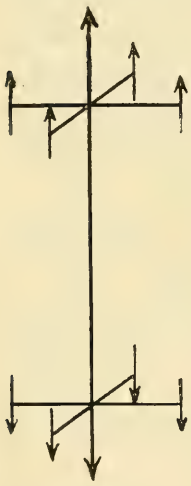


Figura 16.

género. Los segundos, de simetría esquematizada por la figura 17 de Curie, únicamente tienen ejes de simetría; la torción es el ejemplo más sencillo de estas magnitudes.

El signo de los tensores depende de la convención hecha respecto del fenómeno en sí mismo y de los ejes de referencia elegidos, cuando se trata de un vector axial.

Figura 17.

Así, admitido que una tensión es positiva y una comprensión negativa,el signo del tensor correspondiente queda determinado en todo caso; en cambio, supuesto que los ejes son los adoptados generalmente en Mecánica, el tensor que mide la torción será positivo cuando el giro de las caras extremas del cilindro tiene lugar en el sentido contrario de las agujas de un reloj, mientras será negativo para el sistema corriente en la geometría analítica.

Voigt propone, para la representación de un tensor polar positivo y negativo, una recta con dos puntas de flecha hacia fuera ó hacia dentro, según *A* y *B* de la figura 18, y para el tensor axial, con el sistema de ejes elegido, una recta con dos flechas curvas, como *C* y *D*.

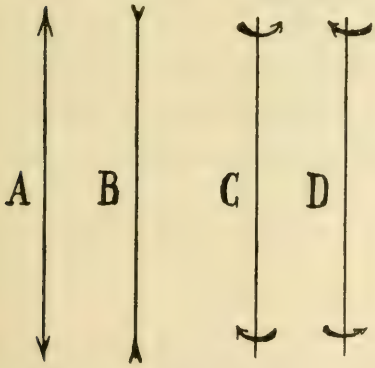


Figura 18.

También, como en los vectores, podemos distinguir en un tensor el módulo y el argumento, que no necesitan nueva definición.

Para designar un tensor extenderemos las notaciones de

Lagevin que hemos adoptado para los vectores. Así, un tensor polar lo distinguiremos colocando sobre una letra una flecha con dos puntas.

$$\overleftrightarrow{a}$$

Si el tensor es axial, escribiremos

$$\overset{\smile}{a}$$

En todo caso, el módulo se designará por la letra sola y el argumento colocándole el exponente 0: $\overset{\smile}{a}^{0}$

35. *Componentes de un tensor.*—Para aplicar á los tensores los métodos generales del análisis, es necesario emplear un procedimiento análogo al utilizado con los vectores, reemplazando el tensor por un conjunto de magnitudes escalares, sobre las cuales se puede operar, y que definan al vector unívocamente. Para determinar estas componentes debe tenerse en cuenta la bilatiralidad del tensor, que exige que dichas magnitudes conserven su signo y valor cuando se cambia de sentido en el eje del tensor. De esta propiedad gozan todas las funciones homogéneas y de segundo grado de los cosenos directores del eje del tensor, de entre las cuales las más sencillas son, suponiendo se trate del tensor $\overleftrightarrow{a}$, los cosenos directores de cuyo argumento son λ, μ y ν:

$$a_{xx} = a\lambda^2, \quad a_{yy} = a\mu^2, \quad a_{zz} = a\nu^2, \quad a_{yz} = a\mu\nu,$$
$$a_{zx} = a\nu\lambda, \qquad a_{xy} = a\lambda\mu.$$

Tomando en consideración las tres primeras se reconoce inmediatamente que

$$a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} = a\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = a,$$

de suerte que el módulo de $\overleftrightarrow{a}$ queda perfectamente determinado por estas tres componentes; pero su argumento no lo está, puesto que no interviniendo para nada los signos de λ, μ, ν el eje del tensor puede caer en cualquiera de los triedros en que los planos coordenados dividen el espacio.

Las otras tres funciones definen, por el contrario, el argumento sin ambigüedad alguna, pues se deduce fácilmente, multiplicando por λ, μ y ν cada una de ellas, que

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{a_{yz}} : \frac{1}{a_{zx}} : \frac{1}{a_{xy}}.$$

Al contrario, el módulo no queda siempre definido por estas magnitudes; pues, si bien se ve inmediatamente que

$$\frac{a_{zx}\, a_{xy}}{a_{yz}} + \frac{a_{xy}\, a_{yz}}{a_{zx}} + \frac{a_{yz}\, a_{zx}}{a_{xy}} = a,$$

esta expresión es indeterminada cuando $\overleftrightarrow{a}$ coincide con uno de los ejes coordenados, porque entonces

$$a_{yz} = a_{zx} = a_{xy} = 0.$$

Son, pues, indispensables todas las magnitudes anteriormente consideradas para definir $\overleftrightarrow{a}$ unívocamente; pero todas ellas no pueden ser independientes, puesto que bastan tres condiciones para definir una recta. Y, en efecto, se reconoce inmediatamente que entre dichas magnitudes existen las relaciones

$$(a) \quad a_{xx} = \frac{a_{zx}\, a_{xy}}{a_{yz}}, \quad a_{yy} = \frac{a_{xy}\, a_{yz}}{a_{zx}}, \quad a_{zz} = \frac{a_{yz}\, a_{zx}}{a_{xy}},$$

y también

$$a_{xx}\, a_{yy} = a^2{}_{xy}, \qquad a_{yy}\, a_{zz} = a^2{}_{yz}, \qquad a_{zz}\, a_{xx} = a^2{}_{zx}.$$

Tales son las razones por las cuales Voigt se vió compelido á admitir para componentes de $\overleftrightarrow{a}$ las referidas seis magnitudes escalares. Inmediatamente se comprende la conveniencia de dividir las seis componentes en dos grupos.

$$a_{xx}, \qquad a_{yy}, \qquad a_{zz},$$
$$a_{yz}, \qquad a_{zx}, \qquad a_{xy}.$$

A primera vista pudiera parecer el segundo de mayor interés que el primero, pues salvo en casos excepcionales, se basta para determinar $\overleftrightarrow{a}$. Sin embargo, cuando el tensor posee el mismo argumento que uno de los ejes coordenados, se confunde con la componente correspondiente del primer grupo, circunstancia que no se presenta jamás para el segundo. Así, pues, las primeras magnitudes tienen idéntica naturaleza que el tensor; son tensores de dirección fija, mientras las segundas son esencialmente distintas. Al primer grupo, lo llamaremos con Voigt *componentes de primera especie*, y al segundo *de segunda especie*.

36. Se reconoce en la expresión de las componentes del tensor $\overleftrightarrow{a}$, que para un cambio de coordenadas se transformarán como los cuadrados y productos de éstas. Así, llamando λ' μ' ν' los cosenos directores de $\overleftrightarrow{a}$ respecto de los nuevos ejes, y empleando el esquema de transformación de coordenadas utilizado ya varias veces

$$a_{xx} = a\lambda^2 = a(\lambda'\alpha_1 + \mu'\beta_1 + \nu'\gamma_1)^2 = a\lambda'^2\alpha_1^2 + a\mu'^2\beta_1^2 +$$
$$+ a\nu'^2\gamma_1^2 + 2a\mu'\nu'\beta_1\gamma_1 + 2a\nu'\lambda'\gamma_1\alpha_1 + 2a\lambda'\mu'\alpha_1\beta_1$$

. . . . . .

$$a_{yz} = a\mu\nu = a(\lambda'\alpha_2 + \mu'\beta_2 + \nu'\gamma_2)(\lambda'\alpha_3 + \mu'\beta_3 + \nu'\gamma_3) =$$
$$= a\lambda'^2\alpha_2\alpha_3 + a\mu'^2\beta_2\beta_3 + a\nu'^2\gamma_2\gamma_3 + a\mu'\nu'(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) +$$
$$+ a\nu'\lambda'(\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2) + a\lambda'\mu'(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)$$

. . . . . .

expresiones que pueden también escribirse, introduciendo las componentes del tensor respecto de los nuevos ejes,

$$a_{xx} = a_{x'x'}\,\alpha_1^2 + a_{y'y'}\,\beta_1^2 + a_{z'z'}\,\gamma_1^2 + 2a_{y'z'}\,\beta_1\gamma_1 + \\ + 2a_{z'x'}\,\gamma_1\alpha_1 + 2a_{x'y'}\,\alpha_1\beta_1$$

. . . . . .

$$a_{yz} = a_{x'x'}\,\alpha_2\,\alpha_3 + a_{y'y'}\,\beta_2\,\beta_3 + a_{z'z'}\,\gamma_2\,\gamma_3 + a_{y'z'}\,(\beta_2\,\gamma_3 + \\ + \beta_3\,\gamma_2) + a_{z'x'}\,(\gamma_2\,\alpha_3 + \gamma_3\,\alpha_2) + a_{x'y'}\,(\alpha_2\,\beta_3 \quad \alpha_3\,\beta_2)$$

. . . . . .

En este sistema de ecuaciones se pueden despejar los valores de $a_{x'x'}$ ..... y $a_{y'z'}$ ... . en función de los a_{xx}..... a_{yz}....., obteniéndose evidentemente

$$a_{x'x'} = a_{xx}\,\alpha_1^2 + a_{yy}\,\alpha_2^2 + a_{zz}\,\alpha_3^2 + 2a_{yz}\,\alpha_2\,\alpha_3 + \\ + 2a_{zx}\,\alpha_3\,\alpha_1 + 2a_{xy}\,\alpha_1\,\alpha_2$$

. . . . . .

$$a_{y'z'} = a_{xx}\,\beta_1\,\gamma_1 + a_{yy}\,\beta_2\,\gamma_2 + a_{zz}\,\beta_3\,\gamma_3 + a_{yz}\,(\beta_2\,\gamma_3 + \\ + \beta_3\,\gamma_2) + a_{zx}\,(\beta_3\,\gamma_1 + \beta_1\,\gamma_3) + a_{xy}\,(\beta_1\,\gamma_2 + \beta_2\,\gamma_1)$$

. . . . . .

La recíproca de la proposición que acabamos de demostrar, es evidentemente cierta, puesto que si seis magnitudes se transforman según el esquema indicado, podemos siempre reemplazarlas por el producto de una constante por los cuadrados ó los productos de los cosenos directores de un vector.

Como aplicación podemos citar las seis funciones de los componentes de un vector $\vec{p}$,

$$p_x^2, \quad p_y^2, \quad p_z^2, \quad p_y p_z, \quad p_z p_x, \quad p_x p_y.$$

Para demostrar que son los componentes del tensor de módulo p^2, basta expresarlas en función en los cosenos directores.

Toda operación efectuada con magnitudes de cualquier

clase que engendre un tensor, la notaremos escribiendo aquellas magnitudes entre barras verticales dobles: así el tensor en cuestión se escribirá

$$\|\vec{p}^{\,2}\|$$

Conviene observar que la característica de cada una de las componentes de un tensor no desaparece si se multiplican las tres componentes de la misma especie por un factor constante. Unicamente cambian, por la presencia del expresado factor, las relaciones de las componentes entre sí y con el módulo; así, multiplicando por ξ las de primera especie y por η las de segunda

$$a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} = \xi a$$

$$\frac{a_{zx}\, a_{xy}}{a_{yz}} + \frac{a_{xy}\, a_{yz}}{a_{zx}} + \frac{a_{yz}\, a_{zx}}{a_{xy}} = \eta\, a$$

$$\eta\, a_{xx} = \xi\, \frac{a_{zx}\, a_{xy}}{a_{yz}}, \quad \eta\, a_{yy} = \xi\, \frac{a_{xy}\, a_{yz}}{a_{zx}}, \quad \eta\, a_{zz} = \xi\, \frac{a_{yz}\, a_{zx}}{a_{xy}}$$

$$\eta^2\, a_{xx}\, a_{yy} = \xi^2\, a^2_{xy}, \quad \eta^2\, a_{yy}\, a_{zz} = \xi^2\, a^2_{yz}, \quad \eta^2\, a_{zz}\, a_{xx} = \xi^2\, a^2_{zx}.$$

Por otra parte, las fórmulas de transformación se modifican también por la aparición de los factores $\frac{\xi}{\eta}$ y $\frac{\eta}{\xi}$ en algunos de sus términos, como se reconoce inmediatamente siguiendo paso á paso la obtención de dichas fórmulas, que ahora serán

$$a_{xx} = a_{x'x'}\, \alpha_1^2 + a_{y'y'}\, \beta_1^2 + a_{z'z'}\, \gamma_1^2 +$$
$$+ 2\frac{\xi}{\eta}\, a_{y'z'}\, \beta_1\, \gamma_1 + 2\frac{\xi}{\eta}\, a_{z'x'}\, \beta_1\, \gamma_1 + 2\frac{\xi}{\eta}\, a_{x'y'}\, \alpha_1\, \beta_1$$

. . . . . .

$$a_{yz} = a_{x'x'}\, \frac{\eta}{\xi}\, \alpha_2\, \alpha_3 + a_{y'y'}\, \frac{\eta}{\xi}\, \beta_2\, \beta_3 + a_{z'z'}\, \frac{\eta}{\xi}\, \gamma_2\, \gamma_3 +$$
$$+ a_{y'z'}\, (\beta_2\, \gamma_3 + \beta_3\, \gamma_2) + a_{z'x'}\, (\gamma_2\, \alpha_1 + \gamma_1\, \alpha_3) +$$
$$+ a_{x'y'}\, (\alpha_1\, \gamma_2 + \alpha_2\, \gamma_1)$$

. . . . . .

La observación que acabamos de hacer puede utilizarse para eliminar una falta de simetría que existe en las fórmulas sencillas de transformación: en las componentes de primera especie los factores de $a_{y'z'}$ ..... aparecen multiplicados por el 2, mientras en las de segunda especie los factores de $a_{x'x'}$ carecen de dicho coeficiente. Para que desaparezca dicha asimetría bastará hacer

$$2\frac{\xi}{\eta} = \frac{\eta}{\xi} \qquad \text{ó} \qquad \frac{\eta}{\xi} = \sqrt{2},$$

relación que se cumple dando á η y ξ los valores

$$\eta = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \xi = 1.$$

Así las nuevas componentes, que Voigt llama ortogonales, serán

$$\begin{aligned} A_{xx} &= a_{xx}, & A_{yz} &= \sqrt{2}\, a_{yz}, \\ A_{yy} &= a_{yy}, & A_{zx} &= \sqrt{2}\, a_{zx}, \\ A_{zz} &= a_{zz}, & A_{xy} &= \sqrt{2}\, a_{xy}, \end{aligned}$$

y para su transformación podremos escribir de modo análogo que para los vectores:

	A_{xx}	A_{yy}	A_{zz}	A_{yz}	A_{zx}	A_{xy}
$A_{x'x'}$	α_1^2	α_2^2	α_3^2	$\sqrt{2}\,\alpha_2\,\alpha_3$	$\sqrt{2}\,\alpha_3\,\alpha_1$	$\sqrt{2}\,\alpha_1\,\alpha_2$
$A_{y'y'}$	β_1^2	β_2^2	β_3^2	$\sqrt{2}\,\beta_2\,\beta_3$	$\sqrt{2}\,\beta_3\,\beta_1$	$\sqrt{2}\,\beta_1\,\beta_2$
$A_{z'z'}$	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	$\sqrt{2}\,\gamma_2\,\gamma_3$	$\sqrt{2}\,\gamma_3\,\gamma_3$	$\sqrt{2}\,\gamma_1\,\gamma_2$
$A_{y'z'}$	$\sqrt{2}\,\beta_1\,\gamma_1$	$\sqrt{2}\,\beta_2\,\gamma_2$	$\sqrt{2}\,\beta_3\,\gamma_3$	$(\beta_2\,\gamma_3 + \beta_3\,\gamma_2)$	$(\beta_3\,\gamma_1 + \beta_1\,\gamma_3)$	$(\beta_1\,\gamma_2 + \beta_2\,\gamma_1)$
$A_{z'x'}$	$\sqrt{2}\,\gamma_1\,\alpha_1$	$\sqrt{2}\,\gamma_2\,\alpha_2$	$\sqrt{2}\,\gamma_3\,\alpha_3$	$(\gamma_2\,\alpha_3 + \gamma_3\,\alpha_2)$	$(\gamma_3\,\alpha_1 + \gamma_1\,\alpha_3)$	$(\gamma_1\,\alpha_2 + \gamma_2\,\alpha_1)$
$A_{x'y'}$	$\sqrt{2}\,\alpha_1\,\beta_1$	$\sqrt{2}\,\alpha_2\,\beta_2$	$\sqrt{2}\,\alpha_3\,\beta_3$	$(\alpha_2\,\beta_3 + \alpha_3\,\beta_2)$	$(\alpha_3\,\beta_1 + \alpha_1\,\beta_3)$	$(\alpha_1\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta_1)$

La conveniencia de elegir entre las componentes sencillas y las ortogonales depende del problema que haya de resolverse.

En lo dicho hasta aquí, respecto de la transformación de coordenadas, hemos prescindido de la distinción entre las dos clases de tensores. Sín embargo, aquí, como en los vectores, la transformación de coordenadas suministra un criterio para distinguir las componentes de un vector polar de las componentes de un vector axial. Ya dijimos más arriba que el signo de un tensor de esta última clase depende del sistema de coordenadas adoptadas, y como una inversión cambia la naturaleza de aquél, el tensor y sus componentes habrán de cambiar de signo en una de dichas transformaciones. Así, pues, el esquema de transformación para los vectores axiales se deduce del anterior, multiplicando cada uno de sus elementos por el determinante Δ de los cosenos directores de los nuevos ejes, de igual manera que hemos visto en los vectores.

37. *Suma de tensores.*—Cuando en un mismo punto de un medio tienden á producirse fenómenos tensoriales de idéntica naturaleza, pero de distinto argumento, el fenómeno resultante no puede nunca representarse por un tensor único. Esta propiedad distingue claramente un tensor de un vector y de una cantidad escalar; tanto en uno como en el otro caso la superposición de varias magnitudes de la misma especie engendra una magnitud homogénea con ellas.

Por analogía con el cálculo vectorial, para realizar la suma de varios tensores, sumaremos las componentes homóogas:

$$A_{xx} = \Sigma_n a_{xx}^{(i)}, \qquad A_{yy} = \Sigma_n a_{yy}^{(i)}, \qquad A_{zz} = \Sigma_n a_{zz}^{(i)},$$
$$A_{yz} = \Sigma_n a_{yz}^{(i)}, \qquad A_{zx} = \Sigma_n a_{zx}^{(i)}, \qquad A_{xy} = \Sigma_n a_{xy}^{(i)}.$$

Estas seis magnitudes no pueden considerarse como las componentes de un tensor, porque entre ellas no se cumplen

las relaciones que ligan necesariamente á dichas componentes; pero se transforman como dichas componentes.

Si las tomamos como coeficientes de la ecuación de una cuádrica con centro,

$$\varphi \equiv A_{xx}\lambda^2 + A_{yy}\mu^2 + A_{zz}\nu^2 + 2A_{yz}\mu\nu + 2A_{zx}\nu\lambda + \\ + 2A_{xy}\lambda\mu = \pm\frac{1}{r^2},$$

donde λ, μ, ν, son los cosenos directores de un radio vector r y el signo $\pm$ se elige de suerte que $\frac{1}{r}$ sea real, la magnitud $\frac{1}{r^2}$ posee los caracteres que distinguen á un tensor. El conjunto de todos los tensores así definidos por φ, desempeña aquí el mismo papel que la resultante en un sistema de vectores; en efecto, así como el módulo de la resultante es la suma de las componentes de todos los vectores en su propia dirección, vamos á demostrar que *el tensor definido por φ en cada dirección es la suma de las componentes de primera especie de todos los tensores en aquella dirección.*

Descompongamos para ello los coeficientes de φ y agrupemos los términos que correspondan á cada tensor; sin dificultad se observa, dada la relación que liga los componentes a_{ij}, que

$$\varphi \equiv \sum_n \left[\sqrt{a_{xx}^{(i)}}\,\lambda + \sqrt{a_{yy}^{(i)}}\,\mu + \sqrt{a_{zz}^{(i)}}\,\nu\right]^2 = \sum_n a^{(i)}(\lambda^{(i)}\lambda + \mu^{(i)}\mu + \nu^{(i)}\nu)^2$$

que demuestra nuestra proposición.

Refiriendo la cuádrica á sus ejes, y escribiendo

$$A^{(1)} = \frac{1}{a^2}, \qquad A^{(2)} = \frac{1}{b^2}, \qquad A^{(3)} = \frac{1}{c^2},$$

se obtiene

$$\varphi \equiv A^{(1)}\lambda^2 + A^{(2)}\mu^2 + A^{(3)}\nu^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Las fórmulas para el cambio de ejes, dan inmediatamente

$$A_{xx} = \Sigma A^{(i)} \alpha_i^2 = \Sigma A_{xx}^{(i)} \qquad A_{yz} = \Sigma A^{(i)} \beta_i \gamma_i = \Sigma A_{yz}^{(i)}$$
$$A_{yy} = \Sigma A^{(i)} \beta_i^2 = \Sigma A_{yy}^{(i)} \qquad A_{zx} = \Sigma A^{(i)} \gamma_i \lambda_i = \Sigma A_{zx}^{(i)}$$
$$A_{zz} = \Sigma A^{(i)} \gamma_i^2 = \Sigma A_{zz}^{(i)} \qquad A_{xy} = \Sigma A^{(i)} \lambda_i \mu_i = \Sigma A_{xy}^{(i)}$$

Comparando los últimos miembros de estos ecuaciones con las que han servido para definir A_{xx}..... A_{iz}....., se reconoce la equivalencia del conjunto de los tensores $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, con el sistema dado, al cual pueden reemplazar; de otra manera, *cualquiera que sea el sistema de tensores existentes en un punto, puede sustituirsele por otro constituído por tres mutuamente perpendiculares.* El conjunto de estos tres tensores ha sido llamado por Voigt *triple tensor* y desempeña funciones análogas á las componentes de un vector según los ejes coordenados, y la cuádrica φ recuerda la construcción del paralelepípedo de aquellas componentes.

La suma de las componentes de primera especie del triple tensor es un invariante igual á la suma de los módulos de los tensores.

Seis funciones que se transformen según el esquema indicado más arriba, serán en general los componentes de un triple divisor, que se confundirá con un tensor sencillo si además se cumplen entre ellas las relaciones (*a*) del párrafo 35.

Como ejemplo interesante y sencillo citaremos las seis magnitudes siguientes, funciones de las componentes de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

$$p_x q_x, \qquad p_y q_y, \qquad p_z q_z,$$

$$\frac{1}{2}(p_y q_z + p_z q_y), \quad \frac{1}{2}(p_z q_x + p_x q_z), \quad \frac{1}{2}(p_x q_y + p_y q_x).$$

Si llamamos λ, μ, ν, los cosenos directores de $\vec{p}$ y λ_1, μ_1, ν_1, los de $\vec{q}$, se ve inmediatamente que

$$p_x q_x = pq\,\lambda\lambda_1 = pq\,(\lambda'\alpha_1 + \mu'\beta_1 + \nu'\gamma_1)(\lambda'_1\alpha_1 + \mu'_1\beta_1 + \nu'\gamma_1) = p_{x'}q_{x'}\alpha_1^2 + p_{y'}q_{y'}\beta_1^2 + p_{z'}q_{z'}\gamma_1^2 + 2\frac{1}{2}(p_{y'}q_{z'} + p_{z'}q_{y'})\beta_1\gamma_1 + 2\frac{1}{2}(p_{z'}q_{x'} + p_{x'}q_{z'})\gamma_1\alpha_1 + 2\frac{1}{2}(p_{x'}q_{y'} + p_{y'}q_{x'})$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2}(p_y q_z + p_z q_y) = \frac{1}{2}pq\,(\mu\nu_1 + \mu_1\nu) = \frac{1}{2}pq\Big[(\lambda'\alpha_2 + \mu'\beta_2 + \nu'\gamma_2)(\lambda'_1\alpha_3 + \mu'_1\beta_3 + \nu'_1\gamma_3) + (\lambda'\alpha_3 + \mu'\beta_3 + \nu'\gamma_3)(\lambda'_1\alpha_2 + \mu'_1\beta_2 + \nu'_1\gamma_2)\Big] = p_{x'}q_{x'}\alpha_2\alpha_3 + p_{y'}q_{y'}\beta_2\beta_3 + p_{z'}q_{z'}\gamma_2\gamma_3 + 2\frac{1}{2}(p_{y'}q_{z'} + p_{z'}q_{y'})(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) + 2\frac{1}{2}(p_{z'}q_{x'} + p_{x'}q_{z'})(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) + 2\frac{1}{2}(p_{x'}q_{y'} + p_{y'}q_{x'})(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)$$

. . . . . .

fórmulas de transformación que demuestran que las seis funciones de $\vec{p}$ y $\vec{q}$ transcritas, son las componentes de un triple tensor puesto entre ella, no se cumplen las relaciones (*a*) del párrafo 35.

Por el contrario, si $\vec{p} = \vec{q}$ caemos en el caso del tensor ya estudiado en el párrafo 36.

El invariante del triple tensor es el producto escalar de los dos vectores. El triple tensor será polar si $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son de la misma naturaleza y axial en el caso contrario.

Según lo dicho más arriba este triple tensor se notará

$$\left\| \vec{p}\ \vec{q}\ . \right\|$$

38. *Producto de tensores.*—Sin más explicación se reconoce que el producto de una magnitud escalar por un tensor, no altera el carácter de este último, introduciendo únicamente un cambio en su módulo. Lo mismo puede decirse respecto de un triple tensor.

Si consideramos dos tensores, podemos distinguir dos casos, que por su estrecha analogía con el producto de dos vectores podemos llamar producto escalar y producto tensor. El producto escalar está definido por la expresión

$$\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b} = a\,b\cos^2(\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b}) = a\,b\,(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')^2,$$

llamando λ, μ, ν los cosenos directores de $\overleftrightarrow{a}$ y λ', μ', ν' los de $\overleftrightarrow{b}$. Desarrollando el paréntesis, se obtiene

$$\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b} = a_{xx}\,b_{xx} + a_{yy}\,b_{yy} + a_{zz}\,b_{zz} + 2a_{yz}\,b_{yz} + 2a_{zx}\,b_{zx} + 2a_{xy}\,b_{xy}.$$

La naturaleza escalar de cualquiera de las formas en que se ha escrito el producto $\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b}$ es evidente.

Si uno de los factores es el argumento de un tensor $\overleftrightarrow{a}^0$ el producto escalar se reduce evidentemente á $b\cos^2\left(\overleftrightarrow{b}\ \overleftrightarrow{a}\right)$, ó sea la componente de primer especie de $\overleftrightarrow{b}$ en la dirección de $\overleftrightarrow{a}$

Multiplicando $\overleftrightarrow{a}$ por varios tensores $\overleftrightarrow{b}$, $\overleftrightarrow{b'}$, $\overleftrightarrow{b''}$ ..... y sumando, se obtiene

$$\Sigma_i\,\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b}^{(i)} = a_{xx}\,\Sigma_i\,b_{xx}^{(i)} + a_{yy}\,\Sigma_i\,b_{yy}^{(i)} + a_{zz}\,\Sigma_i\,b_{zz}^{(i)} +$$
$$+ 2a_{yz}\,\Sigma_i\,b_{yz}^{(i)} + 2a_{zx}\,\Sigma_i\,b_{zx}^{(i)} + 2a_{xy}\,\Sigma_i\,b_{xy}^{(i)}$$

donde

$$\Sigma_i\, b_{xx}^{(i)} \ldots\ldots \qquad \Sigma_i\, b_{yz}^{(i)} \ldots\ldots$$

son las componentes del triple tensor suma de los $\overleftrightarrow{b}^{(i)}$; así podemos escribir

$$\Sigma_i\, \overleftrightarrow{a}\, \overleftrightarrow{b}^{(i)} = \overleftrightarrow{a}\, \Sigma_i\, b^{(i)} = \overleftrightarrow{a}\, \overleftrightarrow{B},$$

que puede traducirse al lenguaje vulgar como una generalización de la ley distributiva.

Si esta ecuación la repetimos para otros tensores $\overleftrightarrow{a}^{(i)}$ combinados siempre con el mismo $\overleftrightarrow{B}$ y sumamos, encontraremos de una manera más general que

$$\Sigma_{ji}\, \overleftrightarrow{a}^{(j)}\, \overleftrightarrow{b}^{(i)} = \overleftrightarrow{A}\, \overleftrightarrow{B},$$

gualdad que se puede interpretar también, como una extensión de la noción del producto escalar al producto de dos triple-tensores. Por otra parte, podríamos haber afirmado, desde luego, la invariancia de este producto en un cambio de ejes, teniendo en cuenta el esquema de transformación de sus componentes.

Recíprocamente: si una cantidad escalar se puede escribir en la forma

$$F \equiv LA_{xx} + MA_{yy} + NA_{zz} + 2PA_{yz} + 2QA_{zx} + 2RA_{xy}$$

donde A_{xx}, A_{yy} ..... A_{yz} ..... son las componentes de un tensor ó de un triple tensor, las magnitudes L, M, N y P, Q, R son las componentes de primera y segunda especie, respectivamente, de un triple tensor. En efecto, cambiando los ejes coordenados y ordenando respecto de las nuevas componentes de $\overleftrightarrow{A}$, los coeficientes se transforman como los cuadrados y los productos de las coordenadas.

Se reconoce sin nueva explicación que el producto escalar será una magnitud escalar propiamente dicha ó una pseudo-escalar, según que los dos tensores sean ó no de la misma clase; y, recíprocamente: si F es una cantidad escalar, el tensor cuyas componentes son L..... P..... es de igual clase que el A_{xx} ..... A_{yz} ....., mientras que si F es pseudo-escalar dichos dos tensores serán de distinta naturaleza.

Consideremos ahora la expresión

$$a\,b\,\mathrm{sen}^2(\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b})$$

y expresemos el seno en función de los cosenos directores λ, μ, ν; λ', μ', ν' de $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$. Se reconoce inmediatamente que

$$ab\,\mathrm{sen}^2(\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b}) = ab\,(\mu\nu' - \mu'\nu)^2 + ab\,(\nu\lambda' - \nu'\lambda)^2 + \\ + ab\,(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2,$$

y teniendo en cuenta que los paréntesis del segundo miembro son los cosenos directores de la normal al plano definido por $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$, podemos considerar los tres términos de dicho miembro como las tres componentes de primera especie de un nuevo tensor normal á los $\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b}$, cuyas componentes de segunda especie se obtienen inmediatamente, sin más que aplicar las mismas definiciones, puesto que se conocen los cosenos del eje, según acabamos de decir. Este producto de los tensores $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ es el *producto tensor*, cuyo módulo será $a\,b$ $\mathrm{sen}^2(\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b})$ y el argumento normal al plano $\overleftrightarrow{a}\ \overleftrightarrow{b}$: sus componentes, expresadas en función de las componentes de $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$, son

$$c_{xx} = (a\,b)\,(\mu\nu' - \mu'\nu)^2 = a_{yy}\,b_{zz} + a_{zz}\,b_{yy} - 2a_{yz}\,b_{yz}$$
$$c_{yy} = (a\,b)\,(\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 = a_{zz}\,b_{xx} + a_{xx}\,b_{zz} - 2a_{zx}\,b_{zx}$$
$$c_{zz} = (a\,b)\,(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2 = a_{xx}\,b_{yy} + a_{yy}\,b_{xx} - 2a_{xy}\,b_{xy}$$

$$c_{yz} = (a\,b)\,(\nu\lambda' - \nu'\lambda)\,(\lambda\mu' - \lambda'\mu) = a_{xy}\,b_{xz} + a_{xz}\,b_{xy} - a_{xx}\,b_{yz} - a_{yz}\,b_{xx}$$
$$c_{zx} = (a\,b)\,(\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,(\mu\nu' - \mu'\nu) = a_{yz}\,b_{xy} + a_{xy}\,b_{yz} - a_{yy}\,b_{zx} - a_{zx}\,b_{yy}$$
$$c_{xy} = (a\,b)\,(\mu\nu' - \mu'\nu)\,(\nu\lambda' - \lambda\nu') = a_{zx}\,b_{yz} + a_{yz}\,b_{zx} - a_{zz}\,b_{xy} - a_{xy}\,b_{zz}$$

Por un procedimiento idéntico al puesto en práctica para el producto escalar, se demuestra la ley distributiva del producto tensor, de suerte que de una manera general se puede escribir

$$\overleftrightarrow{C} = \left\| \overleftrightarrow{A}\ \overleftrightarrow{B} \right\|.$$

Se comprende sin dificultad que el tensor $\overleftrightarrow{C}$ es un triple tensor si cualquiera de los factores posee dicho carácter.

También se reconoce inmediatamente, fundándose en las propiedades de la transformación de coordenadas, que el tensor $\overleftrightarrow{C}$ es polar, siempre que $\overleftrightarrow{A}$ y $\overleftrightarrow{B}$ sean de idéntica naturaleza, y axial en el caso contrario.

(Continuará.)

XXVIII.—La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopía, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912.

(Continuación.)

POR DOMINGO DE ORUETA.

II

Aplicación de las radiaciones ultra-violetas á la microscopia.

PODER RESOLVENTE.—FÓRMULA DE ABBE

La idea de alumbrar al microscopio con radiaciones de onda más corta que las que componen el espectro visible, tuvo su origen en una de las fórmulas fundamentales de la teoría de la visión microscópica del profesor Carlos Ernesto Abbe, de la Universidad de Jena, y se deduce como consecuencia lógica é inmediata de lo que dicha fórmula nos demuestra. En efecto; el valor del poder resolvente de un objetivo (que es la fórmula á que nos referimos), viene dado, según las conclusiones de Abbe, por la siguiente expresión:

$$R = \frac{n \text{ sen } u}{\lambda} \qquad (1)$$

cuya fórmula se suele escribir también;

$$R = \frac{a}{\lambda} \qquad (2)$$

designando en la anterior con la letra a al numerador n sen u.

Examinemos los diversos términos que integran esta fórmula.

La letra R designa el *poder resolvente* de un objetivo de

microscopio; esto es, el grado en que dicho objetivo posee la propiedad de llevar á la imagen que del objeto forma, de *ver*, por decirlo así, los detalles de dicho objeto. Cuanto mayor sea el poder resolvente de un objetivo, tanto más pequeños serán los detalles que ese objetivo es capaz de *recoger* del objeto y *llevar* á la imagen. Dicho de otro modo; para ver los pequeñísimos detalles que contienen ciertos objetos se necesitará un objetivo de mucho poder resolvente; para ver detalles no tan pequeños, bastará un poder resolvente no tan grande; y, por consiguiente, la finura ó pequeñez de los detalles que el objetivo reproduce en la imagen, está en razón directa del poder resolvente de dicho objetivo.

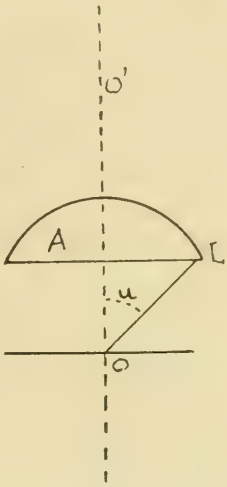


Figura 1.ª

Ahora bien, como uno de los principales problemas de la microscopía es investigar íntimamente las estructuras que se examinan y llegar al conocimiento de sus más pequeños detalles, fácilmente se comprende la grande importancia que tiene en esta ciencia el poder resolvente de los objetivos. Lógico es, por lo tanto, que los ópticos se hayan preocupado de aumentarlo por todos los medios á su alcance. La fórmula (1) nos dice que estos medios son dos, y nada más que dos; aumentar el numerador de la fracción de que depende el valor de R ó disminuir el denominador de la misma.

El numerador n sen u, designado á veces por a, es lo que Abbe llama *apertura numérica* del objetivo; término nuevo introducido por él en microscopía. Se compone de dos factores, que son n y sen u. El primero es el índice de refracción de todos los medios que la luz atraviesa desde que sale del objeto hasta que sale de la lente frontal del objetivo, á

saber: 1.°, el medio de montura del objeto, aire (objetos montados en seco) agua, glicerina, bálsamo de Canadá, etc.; 2.°, el cubre-objeto; 3.°, el medio que llena el hueco que forzosamente tiene que dejarse entre la cara superior del cubre-objeto y la inferior de la lente frontal del objetivo, para poder enfocar y para poder mover la preparación; y, por último, 4.°, la lente frontal del objetivo. El segundo factor sen u es el seno del ángulo que forma con el eje óptico el *rayo límite*. Este rayo, representado por $O\ L$ en el diagrama, es el último de todos los que el objetivo puede recoger y llevar á la imagen, y, por consiguiente, el ángulo u del diagrama es el mayor de los que forman con el eje óptico $O\ O$ los infinitos rayos que, partiendo del objeto O, inciden en el objetivo A. Los objetivos modernos están construidos de tal modo y con materiales tan especiales, que aprovechan todos los rayos que tocan á la frontal, hasta los que inciden casi en el mismo borde de ésta, como se ha representado en el diagrama.

El denominador de la fracción consta de un solo término, de la letra λ, que, como ya hemos dicho, representa siempre en óptica á la longitud de onda de la luz que alumbra al obeto, y que en este caso puede ser, ó una radiación monocromática de tal ó cual longitud de onda, ó un haz de luz natural compuesto de infinitas radiaciones (*)

MEDIOS DE AUMENTAR EL VALOR DE R

Para el profesor Abbe y sus colaboradores en aquella época, el problema se planteaba, pues, con dos soluciones: la de aumentar el numerador n sen u; y la de disminuir el denominador jλ. La segunda era entonces (1873 á 1875) mucho menos factible que la primera; porque ni el espectro ultravioleta se conocía bien, ni era cosa fácil obtener luces ricas

(*) Cuando se alumbra al microscopio con luz visible y natural, ó sea luz blanca, se asigna á λ el valor 0,55 μ que corresponde á la radiación verde-amarilla, contigua á la raya E del espectro. Se hace así por ser esta radiación la que más impresiona á la retina humana.

en estas radiaciones, ni los medios de operar de que se disponía permitían intentar con probabilidades de éxito la aplicación al microscopio de radiaciones de menor onda que las azules y violetas que terminan al espectro visible por su extremo más refrangible. Se hubieron de limitar, pues, á alumbrar los objetos sujetos á examen con luz de estos dos colores, y de este modo aumentaban el poder de resolución de los objetivos cuando querían llegar á los límites extremos de la visión microscópica.

PERFECCIONAMIENTOS DE LA APERTURA

En cambio, dedicaron toda su atención y todos sus esfuerzos á la primera solución: á aumentar la apertura numérica de los objetivos, ó sea el numerador n sen u de la fórmula (1). La historia de estos trabajos llenaría un libro entero, que no estaría por cierto desprovisto de interés. Comenzaron con la generalización de los objetivos de inmersión en líquidos del mismo índice que el vidrio empleado para el cubre-objeto y frontal del objetivo (inmersión homogénea) cuyos objetivos, que ya habían sido descubiertos por el microscopista inglés J. W. Stephenson, Abbe generalizó y perfeccionó después. Siguió luego una serie de trabajos encaminados á obtener vidrios de propiedades ópticas definidas y constantes, con proporcionalidad casi absoluta entre el índice de refracción y el poder dispersivo. Estos vidrios se fabricaron en la Vidriería Científica de Jena por procedimientos especiales y con substancias distintas de las que entonces se empleaban para los *crown-glass* y *flint-glass*. El resultado fué la serie actual de *Vidrios de Jena*, con los que el óptico puede construir sus objetivos de conformidad con los resultados de las fórmulas que han servido para calcularlos, sin verse obligado á apartarse de aquéllas por deficiencia de las propiedades ópticas de los materiales. Buscaron después substancias, como el espato fluor, con propiedades especiales, que sustituídas al vidrio en alguna,

ó algunas de las lentes de los objetivos, mejoraban las correcciones cromática y esférica de éstos. Por último, desterraron de las construcciones ópticas el carácter un tanto empírico que hasta entonces habían tenido, consiguiendo que los dos factores ópticos principales de los objetivos, apertura numérica y correcciones cromática y esférica, pudiesen calcularse matemáticamente de antemano. Al mismo tiempo se llegó á tal perfección en la fabricación de objetivos, que los resultados prácticos concordaban exactamente con los que previamente habían dado las fórmulas, y como consecuencia, todos los objetivos construídos con arreglo á una de éstas son iguales en propiedades ópticas, sin que el microscopista más hábil pueda notar diferencias.

Originó todo esto una renovación completa en la óptica de precisión, y muy especialmente en la óptica microscópica, que se tradujo en un perfeccionamiento verdaderamente extraordinario de los objetivos acromáticos y en la creación del nuevo y perfectísimo tipo de *apocromáticos*, inventado por Abbe, en los que la apertura numérica alcanza su valor máximo, merced á que las correcciones cromática y esférica son prácticamente totales; y decimos *prácticamente totales*, porque si bien quedan en estos objetivos resíduos cromáticos de tercer orden, la retina humana no tiene sensibilidad suficiente para apreciarlos, y por lo tanto, *prácticamente* no existen, aun cuando *teóricamente* existan (*).

(*) Además de estas propiedades, tanto los *apocromáticos* como la inmensa mayoría de los objetivos *acromáticos modernos* (que así se llaman) tienen otra que los caracteriza y que los diferencia de los anteriores á la época de Abbe. Esta propiedad es *su poco aumento*, que en los objetivos más potentes de hoy día rara vez llega á 200 diámetros de aumento propio; cifra que representa la mitad ó menos de la mitad, del que solían tener los objetivos antiguos. Esto nos lo dice también la fórmula (1), examinando la cual vemos que el poder resolvente no depende del aumento y sí de factores que nada tienen que ver con éste. Esta deducción de Abbe es una de las más importantes de su teoría y destruye de plano la idea antigua y todavía bastante

Estos trabajos se llevaron á cabo en Jena, bajo la dirección del profesor Abbe, ya director y copropietario de la Casa Carl Zeiss, y ayudado por el Dr. Sigfried Czapskí y otros colaboradores, entre los cuales merece citarse también aun cuando no perteneciese á la casa Zeiss, al Dr. Otto Schott, director que era entonces y sigue siendo aún de la Vidriería Científica de Jena.

Traduciendo en cifras los resultados, se ha llegado á construir un objetivo de 1,60 de apertura numérica, que trabaja con inmersión en monobromuro de naftalina, líquido cuyo índice de refracción es 1,63. Pero este objetivo lleva consigo tales restricciones, que su empleo sólo resulta posible en muy contados casos y para determinados objetos. De aquí

---

extendida por desgracia, de que el factor principal en la visión microsopica es el aumento. Abbe ha desarrollado este punto en un trabajo célebre que lleva por título «The Relation of Aperture and Power in the Microscope» (*Journal of the Royal Microscopical Society,* 1882-1883), y en él establece la relación *necesaria y suficiente* entre ambos factores, apertura y aumento; demostrando que todo lo que sea pasar de esta relación no sólo es innecesario, sino que el perjudicial para la visión clara del objeto. Por cierto que los microscopistas ingleses han sintetizado este resultado de Abbe en una fórmula ó *receta* práctica que lo define muy bien y que es: «El aumento no debe exceder de mil veces la apertura.» Aplicando esta fórmula al objetivo de mayor apertura que hoy se conoce para luz visible, al apocromático de 1,6 ap. num ª (inmersión en monobromuro de naftalina), resulta que el mayor aumento á que debe trabajarse con este objetivo, combinado con el ocular, es á 1.600 diámetros Compárese esta cifra con los 4.000 y 5.000 diámetros á que trabajaban algunos de los antiguos objetivos de Ross, Powel y Lealand y otros.

Pudiera exfrañar al lector lo exiguo de las cifras de aumento de los objetivos modernos. No hay motivos para ello, sin embargo, s nos fijamos en las condiciones de visibilidad de la retina. Un ojo normal ve á 25 centímetros de distancia (distancia mínima de visión clara que coincide con la que media entre el ojo y la imagen virtual del ocular) todos los objetos de un tamaño tal que dos líneas trazadas por los bordes opuestos del objeto y que concurran al centro de la retina, formen entre sí un ángulo igual, por lo menos, ó mayor de tres minutos de grado. Ahora bien; un objetivo de 1,60 de apertura, el más potente que hoy existe para luz visible, reproduce en la ima-

que su uso no se haya generalizado y que se haya suspendido su construcción. En realidad, el límite máximo lo determinan los objetivos de 1,40 á 1,42 de apertura numérica é inmersión homogénea, que pueden aplicarse á todas las investigaciones, y son, por consiguiente, de uso general.

DIFICULTADES QUE OFRECE PASAR DEL LÍMITE ACTUAL DE APERTURA

¿Podrá llegarse en el porvenir á aperturas mayores? Todo induce á creer que no. Volvamos al numerador de la fór-

---

gen detalles del objeto cuyo tamaño está matemáticamente determinado por una fórmula derivada de la (1), que es:

$$\delta = \frac{\lambda}{2\, n \operatorname{sen} u}$$

y es *ópticamente imposible* que reproduzca detalles menores. El problema se plantea, pues, en los siguientes términos: Determinar qué aumento debe tener el microscopio para que podamos ver bien un detalle del tamaño δ; ó lo que es lo mismo, para que ese detalle aparezca en la imagen final del microscopio con una dimensión tal que dos líneas trazadas por sus bordes opuestos y que concurran á la retina, subtiendan un ángulo no menor de tres minutos. Este cálculo se hace fácilmente, y resulta, tanto en el caso de la apertura 1,60, como en todos los demás, que el aumento necesario es relativamente muy pequeño, inferior siempre al de mil veces la apertura, que dicen los ingleses traduciendo la fórmula de Abbe. Con este aumento de mil veces en la apertura se verán, pues, todos los detalles que *la imagen contiene.* Con más aumento no se verán detalles mas pequeños, no porque no existan en el objeto, sino porque la imagen no los contiene. Los que contiene se verán más grandes; pero en cambio se verán menos claros, como sucede con una fotografía cuando se la amplía demasiado.

Así, pues, el aumento es un factor necesario en la visión microscópica; pero ni es el primero ni el más esencial. El más esencial es el poder resolvente; esto es, llevar á la imagen detalles, los más pequeños que se puedan. Aumentar después estos detalles para que se vean, es problema mucho más fácil que el primero. Por esto, esa pregunta que tantas veces se hace ante un microscopio, y que consiste en decir: ¿Cuánto aumenta? envuelve un concepto erróneo y anticientífico, porque supone que el mérito del instrumento está en aumentar mucho las cosas.

mula (1) al término n sen u. Por lo que se refiere á sen u, nunca se podrá pasar del valor máximo del seno de un ángulo, que es la unidad, y corresponde á un ángulo recto; pero en la práctica no se podrá llegar tampoco á este valor, porque para que el ángulo u fuese recto, sería preciso que la lente frontal A del objetivo (véase el diagrama) estuviese en inmediato contacto con el objeto, para que su plano inferior coincidiese con el de éste, y esto es imposible; porque entre uno y otra ha de quedar cierto espacio para que quepa el cubre-objeto, para que pueda ponerse el líquido de inmersión y para poder mover la preparación y enfocar el objetivo. En los objetivos modernos se ha llegado á valores de 0,90 y hasta 0,95 para sen u, que corresponden á distancias de *una ó dos décimas de milímetro* entre el cubre-objeto y la frontal del objetivo. Pasar de ahí es prácticamente imposible.

Nos quedan el factor n, que ya hemos dicho es el índice de refracción de los medios que hay entre el objeto y la frontal del objetivo, incluso esta última. Para los medios vítreos, frontal y cubre-objeto, se puede llegar á índices muy altos, quizá iguales á 2, porque en la Vidriería Científica de Jena se podrían construir vidrios que los poseyesen; pero con el líquido de inmersión y medio de montura del objeto no sucede lo mismo, porque no se conocen cuerpos de alto índice que además sean líquidos ó semi líquidos y puedan servir para tal empleo. Los pocos que se conocen de índice superior á 1,40, ó son corrosivos para las substancias orgánicas, como el monobromuro de naftalina ya ensayado en el objetivo de 1,60; ó son corrosivos para las lentes, ó son sólidos como el diamante y los compuestos arsenicales de fósforo. Hasta ahora todas las investigaciones que se han hecho en este sentido han resultado infructuosas, y no hay motivos para esperar que en lo futuro suceda cosa distinta.

SOLUCIÓN DE REDUCIR LA LONGITUD DE ONDA

Agotados los medios de aumentar la apertura numérica, era natural que se pensase en la segunda solución que antes señalamos; en disminuir el denominador de la fracción que determina el poder resolvente (fórmula I) ó sea la longitud de onda de la luz que alumbra al objeto. Este fué el camino que condujo á la aplicación de la luz ultra-violeta al microscopio.

Se sabía de antiguo que las imágenes microscópicas se perfeccionaban cuando se alumbraba al objeto con luces del extremo más refrangible del espectro. El color violeta, sin embargo, no podía emplearse, porque la corrección de los objetivos no era bastante perfecta para un color como éste tan distante de la zona media del espectro, y también porque este color con las luces de que habitualmente dispone el microscopista es poco brillante y no da claridad bastante para distinguir bien la imagen. El primer inconveniente se salvó con los objetivos apocromáticos, que están bien corregidos para el color violeta; pero el segundo no tiene solución posible. Entonces y ahora, pues, dentro del espectro visible, la luz monocromática de onda más corta que puede aplicarse con éxito para alumbrar al microscopio es la azul, ó á lo sumo, la índigo; y aun esta última sólo cuando el manantial de luz empleado es el sol ó el arco eléctrico, que son relativamente ricos en ella. Traduciendo este resultado en cifras, diremos que antes de aplicarse los procedimientos actuales de luz ultra-violeta, el límite en cuanto á radiaciones de onda corta lo determinaban las de $\lambda = 0{,}46\ \mu$ á $\lambda = 0{,}48\ \mu$.

PRIMEROS TRABAJOS DE KOHLER. APARATOS PARA LUZ PRISMÁTICA

El Dr. Augusto Kohler, colaborador científico de la casa Zeiss, abordó el problema de aplicar al microscopio radiaciones ultra-violetas de onda más corta que las anteriores, y

después de una serie de trabajos continuados durante unos seis años, consiguió ver realizado su propósito, y pudo exponer en 1904 un aparato que realizaba prácticamente aquel fin. No entraremos á detallar los múltiples ensayos que condujeron á la luz ultra violeta, porque sería apartarnos demasiado del fin que perseguimos con estas notas. Nos limitaremos, por consiguiente, á indicar someramente la marcha seguida, las principales dificultades del problema, y la manera cómo se han resuelto (*)

Empezó el Dr. Kohler por aplicar al alumbrado del microscopio las radiaciones extremas del espectro visible (azul é índigo), pero en vez de obtenerlas por medio de vidrios de colores ó de filtros líquidos, empleó prismas de flint-glass y de sulfuro de carbono, que descomponían la luz blanca y permitían obtener aquellas radiaciones absolutamente puras y con más intensidad luminosa que con los vidrios y filtros, puesto que se suprimía la absorción que éstos siempre poseen en mayor ó menor grado. Anteriormente á los trabajos de Kohler se conocían aparatos para alumbrar al microscopio con luz prismática, pero eran poco prácticos y además no dispersaban bastante.

Los primeros trabajos de Kohler se hicieron con luces de acetileno, arco eléctrico y solar, y el resultado se publicó en 1899 (**). Se consiguió mayor brillo en las imágenes y mayor definición, porque en formarlas no intervenía más

(*) La exposición detallada de estos trabajos la encontrará el lector en la obra del Dr. Kohler, titulada: *Mikrophotographische Untersuchugen mit ultravioletten Lich* (Zeitschritf für wissenschaftliche Mikroskopie Technik). Band XXI, 1904; páginas 129 á 165, y 273 á 304.

(**) El título de este trabajo es: *Beleuchtungsapparat fur gleichmassige Beleuchtung mikroskopischer. Objecte mit beliebigem einfarbigen Licht.* (Zeitschrift für wissenschafliche Mikroskopie, &. Ban. XVI, 1899; páginas 1 á 28). Este artículo contiene un grabado del aparato y una descripción detallada del mismo. En las consideraciones generales que en él hace el autor sobre el alumbrado con luz prismática, ya se indica el camino á seguir para llegar á la ultravioleta.

que una radiación; esto es, porque la luz era realmente monocromática y no una mezcla de varios colores como sucede con los filtros líquidos y los vidrios (*).

Siguiendo el camino de Kohler, el microscopista inglés E. J. Spitta construyó otro aparato, muy ingenioso por cierto, para el mismo fin, en el que la descomposición de la luz blanca se efectúa por medio de la combinación de un prisma y de una red óptica; consiguiéndose así que la trayectoria de los rayos de luz sea telemétrica desde el foco productor al condensador del microscopio. En la obra *Microscopy*, de E. J. Spitta, página 168, pueden verse un grabado y una descripción de este aparato.

El autor de estas notas hubo también de idear un aparato para este objeto fundado, en las ideas de Kohler; pero modificando la disposición general para facilitar el manejo y poder pasar fácilmente de un color á otro sin cambiar el centrado de los elementos. En el Congreso Científico de Granada de 1911 hemos presentado un trabajo sobre este aparato, fotografías y planos del mismo, y algunos de los resultados obtenidos fotografíando con él. Se ha publicado con el título «Aparato para observación microscópica directa, dibujo y microfotografía con luz monocromática». Madrid, 1912.

RAYAS DE CADMIO Y EL MAGNESIO QUE SE UTILIZAN HOY

El alumbrado con luz prismática puso de manifiesto uno de sus mayores inconvenientes para el empleo de radiaciones de onda corta, que es la escasez de ellas en las luces que corrientemente se emplean para el alumbrado. Este inconveniente ya lo hemos señalado varias veces, y es tan serio que, aun llevando las cosas al límite, empleando la luz solar directa con todos sus inconvenientes, en cuanto se pasa de la

(*) En la actualidad fabrica la Vidriería Científica de Jena dos vidrios azules y uno verde-amarillo, que son realmente monocromáticos y poseen muy poca absorción para sus colores respectivos.

primera zona del color índigo ya no hay luz bastante. Resultó, pues, demostrado prácticamente que con los manantiales de luz que dan espectros continuos no es posible llegar ni aun siquiera á los límites extremos del espectro visible, y menos, por consiguiente, á los rayos ultra-violetas invisibles. Esta dificultad sugirió á Kohler la idea de acudir á los espectros interrumpidos de ciertos metales que poseen rayas muy brillantes en la región ultra-violeta. Una serie de ensayos sistemáticos lo llevaron á elegir los espectros del magnesio y del cadmio como los más á propósito para el objeto, y con ellos se ha llegado á los resultados actuales.

Se obtienen estos espectros por medio de una chispa eléctrica de alta tensión (8.000 voltios) que salta entre electrodos de magnesio ó cadmio; descomponiendo después esta luz en los aparatos que describiremos luego y dirigiendo al microscopio la radiación que se elija. El espectro del magnesio tiene dos rayas muy brillantes y muy á propósito para el caso; una está situada casi en el extremo del espectro visible y su longitud de onda es 0,448 μ; la otra está dentro de la zona ultra-violeta y su longitud de onda es 0,28 μ. La zona ultra-violeta del espectro del cadmio es muy rica en rayas brillantes. Examinando este espectro sobre una pantalla fluorescente (*) vemos primero un grupo de dos rayas, próximas entre sí y muy brillantes, cuya longitud de onda es respectivamente 0,275 μ y 0,257 μ. Sigue luego una zona con rayas más tenues y después un grupo de cinco, cuyas longitudes de onda son: 0,232 μ; 0,231 μ; 0,226 μ; 0,219 μ y 0,214 μ. (**) El Dr. Kohler empezó sus trabajos con la raya

(*) El fenómeno de la fluorescencia es demasiado conocido para que entremos en su descripción Las pantallas y vidrios fluorescentes que se emplean para la luz ultra-violeta son papeles impregnados de sales de urano ó vidrios á cuya masa fundida se han incorporado dichas sales.

(**) Las siete rayas que describimos en el espectro del cadmio son las designadas por Mascart (*Traité d'Optique*, volumen III, página 659), con los números 17, 18, 22, 23, 24, 25 y 26.

del magnesio $\lambda = 0{,}448$; siguió después con la de $\lambda = 0'28\ \mu$ y se fijó, por último, en la raya 17 del cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$, para la cual se corrigieron los objetivos, y que es, hoy por hoy, el límite á que se ha llegado en radiaciones ultra-violetas. Todas estas rayas ejercen acción química muy intensa sobre as placas fotográficas y las exposiciones son con ellas relativamente cortas. Su acción sobre las pantallas y vidrios fluorescentes es también ampliamente suficiente para poder enfocar las imágenes en la forma que veremos luego.

APLICACIÓN DEL CRISTAL DE ROCA Y CUARZO FUNDIDO

Encontradas luces á propósito, surgió la segunda dificultad, que fué la del material de que habían de construirse los elementos ópticos del sistema. Ya hemos visto que el vidrio no sirve; porque absorbe tanto las radiaciones ultra-violetas, que es opaco para todas las que se separan sensiblemente del color violeta, y desde luego están en este caso las de $0{,}28\ \mu$ y $0{,}275\ \mu$ de longitud de onda. Se conocía de antiguo la transparencia de cristal de roca para todas las radiaciones hasta $\lambda = 0{,}2\ \mu$, y al cristal de roca natural se apeló para construir los elementos ópticos del aparato de alumbrado: colimador, colector y prismas, así como también para los oculares y condensadores del microscopio; pero para construir los objetivos no sirve el cristal de roca natural, porque sus propiedades cristalinas alteran la imagen é impiden la corrección del objetivo. Fué preciso obtener bloques de cristal de roca fundido, que de este modo perdía sus propiedades cristalinas, conservando su transparencia. Estos bloques de cuarzo amorfo los obtuvo en la Vidriería Científica de Jena el Dr. Herskowitz, también colaborador científico de la casa Zeiss y de los trabajos del Dr. Kohler.

PROPIEDAD DE LOS MONOCROMÁTICOS DESCUBIERTA POR SWINGLE Y BRIGGS.

Los objetivos construídos de cuarzo fundido se corrigieron expresamente para la radiación $\lambda = 0{,}275\ \mu$ y solamente para ella. Recibieron por esto el nombre de *monocromáticos*, en contraposición al de apocromáticos que se da á los corregidos para todas las radiaciones del espectro visible. Ahora bien; al construirlos se pensaba que sólo servirían para la radiación antedicha, ó á lo sumo para aquellas cuya longitud de onda difiriese poco de ésta; pero luego se ha visto en la práctica que estos objetivos monocromáticos dan imágenes, si no perfectas, tolerablemente buenas al menos, con radiaciones muy distantes de la 0,275 μ, incluso con las amarillas y verdes del espectro visible, *con tal que estas radiaciones sean rigurosamente monocromáticas* (*).

(*) Los primeros que enunciaron esta curiosa propiedad fueron los naturalistas americanos Walter T. Swingle y Lyman J. Briggs en un artículo titulado «Improvements on the ultra-violet Microscope», publicado en la revista *Science*, volumen XXVI, páginas 180 á 183; Agosto, 1907. Notaron estos autores que, en virtud de las propiedades abióticas de la luz ultra-violeta, los tejidos orgánicos que examinaban (vegetales principalmente) se alteraban rápidamente bajo la acción de dicha luz. Para evitarlo, alumbraron su microscopio con una radiación del espectro visible, lo cual les permitía efectuar todas las operaciones preliminares de buscar, centrar, enfocar, etc., fuera de la acción nociva de la luz ultra-violeta, la que sólo empleaban el tiempo estrictamente necesario para obtener la fotografía. Como luz visible emplearon la raya del magnesio $\lambda = 0{,}448\ \mu$, sencillamente por lo muy á mano que la tenían en el aparato mismo de alumbrado. y observaron que las imágenes que con esta radiación daban los monocromáticos eran muy limpias y mostraban perfectamente definidos hasta los menores detalles. Idearon entonces un excitador especial para producir las chispas; el cual, por medio de un simple movimiento de rotación, permitía pasar de un alumbrado á otro; esto es, de la raya visible del magnesio γ 0,448 μ á la invisible del cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$, con lo cual se facilitaban mucho las manípulaciones.

El Dr. Kohler acogió la idea de Swingle y Briggs y declaró que, efectivamente, era cierta la propiedad de los monocromáticos seña-

Esta propiedad facilita notablemente el manejo de los rayos ultra-violetas, porque evita el cambio de objetivos, como sucedía cuando había que emplear los ordinarios para el examen con luz visible y los monocromáticos para los trabajos con la ultra-violeta. Pueden emplearse, y se emplean estos últimos para todo, y las largas operaciones de examen general de la preparación, centrado del objeto, etc., se efectúan tan bien como con los objetivos ordinarios siempre que la luz empleada sea monocromática, reservándose la ultra-violeta nada más que para fotografiar al objeto. El paso de una luz á otra se hace por cualquiera de los procedimientos descritos en la nota anterior.

---

lada por ellos; pero para sacar partido de ella no se contentó con la disposición del exitador móvil, sino que la modificó empleando una luz *naturalmente monocromática,* colocada delante de los prismas del aparato de alumbrado, y que, por consiguiente, entraba directamente en el microscopio sin necesidad de descomponerse en aquéllos. Consiste esta luz en un mechero de Bunsen, en el seno de cuya llama se introducen dos trozos de piedra pómez impregnados de cloruro de sodio, que comunican á la llama el color amarillo característico de este metal y la hacen prácticamente monocromática. Este mechero se fija en el trayecto de la radiación del cadmio y entre los prismas y el microscopio. Cuando el mechero está apagado, la luz ultra-violeta pasa libremente al microscopio por encima del extremo superior de aquél, y cuando está encendido y cortada la corriente eléctrica, el microscopio se alumbra con luz amarilla de sodio. Una llamita de gas que arde constantemente en la boquilla del mechero, permite encender éste con solo abrir la llave de gas. La combinación de esta llave con el interruptor de la corriente verifica el cambio de una luz á otra sin necesidad de alterar la posición de los demás elementos del aparato de alumbrado (A. Kohler, «Swingles Einstellverfaharen fur die Mikropotographie mil ultraviolettem Licht», 1907.

La disposición de Kohler es muy práctica y cómoda; pero sólo es aplicable en los laboratorios adonde hay gas. Cuando no lo hay, se la sustituye, bien con una lámpara eléctrica ordinaria, bien con una lámpara Nerts, provistas siempre de uno de los vidrios monocromáticos que recientemente ha puesto á la venta la Vidriería Científica de Jena y que pueden adquirirse de cualquier fabricante de microscopios y accesorios. El soporte de la lámpara se monta sobre una corredera para poder intercalarla rápidamente en el trayecto de los rayos de alumbrado.

MONOCROMÁTICOS ACTUALES. PODER RESOLVENTE RELATIVO

En la actualidad se construyen los siguientes objetivos monocromáticos:

Tipo	FACTORES ÓPTICOS	Poder resolvente relativo.
Seco.....	5 mm. distancia focal, 0,35 a. n....	0,70
Inmersión.....	2,5 íd. íd. íd. 0,85 íd...	1,70
Idem.....	1,7 íd. íd. íd. 1,25 íd...	2,50

El líquido de inmersión para los dos objetivos más potentes es una mezcla de glicerina y agua, de índice de refracción exactamente determinado para cada objetivo.

Las iniciales *an* de la segunda columna significan la apertura numérica del objetivo; esto es, el factor *n* sen *u* de la fórmula 1. El valor de *n* para el objetivo seco es la unidad (índice de refracción del aire) y para los dos de inmersión, oscila entre 1,44 y 1,45, según las proporciones de agua y glicerina que entren en la mezcla del líquido de inmersión.

El término *poder resolvente relativo*, que encabeza la tercera columna, significa el poder resolvente que tendría un objetivo hipotético imposible de construir hoy día, cuya apertura numérica, si se alumbrase con luz blanca (*), fuese la de las cifras de la columna. Dicho de otro modo: con luz ultra-violeta de 0,275 μ de longitud de onda se ha llegado á obtener en el último objetivo de la serie el mismo poder resolvente que se obtendría con un objetivo de 2,5 de apertura numérica que se alumbrase con luz blanca. Se llega, pues, á una cifra que, como se ve, es casi el doble de la de 1,40

(*) En realidad, con la radiación más visible de la luz blanca, que es la verde-amarilla de $\lambda = 0,55\ \mu$ y que se toma siempre como base al corregir los objetivos para la luz visible.

que representa la apertura del apocromático más potente de hoy día. Al poder resolvente relativo se le suele llamar también *apertura numérica equivalente*, término que se deduce de la explicación que antecede.

PODER DE PENETRACIÓN DE LOS MONOCROMÁTICOS

De que el mayor poder resolvente de estos objetivos se deba á la menor longitud de onda de la luz empleada y no al aumento de la apertura numérica, se deduce una consecuencia que, á nuestro juicio, tiene cierto interés y que no hemos visto todavía consignada en los estudios que se han publicado sobre este asunto. Nos referimos al *poder de penetración* de los objetivos monocromáticos, y esto requiere algunas definiciones previas.

Se llama poder de penetración ó simplemente *penetración* de un objetivo á la facultad que todos ellos poseen en mayor ó menor grado, de reproducir en la imagen no sólo el plano óptico ó matemático de espesor infinitamente pequeño que está en foco exacto en un momento dado, sino también uno ó más planos de los que están por encima y por debajo de aquél. Esto es, un objetivo reproduce siempre en la imagen cierto espesor del objeto y nunca un plano único. La magnitud de este espesor mide la penetración del objetivo y depende de varios factores, á saber: la vista del observador que, según sea más ó menos aguda, así percibirá mejor ó peor las pequeñas diferencias de foco que hay entre un plano y otro; la naturaleza del objeto, como su transparencia, finura de detalles, etc.; y, por último, la apertura numérica del objetivo. Obsérvese que los dos primeros factores son independientes del objetivo, y que, por consiguiente, para un objeto dado y un observador dado también, la penetración no depende más que de la apertura numérica, y, por lo tanto ésta sola es la que tenemos que considerar al determinar la penetración de los monocromáticos. Ahora bien: Abbe

ha demostrado que *la penetración de un objetivo está en razón inversa de su apertura*, y que, por consiguiente, viene expresada por la relación $\frac{1}{a}$ y es independiente, por lo tanto, de la longitud de onda de la luz empleada.

Esto nos dice que al aumentar el poder resolvente de un objetivo por medio de la disminución de la longitud de onda de la luz y no por medio del aumento de la apertura numérica, la penetración del objetivo permanece invariable, y resultan, por consiguiente, objetivos *de mucho poder resolvente, que poseen al mismo tiempo una penetración relativamente grande*. Comparemos, por ejemplo, dos objetivos de apertura igual: el de 1,25 apocromático de inmersión en el agua, y el de 1,25 monocromático de inmersión en mezcla de glicerina y agua. La penetración de ambos es la misma y viene expresada por la fórmula $\frac{1}{1,25}$; pero el poder resolvente del segundo es doble que el del primero, puesto que este poder resolvente viene expresado por las fórmulas $\frac{1,25}{0,55}$ para el primero y $\frac{1,25}{0,275}$ para el segundo (véanse las fórmulas 1 y 2), y el denominador de la segunda es la mitad que el de la primera.

Esta penetración relativamente grande, combinada con un poder resolvente también grande, es una ventaja de importancia para la microfotografía, no sólo porque las imágenes de conjunto resultan muy claras en sus múltiples detalles, sino también porque la operación de enfocar se facilita notablemente. Examinando las fotografías que acompañan á este estudio, y fijándose en los factores ópticos de los objetivos con que se han obtenido, resalta bien la ventaja de la penetración, y esto lo notarán, sobre todo, los lectores habituados á ver microfotografías de objetivos apocromáticos potentes, en los que el plano focal es de un espesor peque-

ñísimo, y por lo mismo sólo dan buenos resultados con objetos de espesor también pequeñísimo.

OCULARES DE CRISTAL DE ROCA

Los oculares de cristal de roca que hoy se construyen para combinarlos con los monocromáticos son cinco, con aumentos de 5, 7, 10, 14 y 20, respectivamente. Estos oculares dan con los monocromáticos y para longitudes de cámara comprendidas entre 0,^{m} 24 y 0,^{m} 315 una serie de aumentos que va desde 200 hasta 3.600 diámetros, con diferencias de 100 en 100 diámetros. Esta serie es ampliamente suficiente en cuanto al aumento máximo, pues la cifra 3.600 supera bastante á la que corresponde á la apertura máxima disponible, que sería de 2.500 diámetros aplicando la regla práctica de los ópticos ingleses deducida de la teoría de Abbe (*). Pero en cambio se echan de menos en la serie los aumentos inferiores á 200 diámetros, que permitirían obtener vistas de conjunto de cortes de tejidos, rocas, etc., que tan útiles son en la práctica. Un objetivo de 12 á 15 milímetros de distancia focal, y de poca apertura, sería muy útil como complemento de los tres monocromáticos que hoy se construyen. Con estos tres no hay medio de bajar del aumento 200 diámetros; porque si se acorta la cámara se reduce mucho el campo, y otro tanto sucede si se emplea el objetivo sin ocular, á más de otras dificultades mayores con que se tropieza cuando se quiere trabajar de esta manera.

PANTALLAS Y VIDRIOS DE URANO

Dificulta el manejo de la luz ultra-violeta su invisibilidad por la retina humana. No basta que las imágenes se puedan

(*) Recordemos que esta regla es: «el aumento debe ser igual á mil veces la apertura», y aquí la apertura equivalente es 2,5; (véase el cuadro de los monocromáticos).

fotografiar; es preciso, además, verlas para poder enfocarlas. Se trató en un principio de enfocarlas *por cálculo;* esto es, enfocar primero sobre el vidrio de la cámara, al objeto alumbrado con luz visible de longitud de onda conocida, y mover después el tornillo micrométrico del microscopio en el sentido y la cuantía que previamente se habían determinado por cálculo, para que la imagen resultase á foco con la radiación invisible que se iba á emplear. Como es natural, por este procedimiento los resultados eran muy deficientes. Por fortuna, cuando se empezó á aplicar la luz ultra-violeta al microscopio, ya eran de uso corriente las pantallas fluorescentes que se emplean con los rayos X, y como se vió que la citada luz producía en estas pantallas efectos semejantes al de éstos, se siguió por este camino y se eligieron las sales de urano, que son las más fluorescentes á los rayos ultra-violetas. Así, pues, el procedimiento actual consiste en manejar la luz, centrar y enfocar la imagen por medio de pantallas fluorescentes opacas ó por vidrios transparentes impregnados de sales de urano; y esto da un medio de *ver* la imagen de los objetos con luz ultra-violeta, si bien lo que en realidad se ve no es la imagen misma, sino la fluorescencia que esta imagen produce en las pantallas y vidrios; no obstante lo cual, el fin que se perseguía se ha conseguido, pues estas imágenes de fluorescencia son lo suficientemente brillantes para poderlas enfocar con precisión. Pero de aquí no se ha pasado. El que haya luz bastante para enfocar con precisión no quiere decir que la haya para estudiar directamente los detalles de los objetos; máxime siendo éste, como es, un procedimiento especial para estudiar detalles más finos que los que muestra la luz visible. Las imágenes de fluorescencia son siempre un tanto borrosas además. Así, pues, el procedimiento actual de luz ultra-violeta es, por decirlo así, un procedimiento indirecto, que consiste en fotografiar la imagen y estudiar después la fotografía. Posible es, sin embargo, que en el porvenir se descubran pantallas

fluorescentes tan finas y que absorban tan poca luz que el estudio directo sea posible.

APROVECHAMIENTO DE LA ABSORCIÓN EN LA TÉCNICA HISTOLÓGICA

Hasta ahora no hemos hablado más que de la aplicación al microscopio de la propiedad que caracteriza ópticamente á las radiaciones ultra-violetas, que es su corta longitud de onda, merced á la cual se ha aumentado el poder resolvente de los objetivos. Este fin, y sólo este probablemente, era el que perseguía el Dr. Kohler cuando emprendió sus trabajos. Pero conseguido el alumbrado con luz ultra-violeta y examinadas las imágenes obtenidas con él, se observó una propiedad especial á estas imágenes, que ha venido después á ser una de las principales aplicaciones, quizá la más importante de dicha luz á la microscopía. Esta propiedad estriba en la diferencia de transparencia entre los diversos elementos del tejido que se examina, y que es debida, á su vez, á la diferente absorción que dichos elementos poseen para la luz ultra-violeta. El resultado final es que los diversos componentes del tejido aparecen ante el observador diferenciados unos de otros, cual si se los hubiese teñido por un procedimiento artificial. Esto requiere una explicación.

Si se examina con el microscopio y con luz blanca un tejido histológico cualquiera, en forma de corte delgado ó disociado finamente por medio de agujas, vemos una masa transparente ó traslúcida, en el seno de la cual se destacan débilmente los elementos que componen el tejido, las células, fibras, vasos, etc. Sólo en muy contados casos se ven los detalles internos de estos elementos. y aun entonces el contraste óptico es insuficiente para estudiar su naturaleza, determinar su forma, etc. En una palabra; el estudio de un tejido histológico no se puede hacer con sólo el examen directo del tejido *en fresco*; esto es, acabado de separar del animal ó

vegetal á que pertenecía, que es precisamente cuando más interesa estudiarlo, por lo mismo que no ha tenido tiempo de alterarse.

La causa de esta escasa diferenciación de los elementos del tejido depende de que tienen todos la misma ó casi la misma transparencia para la luz del espectro visible. Dicho de otro modo: su banda de absorción en dicho espectro es nula ó muy pequeña, y en este último caso la misma para todos ellos. Ahora bien; como el estudio de los tejidos orgánicos es de capital importancia y no puede limitarse al examen superficial, sino que es preciso investigar su estructura íntima, ha sido indispensable inventar métodos que permitan: primero, fijar y endurecer los tejidos, ó sea ponerlos en tal estado que se eviten en lo posible la putrefacción y demás alteraciones espontáneas, y queden con la suficiente resistencia para que las operaciones y reactivos á que han de someterse después no produzcan cambios sensibles en la forma y disposición de sus elementos; segundo, teñir estos elementos por medio de colorantes tales, que se fijen en unos y no en otros, ó más en los unos que en los otros, para que sea posible distinguirlos y estudiarlos. El conjunto de estos métodos constituye hoy una verdadera ciencia que se llama «técnica micrográfica ó técnica histológica».

(Continuará.)

Dilárido (Ins. New.) fósil y tribu nueva de Diláridos.

Por el R. P. Longinos Navás, S. j.

En mi monografía de los Diláridos (Mem. Real Acad. Cienc. de Barcelona, 1909, vol. III, núm. 17), no mencioné especie alguna fósil de esta familia porque ninguna había llegado á mi noticia. Ni siquiera Handlirsch, en su grande obra «Die fossilen Inseckten und die Phylogenie der recenten Formen», Leipzig, 1909, incluye esta familia, pobre en especies vivientes. El hallazgo, pues, de una especie fósil, á ella perteneciente, es de gran interés y valor científico.

Habiendo visto en las Memorias del Primer Congreso de Entomología de Bruselas, el dibujo del *Prohemerobius prodromus* Handl. y comparándolo con los ejemplares de Diláridos de mi rica colección, la más rica que existe, me persuadí de que se trataba de un verdadero Dilárido y no de un Hemeróbido.

La reticulación del ala anterior está construída bajo el mismo plan de los Diláridos, en especial es muy semejante á la del género *Dilar* Ramb. tipo de la familia. Las venillas entre el radio y la subcostal, entre el sector del radio y éste, avecinan en gran manera esta especie á los *Dilar* actuales. Y aunque no se distinguen en el dibujo las pupilas tan características en estos insectos, lo atribuyo á inadvertencia del dibujante ó á imperfección del fósil. Tampoco se distingue el oviscapto en el ejemplar figurado, que es hembra, mas no es de extrañar, porque las alas debieron ocultarlo, puesto que aquél suele replegarse. Prescindo de las patas y antenas, éstas de 28 artejos, en lo cual se conforma con un *Dilar;* por cuanto el mismo Handlirsch manifiesta (Mem. Primer Congrès d'Entom., pág. 183) que los apéndices y los estemas se han reconstruído. Si bien tratándose de un Di-

lárido ya no serán estemas, sino verrugas ó tubérculos del vértex.

La semejanza de este insecto con un Dilárido es tal, que fácilmente me persuado que, si me fuera dado ver el mismo ejemplar típico, descubriría en él otros caracteres que evidenciarían su filiación en esta familia.

La presencia de un solo sector del radio, la ramificación del procúbito y la forma del protórax separan el género *Prohemerobius* Handl. del *Dilar* Ramb, y le hacen válido.

La especie procede del Lías de Dobbertin en Mecklemburgo.

Tenemos, pues, que la familia de los Diláridos hizo su aparición en el Lías.

Para que se haga más fácil la comparación será conveniente poner aquí, contrastándolos, los dibujos del ala anterior del *Prohemerobius prodromus* Handl. y del *Dilar nevadensis* Ramb. (Fig. 1 y 2.)

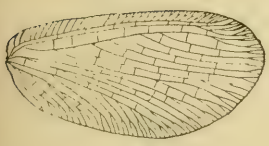


Fig. 1.

Prohemerobius prodromus Handl.
Ala exterior. × 5 1/2.

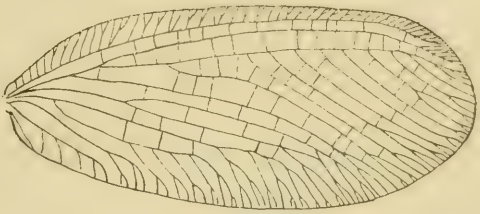


Fig. 2.

Dilar nevadensis Ramb.
Ala anterior × 5.

Una diferencia muy notable se halla entre el *Prohemerobius prodromus* Handl. y las demás especies de Diláridos vivienles que se conocen hasta el día, y es que el ala anterior está provista de dos sectores del radio, poseyendo invariablemente uno los restantes.

Como en mi monografía de los Diláridos, actualmente en prensa en el «Genera Insectorum» de Wystman, en Bruselas, divido la familia en dos tribus: Diláridos y Nalaquinos,

impónese el añadir una nueva para dar cabida al género *Prohemerobius*.

Tribus **Prohemerobini.**

Ala anterior sectore unico, radio pluribus ramis furcatis aut ramosis instructo; procubito pluries furcato; cubito et postcubito ramosis; pluribus venulis subcostalibus, radialibus, discalibus.

El tipo de la tribu es el género *Prohemerobius* Handl.

Coordinando los caracteres de las tres tribus así dispuestas, la clave dicotómica podrá ser la siguiente, por la cual al propio tiempo se verá la grande analogía de la nueva tribu con la primera antes formada, la de los Dilarinos.

1.ª Ala exterior con un solo sector del radio, provisto de varios ramos; numerosas venillas (más de 5) en los campos subcostal y radial, venillas discales esparcidas por todo el ala, numerosas; procúbito varias veces ahorquillado; sin vena axilar, antenas con más de 20 artejos.

1. **Prohemerobinos** Nav.

—Dos sectores del radio y una vena axilar en el ala anterior..... 2

2.ª Muchas venillas en los campos subcostal y radial (más de 5, ordinariamente 10-15), ítem venillas esparcidas por todo el disco..... 2. **Dilarinos** Nav.

—Muy pocas venillas (2—5) en los campos subcostal y radial; muy pocas en el disco, ninguna en el tercio apial del ala exterior..... 3. **Nalaquinos** Nav.

La tribu 1.ª PROHEMEROBINOS está reducida al género *Prohemerobius* Handl.

La 2.ª DILARINOS comprende los géneros *Dilar* Ramb., *Lidar* Nav., *Fuentenus* Nav., *Nepal* Nav. y *Rexavius* Nav.

La 3.ª NALAQUINOS consta de solos dos: *Nallachius* Nav. y *Nulema* Nav.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXV.— Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia sexta 549

XXVI.— Conferencias sobre Física Matemática Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia séptima 574

XXVII.— Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkoswki (continuación), por *B. Cabrera* 604

XXVIII.— La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopía, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912 (continuación), por *Domingo de Orueta* 620

XXIX.— Dilárido (Ins. New.) fósil y tribu nueva de Diláridos, por el *R. P. Longinos Navás, S. J.* 642

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NUMERO 9.
MARZO DE 1913.

Smithsonian Institution
FEB 7 1928
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1913

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXX. — Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

Por José Echegaray.

Conferencia octava.

Señores:

Más de una vez en esta serie de Conferencias anuales, y aun en las de este curso, hemos dicho que en la Fisica Matemática pueden distínguirse tres partes.

En la primera se establecen ciertas hipótesis, que en la Física Matemática clásica, y con excepción de algunos problemas especiales, se reducían á una: la hipótesis mecánica. Se suponía que el fondo del fenómeno, el *substratum* del mismo, pudiéramos decir, era un flúido con tales ó cuales propiedades hipotéticas: ya la materia ponderable, ya el flúido eléctrico, ya el flúido magnético, ya el éter, y que todos los fenómenos, que venían luego á excitar nuestros sentidos, no eran mas que movimientos del flúido, que en cierto modo habíamos puesto como origen y punto de partida de la rama de la Física que considerábamos.

De suerte que la multiplicidad de apariencias en el fenómeno mismo, no eran más que accidentes del movimiento.

Partiendo de estas hipótesis fundamentales, establecíamos las ecuaciones, es decir, las relaciones matemáticas entre diferentes parámetros característicos del movimiento, ecuaciones que casi siempre eran ecuaciones diferenciales.

Y de este modo quedaba planteado el problema de Física Matemática, que se ofrecía á nuestro estudio, y quedaba planteado en la forma propia de la ciencia moderna, en *términos*

de cantidad, excluyendo el concepto, de *cualidad*, más propio de la ciencia antigua, de aquella que se fundaba en la Metafísica.

Y aquí termina la primera parte de todos los problemas de la Física Matemática.

La segunda parte no es ya un problema de Física, es un problema de Matemáticas puras, que se reduce casi siempre á integrar las ecuaciones diferenciales, que hemos obtenido como expresión de las leyes matemáticas del fenómeno en la primera parte.

Claro es, que si las matemáticas puras, en general, y el cálculo diferencial é integral, particularmente, fuera una ciencia perfecta, es decir, si supiéramos integrar en términos finitos todas las ecuaciones diferenciales que se nos presentasen, esta segunda parte de la Física Matemática no existiría como parte integrante de dicha ciencia.

El físico ha obtenido ciertas ecuaciones diferenciales, pues ha terminado la primera parte de su labor y al matemático profesional acude para que le dé las integrales, como el ingeniero constructor de una vía férrea, y valga la comparación, acude á una fábrica de metalurgía para que le construyan un puente de determinadas dimensiones y resistencias.

Si fuera el caso de que todos los problemas de Física Matemática condujeran á ecuaciones de segundo grado, esta parte de la ciencia física, volvemos á repetirlo, no existiría, porque no habría ningún problema que resolver: en todas las ecuaciones de segundo grado el más modesto alumno sabe despejar el valor de la incógnita.

Y así, el físico podría, en cierto modo, saltar de la primera parte de la Física Matemática á la tercera, que luego indicaremos.

Pero esto no sucede, ó no sucede de este modo. Las ecuaciones diferenciales que se obtienen en la primera parte de la Física Matemática, ó al menos muchas de ellas, el matemático no las habrá estudiado nunca, serán acaso problemas

nuevos para él; tendrá que empezar por estudiarlos para resolverlos; es lo mismo, acudiendo al ejemplo que antes presentamos, que si los directores de las fábricas de construcciones metálicas le dijeran al ingeniero, que les había pedido determinado puente: un puente como el que se nos pide no lo hemos construído jamás, ni en este momento sabemos construirlo; estudiaremos el problema y procuraremos darle solución, y cuando lo sepamos resolver podrá continuar la vía férrea que se proyecta.

Una cosa análoga á esta que describimos aparece en la historia de la Física Matemática clásica, y el caso se ha repetido constantemente.

Tanto es así, que algunos autores suponen, que casi todos los problemas de las matemáticas puras tienen este origen. No estímulos espontáneos y autónomos de un idealismo de la inteligencia, sino necesidades de la realidad física.

Las matemáticas, según estos críticos, se han creado procurando *servir los pedidos*, y valga la expresión, de los sabios que al estudiar los fenómenos de la Naturaleza, ya en el orden abstracto, ya en el orden utilitario, necesitaban resolver problemas matemáticos, y al matemático profesional acudían.

Ya hemos dicho más de una vez, que ni es esta nuestra opinión, ni creemos que opinión tan exagerada puede sostenerse.

Las Matemáticas puras tienen vida propia y tienen independencia absoluta en las esferas ideales del orden y de la cantidad. Y no necesitan ser ciencias materialmente utilitarias para prestar grandes servicios idealistas á la inteligencia, que en lo ideal encuentra su más nutritivo alimento.

Pero prescindamos de estas cuestiones y volvamos al principal objeto de nuestra Conferencia.

Resulta, de todas maneras, que al terminar la primera parte de cualquier problema de Física Matemática y al que-

dar convertido en un conjunto de ecuaciones diferenciales, que debamos integrar, en varias ocasiones no sabremos resolver el problema que nos sale al paso, así como puente necesario para continuar nuestro camino; y será forzoso, suspendiendo, por decirlo de este modo, el problema físico, acometer de lleno su definitiva resolución, convirtiéndose así el físico, que por medio de hipótesis inspiradas en la realidad planteó el problema, en matemático que ha de resolver una clase especial de ecuaciones diferenciales.

Ya no se trata sólo del interés, y valga la palabra, de la Ciencia pura; no se trata de integrar un sistema de ecuaciones diferenciales sólo por integrarlas, sino para hacer aplicación de las soluciones á un fenómeno determinado de la Naturaleza.

Por eso, y he aquí el punto á que queríamos venir á parar, cuando se buscan las soluciones de ecuaciones diferenciales que expresan un problema de Física Matemática, no sólo se realiza una labor de Ciencia pura, sino que, en rigor, se realiza un trabajo de Física Matemática y en provecho de esta Ciencia.

Y queríamos venir á este punto para justificar el carácter dominante que me propongo dar y que vengo dando á las Conferencias *del presente curso*.

En todo él va á dominar la parte matemática, y bien se comprende, por las consideraciones que preceden, que, aun así, mi labor es propia de una clase de Física Matemática, como es la que vengo desempeñando hace algunos años.

Que en toda la Física Matemática clásica dominaba el elemento matemático en términos á veces abrumadores, se demuestra con sólo abrir cualquier obra de dicha ciencia en el siglo precedente.

Se recorren páginas y páginas y sólo se encuentran fórmulas y más fórmulas. El problema físico parece que se ha puesto en olvido, y es imposible estudiar tales obras sin entregarse casi por completo á los más elevados conceptos de

la Ciencia abstracta y á los más complicados métodos de integración.

Y aun otro tanto podemos decir de la ciencia moderna y de las obras y memorias especiales de los maestros. Sólo citaré, porque ya lo he citado varias veces, y porque no pierdo la esperanza de explicarlo en su día con el detenimiento que merece, el libro de Mr. Lorentz sobre los electrones, en el que más de la tercera parte se refiere á cálculos matemáticos, con alarde constante de las teorías más modernas y de los más modernos simbolismos, como, por ejemplo, la teoría del cálculo vectorial.

Y este uso constante, con profusión inagotable de las teorias matemáticas, en el estudio de la Física antigua y moderna, es natural y es lógico; de lo contrario, la Física Matemática no sería Física Matemática, sería Física Experimental; y aun ésta, de tal suerte acude hoy al cálculo, que á veces se dijera que con la Física Matemática tiende á confundirse.

Yo bien sé, que si los estudios de las Matemáticas puras estuvieran en España tan extendidos como fuera de desear, muchos de los puntos que trato en estas Conferencias podría suprimirlos por completo, dándolos por sabidos; porque podría suponer, que mis alumnos los habían estudiado en otros cursos de sus respectivas carreras. Pero como esto no es así, al menos en términos generales, natural es que yo supla dificiencias que considero ineludibles, á fin de dar á mis Conferencias, con el carácter más elemental, la mayor utilidad posible en la propaganda de la Alta Ciencia, á que me he consagrado hace tiempo.

Partir de lo más elemental para llegar á lo más elevado. Desde el fondo del valle subir á las cúspides, y no emprender la ascensión á media ladera; porque si desde abajo me acompañaran algunos, empezando á cierta altura, mucho temo que había de subir solo.

Por todas estas razones, como he dicho ya varias veces y

My transfer
FEB 12

aun he dicho hace poco, no excuso en mis Conferencias ningún desarrollo matemático, y una buena parte de las de este año á problemas de integración he de consagrarla.

***

Dije al empezar, que en la Física Matemática había que distinguir tres etapas.

En la primera, apoyándose en tales ó cuales hipótesis, se plantea el problema en forma matemática, expresándolo casi siempre por medio de ecuaciones diferenciales.

En la segunda se estudian estas ecuaciones y se procura integrarlas.

Y para terminar estos preliminares, vamos á decir algo sobre la tercera.

En la *tercera parte* de la Física Matemática se trata de interpretar las fórmulas obtenidas, es decir, las que expresan relaciones finitas entre las magnitudes de las cuales dependen los fenómenos que se estudian.

Y deben examinarse estas fórmulas y sus propiedades matemáticas, y sus accidentes cuantitativos es preciso ponerlos en relación con los fenómenos físicos de que se trata.

En una palabra: hay que interpretar los fenómenos físicos por accidentes matemáticos, si vale la palabra, estableciendo un paralelismo perfecto entre los hechos y las fórmulas y determinando todos los coeficientes numéricos, que deban considerarse en el fenómeno.

De la realidad de los hechos, del fenómeno mismo se partió para formular hipótesis; á los hechos, á la realidad se vuelve para aquilatar las fórmulas, para determinar sus coeficientes y comprobarlos unos por otros; en suma, para afirmar las leyes cuantitativas de los fenómenos.

Y continuemos ya el estudio de la transformación de Hamilton.

***

Tratábamos de generalizar y simplificar las fórmulas generales de la Mecánica.

Recordamos que el problema general de la dinámica se reducía por el teorema de D'Alembert á un problema de estática.

Recordamos asimismo, con todas las salvedades que no hemos de repetir, que los problemas de estática están comprendidos en el principio de las velocidades virtuales.

Y combinando aquel teorema y este principio establecimos las que bien podemos llamar ecuaciones generales de la Dinámica.

Y si se admitiera la hipótesis mecánica, podían llamarse ecuaciones generales de la Física Matemática.

Hoy esta generalización, como hemos dicho varias veces, no es permitida.

Pero aun así y todo, el campo en que estas ecuaciones dominan es inmenso, aun sobre los nuevos feudos de la nueva ciencia.

Dichas ecuaciones las transformamos, suponiendo que los puntos del sistema estaban sujetos á ciertas relaciones y que por consiguiente, existían determinados enlaces.

Según estos enlaces, si los puntos eran en número N, las variables independientes no serían todas las x, y, z en número $3N$, sino que serían en número menor, que designábamos por k, ó serían otras variables ó coordenadas generalizadas q.

De suerte que las variables ó, mejor dicho, las funciones, que en cada momento determinan la posición de los puntos y la configuración del sistema, las designábamos por

$$q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_k .$$

Tales variables determinan, pues, la posición de los puntos materiales ó, si se quiere, la configuración del sistema, y el tiempo t será la verdadera variable independiente, de la cual dependen las q.

Es, pues, preciso en las ecuaciones generales efectuar

un cambio de variables. dejando siempre el tiempo t como variable independiente.

Era indispensable, repetimos, eliminar las x, y, z (designamos como siempre en esta forma abreviada las $3N$ coordenadas $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_N, y_N, z_N$) en función de las q_1, q_2, q_3, q_k, que son las verdaderas coordenadas independientes.

De este modo llegamos á las ecuaciones llamadas de Lagrange

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1 \ldots\ldots k)$$

que son, como hemos visto, k ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden con k funciones $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_k$ y una variable independiente t.

Si á un problema de Física Matemática se le pueden aplicar estas ecuaciones, no habrá más que integrarlas, es decir, expresar las k funciones $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$ en función del tiempo, para tener resuelta la segunda parte del problema, á saber, la parte matemática; y quedará, como ya explicábamos, la parte de *interpretación*.

Pero los problemas de integración, por regla general, son problemas inmensamente difíciles.

Como que muchas veces habría que *buscar* funciones que *no existen*; quiero decir que no existen todavía en la Ciencia, que la Ciencia pura no las conoce ni las ha estudiado, que son para ella un mundo nuevo, que por primera vez las encuentra definidas, y que su definición está dada precisamente por la ecuación ó ecuaciones diferenciales, que se le presentan para que las resuelva.

Por esta razón importa tanto, así para la Ciencia pura como para la Ciencia aplicada, todo lo que tienda á profundizar y á simplificar los métodos de integración.

La simplificación de Hamilton tiene precisamente este objeto.

En primer lugar, como vimos en la Conferencia precedente, convierte las ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden en ecuaciones de primer orden, y esto se consigue, como hemos visto, por la transformación Poisson-Hamilton, es decir, introduciendo k nuevas funciones auxiliares p definidas de este modo:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i .$$

Verdad es que la ventaja obtenida al reducir las ecuaciones de segundo orden al primero, si no en totalidad, hasta cierto punto, está compensada por el inconveniente de duplicar el número de funciones. Antes eran las q; ahora son las q y las p.

Y así, obtuvimos en la conferencia precedente como transformación de las ecuaciones de Lagrange el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= f_i\,(p_1 \ldots\ldots p_k\,,\, q_2 \ldots\ldots q_k\,,\, t) \\ \frac{dq_i}{dt} &= g_i\,(p_1 \ldots\ldots p_k\,,\, q_1 \ldots\ldots q_k\,,\, t) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

de $2k$ ecuaciones en diferenciales simultáneas de primer orden, puestas bajo la forma ordinaria normal, conteniendo $2k$ funciones, á saber: $p_1, p_2 \ldots\ldots p_k$, q_1, $q_2 \ldots\ldots q_k$, y, además, la variable independiente t.

Pero esto no basta, decíamos en la última conferencia: la transformación de Hamilton va más allá. Tratándose de problemas de Mecánica, y, por lo tanto, de las ecuaciones de Lagrange, la forma de las funciones f y g no es arbitraria, como no lo era la forma de las ecuaciones primitivas.

Puede demostrarse, y ésta es precisamente la transforma-

ción de que se trata, que ambas funciones f y g *dependen de una sola función,* que llamaremos K, dependiente á su vez de las funciones p, q, y que en todos los casos y en todos los problemas, en general, *puede formarse directamente.*

Y esto, aun cuando entre el tiempo en las ecuaciones de los enlaces, que si t no entra en ellas y si, además, las fuerzas exteriores tienen una potencial, es decir, dependen de una función de fuerzas, aún la forma de las ecuaciones se simplifica más, como vamos á ver; y se viene á parar á una forma sencillísima, que da á tal sistema de ecuaciones el nombre de *ecuaciones canónicas de Hamilton.*

Para la exposición de este método vamos á variar un tanto el sistema que adoptan la mayor parte de los autores.

* * *

Hemos visto en la última Conferencia, que introduciendo las nuevas funciones p, las ecuaciones de Lagrange toman esta forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= Q_i\,, \\ \frac{dq_i}{dt} &= q'_i\,, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots k) \qquad (F)$$

y excusamos decir que estas ecuaciones son, en el fondo, las mismas que hemos escrito hace un instante, sin más que haber eliminado de las que acabamos de escribir las q' en función de las p por medio de la diferenciación de T con relación á las q', según explicábamos.

Definamos desde luego la función K que vamos á introducir; y la definimos de esta manera:

$$K = \Sigma_1^k p_i\, q'_i - T.$$

Ante todo, expliquemos bien la significación del segundo miembro, aunque, á decir verdad, la notación es tan sencilla que por sí mismo se explica.

En primer lugar, la Σ comprende los términos siguieutes:

$$p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots\ldots + p_i q'_i + \ldots\ldots + p_k q'_k$$

y cada uno de ellos es el producto de la nueva función por la derivada de la antigua.

El término general está expresado por $p_i q'_i$, y este subíndice i varía de 1 á k. Así lo hemos especificado en la Σ.

T es la fuerza viva. Primitivamente estaba expresada, según sabemos, por las derivadas de x, y, z, con relación al tiempo. Es decir, por las componentes de las velocidades de los diferentes puntos.

Cuando introdujimos las nuevas funciones q, es decir, q_1, q_2 ..... q_k que son en número mínimo para definir cada configuración del sistema, tuvimos que deducir de las ecuaciones de los enlaces las x', y', z' en función de las q, q', y así resultó, según vimos, estudiando estas transformaciones con toda minuciosidad, que la T ya no contenía más que las q, las q' y el tiempo t, y que era un polinomio de segundo grado respecto á las q', cuyos coeficientes eran á su vez funciones de las q y del tiempo.

Si el tiempo no entraba en los enlaces, el polinomio era homogéneo de segundo grado respecto á las q'.

En resumen, el segundo miembro de la última ecuación puede especificarse, respecto á las cantidades que contiene, de este modo:

$$K = \Sigma_1^k p_i q'_i - T(q_1, q_2 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q_k, \; q'_1, q'_2 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q'_k, t). \qquad (K)$$

En el primer término deí segundo miembro se ve evidentemente, que entran las p y las q', porque es una suma de productos de ambas cantidades desde el subíndice 1 al subíndice k.

Esto mismo se ve respecto á T, entrando, además, la variable independiente t.

Pero vimos en la conferencia anterior, y lo hemos recordado en ésta, que diferenciando T con relación á las q', como si todas fueran variables independientes, ó, como hemos dicho varias veces, diferenciando parcialmente con el signo ∂, se obtiene un sistema de ecuaciones de primer grado respecto á las q'. Es decir:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1 = a_1 q'_1 + b_1 q'_2 + \ldots\ldots + l_1 q'_k + h_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (K')$$
$$\frac{\partial T}{q'_k} = p_k = a_k q'_1 + b_k q'_2 + \ldots\ldots + l_k q'_k + h_k .$$

Y estas ecuaciones, según hemos explicado ya, nos permiten despejar las q' en función de las p; de suerte que en el segundo miembro de la ecuación *(K)* podemos suponer que todas las q' son funciones de las p, y dicho segundo miembro, si se efectuase esta sustitución, no contendría después de efectuada más que $p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$: esta es la forma que damos al primer miembro, y esta es, precisamente, la función *(K)* que vamos á considerar.

Es decir, que la ecuación *(K)* la podemos escribir explícitamente de este modo:

$$K(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) =$$
$$= \Sigma_1^k p_i q'_i - T(q_1 q_2 \ldots\ldots q_k, q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_k, t).$$

Cuando en el segundo miembro eliminásemos las q' en funcion de las p por el último sistema de ecuaciones lineales que hemos escrito, el segundo miembro sería *idéntico al primero*, y toda operación efectuada sobre las p ó las q en el primer miembro daría una expresión idéntica á la que se obtuviera efectuando la misma operación en el segundo miembro.

Si del segundo miembro no se hubieran eliminado las q' en función de las p, pero se tuviera en cuenta que aquéllas son funciones de éstas, los resultados de las operaciones en ambos miembros no serían *idénticos*, pero serían iguales.

Las operaciones á que nos referimos son diferenciaciones con relación á las p ó á las q como independientes.

Una última observación importantísima. Esta función K de las p y las q siempre puede obtenerse antes de resolver el problema, de modo que es una función que se conoce *a priori*, porque la forma del segundo miembro es perfectamente determinada: se da la forma de Σ, suma de productos binarios de p y q' desde 1 á k, y al establecer las ecuaciones de Lagrange hemos visto que la forma de T puede conocerse también *a priori* en todos los problemas, eliminando las x', y', z' en función de las q y q' por medio de las ecuaciones de los enlaces.

En resumen, la forma del segundo miembro en p, q, q' y t se puede conocer *a priori*, y eliminando de este segundo miembro las q' en función de las p por las ecuaciones (K') se conocerá en todos los casos, siempre *a priori*, la forma de la función (K), que es de la que nos vamos á servir, como hemos dicho, para simplificar las ecuaciones diferenciales, procedimiento que, en rigor, constituye la simplificación de Hamilton.

Y el alumno acaso pregunte: ¿Y cómo se ha ocurrido el introducir esta función (K) para simplificar el problema?

El estudio de cómo se ocurren las cosas á los matemáticos y á los inventores es, de seguro, un estudio muy curioso y muy interesante. Pero generalmente ni los matemáticos ni los inventores suelen publicar la historia de sus descubrimientos ó de sus invenciones, que casi siempre son el resultado de una labor preparatoria y, por decirlo así, de una inspiración final.

Claro es que en estos casos, en los libros de Ciencia, casi siempre al método analítico de investigación se sustituye el

método sintético: se formula el teorema y se demuestra, y la lógica no tiene derecho para pedir más, y la verdad que el teorema representa se impone á la razón, como necesario para la razón misma.

Este método sintético es el que se sigue por lo regular en la Geometría. Se dice: «en el triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los dos catetos», y después se demuestra y la verdad del teorema queda establecida.

Pues en nuestro caso, análogamente podemos decir: De la función *(K)*, formada como hemos explicado, dependen los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales que representan las ecuaciones de Lagrange

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= f_i\,(p_1 \ldots\ldots p_k\,, q_1 \ldots\ldots q_k\,, t) \\ \frac{dq_i}{dt} &= q_i\,(p_1 \ldots\ldots p_k\,, q_1 \ldots\ldots q_k\,, t). \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

Y esto es lo que vamos á demostrar.

Por lo demás, y en este ejemplo, la transformación es tan sencilla, que con muy poca práctica se puede formar el segundo miembro de la ecuación *(K)* para que dé las dos derivadas que entran en las ecuaciones de Lagrange transformadas

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= Q_i \\ \frac{\partial T}{\partial q'_i} &= p_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

á saber:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_i}.$$

En rigor no es este el grupo que vamos á considerar, porque si bien de este grupo se pueden deducir, como he-

mos demostrado, los valores, ó, dicho con más rigor, la forma de los valores de todas las q'_i en función de las p y las q, lo cual daría la ecuación en la forma normal ordinaria $\frac{dq'}{dt} = g(p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k, t)$, este rodeo es inútil y basta partir de la identidad $\frac{dq_i}{dt} = q'_i$, suponiendo las q'_i determinadas por las ecuaciones $\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i$.

***

Consideremos, pues, la función (K) especificando en ella las variables de que se compone cada término

$$K(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) =$$
$$= \Sigma_1^k p_i q'_i - T(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_k, t)$$

que ya hemos dicho, que cuando en el segundo miembro se sustituyen las q' en función de las p, se convierte en una identidad.

Diferenciemos ambos miembros por relación á q_i.

El primer miembro dará evidentemente $\frac{\partial K}{\partial q_i}$ y será una función de las p, de las q y de t.

Sea, pues, $\frac{\partial K}{\partial q_i}$. $\qquad (a)$

Veamos cómo se diferencia el segundo miembro y empecemos por la Σ, que desarrollada toma esta forma:

$$p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots\ldots + p_j q'_j + \ldots\ldots + p_k q'_k .$$

La variable q_i no entra explícitamente, representando ahora por j, para evitar confusiones, el subíndice del término general, en ningún término; pero todas las q' sabemos que son

funciones de las p y de las q, de modo que el resultado de diferenciar la Σ con relación á q_i será

$$p_1 \frac{\partial q'_1}{\partial q_i} + p_2 \frac{\partial q'_2}{\partial q_i} + \ldots\ldots + p_j \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} + \ldots\ldots + p_k \frac{\partial q'_k}{\partial q_i}$$

ó abreviadamente

$$\Sigma_1^k \, p_j \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}$$

en que el subíndice j es el que varía entre 1 y k, y el subíndice i es siempre el mismo.

Recordando la significación de p_j, también podemos escribir

$$\Sigma_1^k \frac{\partial T}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}. \qquad (b)$$

Pasemos al último término del segundo miembro de la función *(K)*, que es, prescindiendo del signo —,

$$T(q_1, q_2 \ldots\ldots q_j \ldots\ldots q_k, q'_1, q'_2 \ldots\ldots q'_j \ldots\ldots q'^k, t).$$

Aquí entra la q_i, que es la variable respecto á la cual, como si fuera independiente, vamos á diferenciar: 1.°, *explícitamente* en la línea de las q, y 2.°, *implícitamente* en todas las q', porque todas son funciones de las q, y, por lo tanto, de q_i. Tendremos, por consiguiente, para la derivada con relación á q_i

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q'_1} \frac{\partial q'_1}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q'_2} \frac{\partial q'_2}{\partial q_i} + \ldots\ldots + \frac{\partial T}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} +$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{\partial T}{\partial q_k} \frac{\partial q'_k}{dq_i},$$

ó abreviadamente y empleando el signo Σ, menos para el

primer término, que está fuera de esta ley de subíndices,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} + \Sigma_1^k \frac{\partial T}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}$$

y poniendo á esta expresión el signo que tenía

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} - \Sigma_1^k \frac{\partial T}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}. \qquad (c)$$

Reuniendo ahora las tres fórmulas (a), (b), (c), que son la derivada del primer miembro y la derivada de los dos términos del segundo, resultará

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = \Sigma_1^k \frac{\partial T}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}$$

y simplificando

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

De manera que en la primera de las dos ecuaciones fundamentales (F), la derivada $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ se expresa por una derivada análoga y de signo contrario respecto á la función K.

Vamos á hacer esto mismo en la segunda ecuación fundamental (F), ó en su equivalente para nuestro caso, según hemos dicho, $\frac{dq_i}{dt} = q'_i$.

A este fin diferenciemos como antes respecto á p_i la función (K).

El primer miembro, puesto que la K se compone de las p y las q y las diferenciamos como si fueran variables independientes, dará:

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} \qquad (a')$$

que no contendrá más que las p, las q y la t.

Consideremos la Σ, que será desarrollada

$$p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots\ldots + p_i q'_i + \ldots\ldots + p_k q'_k .$$

Tenemos que diferenciar, según hemos dicho con relación á p_i, y esta variable entra bajo dos formas.

O explícitamente en el único término $p_i q'_i$, y la derivada será q'_i.

O en todos los términos, porque en todos los términos las q', como hemos visto, son funciones de las p, y resultará:

$$p_1 \frac{\partial q'_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial q'_2}{\partial p_i} + \ldots\ldots + p_k \frac{\partial q'_k}{\partial p_i} .$$

Escribiendo este término en forma abreviada y agregando el resultado anterior, tendremos

$$q'_i + \Sigma_1^k p_j \frac{\partial q'_j}{\partial p_i} \qquad (b')$$

Pasemos á diferenciar el último término — T.

Las p no entran explícitamente, sólo entran en las q'; de modo que tendremos. efectuando la derivación expresada y prescindiendo del signo,

$$\frac{\partial T}{d q'_i} \frac{\partial q'_1}{\partial p_i} + \frac{\partial T}{\partial q'_2} \frac{\partial q'_2}{\partial p_i} + \ldots\ldots + \frac{\partial T}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial p_i}$$

y escribiendo esta expresión abreviadamente y restableciendo el signo,

$$- \Sigma_1^k \frac{\partial T}{\partial q'_f} \frac{\partial q'_j}{\partial p_i}$$

que también se puede escribir, puesto que las derivadas de T con relación á q' son precisamente las p,

$$- \Sigma_1^k p_j \frac{\partial q'_j}{\partial p_i} \qquad (c')$$

Reuniendo las (a'), (b'), (c'), resultará

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = q'_i + \Sigma_1^k p_i \frac{\partial q'_j}{\partial p} - \Sigma_1^k p_j \frac{\partial q'_j}{\partial p_i}$$

y simplificando é invirtiendo

$$q'_i = \frac{\partial K}{\partial}$$

ó bien

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i}.$$

Hemos convertido, pues, las dos ecuaciones fundamentales en estas otras dos·

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i}$$

ó bien

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k) \quad (F')$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i}$$

Queda, pues, demostrado nuestro teorema: las ecuaciones generales del movimiento de un sistema, con las salvedades de siempre, pueden escribirse bajo la forma *(F')*. Las funciones serán $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k$; la única variable independiente, el tiempo: son, pues, ecuaciones diferenciales simultáneas de 2_k funciones y una sola variable independiente, y están escritas bajo la forma normal ordinaria.

Son de primer orden, puesto que no entran más que las

derivadas primeras de las p y las q, y aparte de Q, los dos miembros se expresan por medio de la función auxiliar K; así, pues, su forma, no sólo es la *normal,* sino que es la canónica.

Por último, esta función K, es decir, su forma y sus coeficientes diferenciales se pueden en cada caso obtener *à priori* en función de las p, las q y el tiempo.

Tal es la transformación de Hamilton.

***

Pero en la mayor parte de los casos que hemos de considerar, aún pueden simplificarse dichas fórmulas.

Primera simplificación. — Supongamos que las fuerzas que actúan sobre el sistema, tanto interiores como exteriores, tengan una potencial; aunque, á decir verdad, si las interiores sólo dependen de las distancias, es inútil hablar de ellas al hacer esta hipótesis y es suficiente establecerla para las fuerzas exteriores.

Pues bien; en este caso hemos visto que las fuerzas ficticias (así las hemos llamado) Q_i son las derivadas de las variables q; de suerte que tendremos:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

Y, por otra parte, y también en este caso, la función U no contendrá más que las q, no contendrá las p; de donde resulta evidentemente

$$0 = \frac{\partial U}{\partial p_i}.$$

E introduciendo la primera condición en la primera de las ecuaciones (F') y restando de la segunda $\frac{\partial U}{\partial p_i}$, que es res-

tar cero, ambas ecuaciones se convertirán en las siguientes:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial p}$$

ó bien

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (K-U)}{\partial q_i}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (K-U)}{\partial p_i}.$$

Con lo cual, representando, como se hace generalmente acaso en honor de Hamilton, por H la función K-U, resultará

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k) \qquad (F'')$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

en las que debemos recordar que se tiene

$$H = K - U$$

ó poniendo el valor anterior de K

$$H = \Sigma_1^k p_i\, q'_i - T - U \qquad (H)$$

Y de esta función decimos lo que antes decíamos de K, á saber, que en todos los casos, en todos los problemas, la función H, es decir, su forma analítica, se puede conocer *à priori*. Porque se conoce la forma de Σ, se conoce, según hemos explicado tantas veces, la forma de T, y, conocida la ley de las fuerzas que actúan, se conoce la función U.

De donde resulta, que eliminando las q' por medio de

las ecuaciones de primer grado ya explicadas, H será una función de forma perfectamente determinada en p_1, p_2..... p_k, q_1, q_2 ..... q_k.

Y puesto que su forma algebraica, ó si se quiere analítica, es conocida, siempre se podrán tomar las derivadas con relación á p_i y á q_i, y los segundos miembros de las ecuaciones (F'') serán de forma perfectamente determinada en las p, las q y t.

Segunda simplificación. — Si además de tener las fuerzas exteriores una potencial, lo cual nos ha permitido efectuar la simplificación anterior, no entrase el tiempo en las ecuaciones de los enlaces, aún la simplificación sería más completa.

Porque recordemos que en este caso T es una cuadrática homogénea respecto á las q', y hay una propiedad de estas cuadráticas, que conviene que tengan presente mis alumnos y que voy á recordar de paso, por elemental que sea:

Supongamos una cuadrática de tres cantidades a_1, a_2, a_3, que llamaremos T.

Tendremos

$$T = A_2 a^2 + A_2 a^2 + A_3 a^3 + 2B_3 a_1 a_2 + 2B_2 a_1 a_3 + 2B_1 a_2 a_3.$$

Pues se sabe, que diferenciándola parcialmente con relación á estas variables, multiplicando cada derivada parcial por la misma variable con respecto á la cual se ha diferenciado, y sumando los tres resultados obtenidos, se reproduce la misma cuadrática multiplicada por dos.

La comprobación es inmediata. En efecto, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial a_1} = 2A_1 a_1 + 2B_3 a_2 + 2B_2 a_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_2} = 2A_2 a_2 + 2B_3 a_1 + 2B_1 a_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_3} = 2A_3 a_3 + 2B_2 a_1 + 2B_1 a_2.$$

Y multiplicando la primera por a_1, la segunda por a_2, la tercera por a_3 y sumando, resultará

$$a_1 \frac{\partial T}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial T}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial T}{\partial a_3} = 2 A_1 a_1^2 + 2 B_3 a_1 a_2 + 2 B_2 a_1 a_3$$
$$+ 2 A_2 a_2^2 + 2 B_3 a_1 a_2 + 2 B_1 a_2 a_3$$
$$+ 2 A_3 a_3^2 + 2 B_2 a_1 a_3 + 2 B_1 a_2 a_3$$

que simplificando el segundo miembro se convierte en

$$a_1 \frac{\partial T}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial T}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial T}{\partial a_3} =$$
$$= 2 [A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2 + 2 B_3 a_1 a_2 + 2 B_2 a_1 a_3 + 2 B_1 a_2 a_3]$$

ó bien

$$a_1 \frac{\partial T}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial T}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial T}{\partial a_3} = 2 T$$

que es precisamente el teorema que anunciamos.

La demostración y el teorema son idénticos, sea cual fuere el número de cantidades a.

El teorema aún se generaliza para cualquier polinomio homogéneo del grado n; pero no hemos de insistir en estos conceptos, verdaderamente elementales.

Ahora bien; si en la expresión de K, ó, mejor dicho, en la de H, partiendo de la primera simplificación, observamos que T es, como decíamos, una cuadrática de las q', aplicando el teorema anterior tendremos:

$$q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + \ldots + q'_i \frac{\partial T}{d q'_i} + \ldots q'_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} = 2 T$$

Pero en el primer miembro cualquier coeficiente diferencial es por definición una p; en general

$$q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = q'_i \, p_i$$

luego la expresión precedente será

$$q'_1 p_1 + q'_2 p_2 + \ldots\ldots + q'_i p_i + \ldots\ldots + q'_k p_k = 2\,T$$

ó bien

$$\Sigma_1^k p_i\, q'_i = 2\,T,$$

y, por lo tanto, la expresión H, de la cual dependen los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales, y que en la primera simplificación de la cual partimos se expresaba de este modo:

$$H = \Sigma_1^k p_i\, q'_i - T - U$$

se convertirá en

$$H = 2\,T - T - U$$

y, por último,

$$H = T - U \qquad (H')$$

Las ecuaciones diferenciales no varían de forma para este caso; es la misma (F'')

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Pero H ya no significa lo que en (H), sino la expresión más sencilla (H'), es decir:

$$H = T - U.$$

Quizá si de aquí hubiéramos partido para la simplificación de Hamilton hubiéramos podido establecer directamen-

te, mejor dicho, lógicamente, y no como por intuición, al función H y la K.

Queda, pues, demostrada la simplificación de Hamilton, y quedan demostradas y explicadas las ecuaciones canónicas del movimiento, ó sea de la Mecánica, debidas al gran matemático inglés, y que hoy son punto de partida, como hemos anunciado otras veces, de teorías importantísimas.

XXXI.—Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowsky.

(Continuación.)

Por B. Cabrera.

39. *Producto vector-tensor.*— Consideremos el vector $\vec{p}$ y el tensor $\overleftrightarrow{a}$, cuyos cosenos directores son λ', μ', ν', y λ, μ, ν, respectivamente. Formemos las tres funciones.

$$a_{xx}\,p_x + a_{xy}\,p_y + a_{zx}\,p_z,$$
$$a_{xy}\,p_x + a_{yy}\,p_y + a_{yz}\,p_z,$$
$$a_{zx}\,p_x + a_{yz}\,p_y + a_{zz}\,p_z.$$

Estas tres funciones son las componentes de un vector. En efecto, reemplazando en cada una de ellas los valores de las componentes de $\overleftrightarrow{a}$ y $\vec{p}$, se convierten en

$$a\,p\cos(\overleftrightarrow{a}\ \vec{p})\cdot\lambda = P\lambda,$$
$$a\,p\cos(\overleftrightarrow{a}\ \vec{p})\cdot\mu = P\mu,$$
$$a\,p\cos(\overleftrightarrow{a}\ \vec{p})\cdot\nu = P\nu,$$

que nos dicen que el módulo del vector en cuestión es

$$P = a\,p\cos(\overleftrightarrow{a}\ \vec{p})$$

y su argumento tiene la dirección del tensor y el sentido que

forma menor ángulo con $\vec{p}$. Este vector $\vec{P}$, le llamaremos producto vector-tensor y lo notaremos

$$\vec{P} = \left|\overleftrightarrow{a} \cdot \vec{p}\right| :$$

evidentemente $\overleftrightarrow{P}$ será polar si $\overleftrightarrow{a}$ y $\vec{p}$ son ambos polares ó axiales, y axial en el caso contrario.

Conviene observar que conociendo $\vec{P}$ y $\overleftrightarrow{a}$ el vector $\vec{p}$ no queda determinado, pues el sistema de ecuaciones que definen las componentes de $\vec{P}$ tiene su determinante y todos los menores del mismo nulos, en virtud de las relaciones que ligan las componentes de un tensor.

Por el mismo procedimiento que hemos seguido en el caso de los productos escalar y tensor, puede aquí demostrarse que la ley distributiva es también aplicable al producto vector-tensor, de suerte que podemos escribir

$$\vec{P} = \left|\overleftrightarrow{A}\ \vec{p}\right|$$

donde $\overleftrightarrow{A}$ es el triple tensor suma de los tensores $\overleftrightarrow{a}$. Recíprocamente, si entre las componentes de dos vectores existen las relaciones lineales

$$\begin{aligned} P_x &= ap_x + hp_y + gp_z \\ P_y &= hp_x + bp_y + fp_z \\ P_z &= gp_x + fp_y + ep_z \end{aligned}$$

las cantidades a, b, c son las componentes de primera especie, y f, g, h las de segunda especie de un triple tensor. Para comprobarlo, basta, como siempre, aplicar el criterio de la transformación de coordenadas.

En este producto, á diferencia de lo que ocurría en el caso de un tensor único $\overleftrightarrow{a}$, el conocimiento de $\vec{P}$ y $\overleftrightarrow{A}$ implica el del vector $\vec{p}$, puesto que el determinante Δ de las componentes de $\overleftrightarrow{A}$ es diferente de cero. Llamando $\overleftrightarrow{\alpha}$ el tensor cuyas componentes son los menores del determinante en cuestión, divididos por Δ, se tendrá

$$\vec{p} = \left| \overleftrightarrow{\alpha} \cdot \vec{P} \right|$$

Considerando ahora las cuádricas correspondientes á los triple tensores $\overleftrightarrow{A}$ y $\overleftrightarrow{\alpha}$, poniendo para la primera $r = p$ y para la segunda $r = P$, se deduce inmediatamente

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_x}(p^2 \varphi) = A_{xx} p_x + A_{xy} p_y + A_{yx} p_z = P_x$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_y}(p^2 \varphi) = A_{xy} p_x + A_{yy} p_y + A_{yz} p_z = P_y$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_z}(p^2 \varphi) = A_{yx} p_x + A_{yz} p_y + A_{zz} p_z = P_z$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P_x}(P^2 \varphi') = \alpha_{xx} P_x + \alpha_{xy} P_y + \alpha_{zx} P_z = p_x$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P_y}(P^2 \varphi') = \alpha_{xy} P_x + \alpha_{yy} P_y + \alpha_{yz} P_z = p_y$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial P_z}(P^2 \varphi') = \alpha_{zx} P_x + \alpha_{yz} P_y + \alpha_{zz} P_z = p_z$$

relaciones que nos dicen que cada uno de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{p}$ es paralelo á la normal en el punto de la cuádrica correspondiente al otro, definido por el valor de este último que le corresponde. Así el argumento $\vec{P}_1{}^0$ es el de la normal

á φ en el punto definido por $\vec{p}_1$, y el argumento $\vec{p}_1{}^0$ el de la normal á φ' en el punto determinado por $\vec{P}_1$.

Para conocer el valor del módulo de uno de los vectores en función del otro, comencemos observando que las dos cuádricas φ y φ' tienen comunes las direcciones de sus ejes cuyos valores serán, además, inversamente proporcionales; pues si referimos la primera á estos ejes, el sístema de ecuaciones que definen $\vec{P}$, se convierte en

$$P_x = A^{(1)} p_x, \qquad P_y = A^{(2)} p_y, \qquad P_z = A^{(3)} p_z,$$

y, por consiguiente,

$$p_x = \frac{1}{A^{(1)}} P_x, \qquad p_y = \frac{1}{A^{(2)}} P_y, \qquad p_z = \frac{1}{A^{(3)}} P_z,$$

de forma que

$$\varphi'(P) \equiv \frac{1}{A^{(1)}} P^2{}_x + \frac{1}{A^{(2)}} P^2{}_y + \frac{1}{A^{(3)}} P^2{}_z = \pm 1,$$

que demuestra la coincidencia de los ejes. Pero, además, llamando p_1, p_2, p_3 los valores de los ejes de φ, y P_1, P_2, P_3 y los de φ'.

$$A^{(1)} = \frac{1}{p^2{}_1} = P^2{}_1, \quad A^{(2)} = \frac{1}{p^2{}_2} = P^2{}_2, \quad A^{(3)} = \frac{1}{p^2{}_2} = P^2{}_3,$$

ó

$$P_1 p_1 = P_2 p_2 = P_3 p_3 = \pm 1.$$

De esta suerte queda determinada φ' por φ, y recíprocamente, y el módulo del vector desconocido se obtiene pro-

longando su argumento, que ya conocemos, hasta que corta á la cuádrica que le corresponde.

El producto vector-tensor se comporta, evidentemente, como un vector en todas las operaciones del cálculo vectorial En particular es interesante considerar el producto escalar de dicho vector por un nuevo vector $\vec{q}$:

$$\vec{q} \cdot \left| \overleftrightarrow{a} \; \vec{p} \right|$$

En efecto; sin más que desarrollar este producto en función de sus componentes, ordenando luego respecto de a_{xx} ....., a_{xz} ....., se reconoce que

$$\vec{q} \cdot \left| \overleftrightarrow{a} \; \vec{p} \right| = \overleftrightarrow{a} \left\| \vec{p} \; \vec{q} \right\|,$$

ecuación que aplicaremos muy pronto.

40. *Triple tensor asimétrico.*—Según acabamos de ver, el producto $\left| \overleftrightarrow{a} \; \vec{p} \right|$ corresponde á una relación lineal entre las componentes del vector producto $\vec{P}$ y el factor $\vec{p}$, ó como también se dice, relación lineal entre ambos vectores. Pero esta relación lineal no es la más general posible, pues el determinante de sus coeficientes es simétrico. Si se suprime esta limitación, podremos escribir con toda generalidad

$$\begin{aligned} P_x &= \rho_{xx} p_x + \rho_{xy} p_y + \rho_{zx} p_z \\ P_y &= \rho_{yx} p_x + \rho_{yy} p_y + \rho_{zy} p_z \\ P_z &= \rho_{zx} p_x + \rho_{zy} p_y + \rho_{zz} p_z \end{aligned}$$

donde los coeficientes de doble índice no son iguales. El conjunto de los nueve coeficientes de estas ecuaciones, le denominaremos *triple tensor asimétrico.*

Para su estudio pueden seguirse dos caminos: el uno, el

más sencillo, consiste en reducir el tensor asimétrico á la superposición de un tensor asimétrico y un vector; el otro, más directo, ha sido introducido por R. H. Weber, y estudia el tensor directamente. Comenzando por el primer método, de interpretación física más claro, escribamos las anteriores ecuaciones, en la siguiente forma:

$$P_x = \rho_{xx} p_x + \frac{1}{2}(\rho_{xy} + \rho_{yx}) p_y + \frac{1}{2}(\rho_{xz} + \rho_{zx}) p_z + \frac{1}{2}(\rho_{xy} - \rho_{yx}) p_y - \frac{1}{2}(\rho_{zx} - \rho_{xz}) p_z$$

$$P_y = \frac{1}{2}(\rho_{xy} + \rho_{yx}) p_x + \rho_{yy} p_y + \frac{1}{2}(\rho_{yz} + \rho_{zy}) p_z - \frac{1}{2}(\rho_{xy} - \rho_{yx}) p_x + \frac{1}{2}(\rho_{yz} - \rho_{zy}) p_z$$

$$P_z = \frac{1}{2}(\rho_{zx} + \rho_{xz}) p_x + \frac{1}{2}(\rho_{yz} + \rho_{zy}) p_y + \rho_{zz} p_{zz} + \frac{1}{2}(\rho_{zx} - \rho_{xz}) p_x - \frac{1}{2}(\rho_{yz} - \rho_{zy}) p_y$$

Los coeficientes de los tres primeros términos de estas ecuaciones, cumplen ya con las condiciones de simetría necesarias para ser tenidos por las componentes de un triple tensor ordinario $\overleftrightarrow{A}$, con lo cual, en virtud de lo demostrado anteriormente, el conjunto de los tres primeros términos de cada ecuación, definirán el vector

$$\vec{P}_1 = \left| \overleftrightarrow{A} \ \vec{p} \right|.$$

Si, pues, pasamos dichos términos al primer miembro, en éste aparecerán las componentes de un nuevo vector

$$\vec{P}_2 = \vec{P} - \vec{P}_1,$$

y, por consiguiente, dada la forma de los términos que quedan en el segundo miembro, ello equivale á demostrar que

$$\mathbf{A}_x = \frac{1}{2}(\rho_{yz} - \rho_{zy}),$$

$$\mathbf{A}_y = \frac{1}{2}(\rho_{zx} - \rho_{xz}),$$

$$\mathbf{A}_z = \frac{1}{2}(\rho_{xy} - \rho_{yx}),$$

son las componente de un vector $\vec{\mathbf{A}}$, de suerte que

$$\vec{P}_2 = \left|\vec{\mathbf{A}}\ \vec{p}\right|.$$

Así, el caso más general de la relación de primer grado entre dos vectores, estará definida por

$$\vec{P} = \left|\overleftrightarrow{A}\ \vec{p}\right| - \left|\vec{\mathbf{A}}\ \vec{p}\right|$$

No es la estudiada la forma más general de reducción de un vector, función lineal de otro, á un producto vector-tensor y un nuevo vector. Escribamos en lugar de los coeficientes que definen las componentes de $\vec{P}$,

$$\rho_{ij} = B_{ij} - g_i q_j \qquad i, j = x, y, z$$

donde B_{ij} representan las componentes de un triple tensor y g_i, q_j las de dos vectores. Evidentemente, existiendo nueve ecuaciones de la forma predicha, y siendo doce las nuevas incógnitas, los referidos triple tensor $\overleftrightarrow{B}$ y vectores $\vec{g}\ \vec{q}$, no están completamente determinados.

Efectuando la substitución y agrupando los términos, obtendremos

$$P_x = B_{xx}\, p_x + B_{xy}\, p_y + B_{zx}\, p_z - g_x\, (\vec{p} \cdot \vec{q})$$

y análogamente para las otras dos, de suerte que en general podemos escribir:

$$\vec{P} = \left| \overleftrightarrow{B}\, \vec{p} \right| - \vec{g}\, (\vec{p} \cdot \vec{q})$$

Para establecer la relación que pueda existir entre esta forma de descomposición y la que empleamos más arriba, sustituyamos en las expresiones que definen $\overleftrightarrow{A}$ y $\vec{\mathbf{A}}$ los valores dados á ρ_{ij}. Se obtienen así, sin dificultad

$$\overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{B} - \vec{g} \cdot \vec{q}$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \left| \vec{q} \cdot \vec{g} \right|$$

Si, pues, en la primitiva ecuación introducimos estos valores, se hallará

$$\vec{P} = \left| \overleftrightarrow{B}\, \vec{p} \right| - \left| \vec{g}\, \vec{q} \right| \left| \vec{p} \right| - \frac{1}{2} \left| \left| \vec{q}\, \vec{g} \right| \vec{p} \right|,$$

pero sabemos que

$$\left| \vec{p} \left| \vec{q}\, \vec{g} \right| \right| = \vec{q}\, (\vec{p}\, \vec{g}) - \vec{g}\, (\vec{p}\, \vec{q}),$$

y se demuestra, además, con facilidad que, análogamente,

$$\left| \vec{p} \left| \vec{g}\, \vec{q} \right| \right| = \frac{1}{2}\, \vec{q}\, (\vec{p}\, \vec{g}) - \frac{1}{2}\, \vec{g}\, (\vec{p}\, \vec{q});$$

luego, en definitiva,

$$\vec{P} = \left|\overleftrightarrow{B}\ \vec{p}\right| - \vec{g}\,(\vec{p}\ \vec{q}),$$

conforme con la última descomposición.

Ejemplo particular de tensor asimétrico es aquel cuyas componentes son las funciones de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$

$$\begin{matrix} p_x\,q_x & p_y\,q_x & p_z\,q_x, \\ p_x\,q_y & p_y\,q_y & p_z\,q_y, \\ p_x\,q_z & p_y\,q_z & p_z\,q_z. \end{matrix}$$

Para este tensor

$$\overleftrightarrow{A} = \left\|\vec{p}\ \vec{q}\right\|,$$
$$\vec{\mathbf{A}} = -\left|\vec{p}\ \vec{q}\right|.$$

41. Hemos dicho que R. H. Weber propone considerar los nueve coeficientes ρ_{ij} como componentes de un tensor único.

Volvamos nuevamente al sistema

$$\begin{aligned} P_x &= \rho_{xx}\,p_x + \rho_{xy}\,p_y + \rho_{xz}, \\ P_y &= \rho_{yx}\,p_x + \rho_{yy}\,p_y + \rho_{yz}, \\ P_z &= \rho_{zx}\,p_x + \rho_{zy}\,p_y + \rho_{zz}. \end{aligned}$$

Este sistema puede convertirse en el más sencillo

$$P_a = \rho_a\,p_a, \qquad P_b = \rho_b\,p_b, \qquad P_c = \rho_c\,p_c$$

en que ρ_a, ρ_b, ρ_c son tres magnitudes tomadas sobre tres ejes cuyos cosenos directores llamaremos respectivamente λ_1, μ_1 ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3. Estas tres magnitudes desempeñan

funciones análogas á los ejes principales del elipsoide en el triple tensor simétrico; pero difieren en no ser mutuamente perpendiculares.

Para demostrarlo, pasemos nuevamente de los ejes a, b, c á los primitivos. Así se obtendrá:

$$P_x = \lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b + \lambda_3 P_c = \lambda_1 \rho_a (\bar{\lambda}_1 p_x + \bar{\mu}_1 p_y + \bar{\nu}_1 p_z) +$$
$$+ \lambda_2 \rho_b (\bar{\lambda}_2 p_x + \bar{\mu}_2 p_y + \bar{\nu}_2 p_z) + \lambda_3 \rho_c (\bar{\lambda}_3 p_x + \bar{\mu}_3 p_y + \bar{\nu}_3 p_z)$$

designado por $\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1 \ldots\ldots$ los menores, divididos por Δ del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}.$$

Ordenando respecto de p_x, p_y, p_z é identificando los coeficientes, resulta

$$(a) \left\{ \begin{aligned} \rho_{xx} &= \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \rho_a + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \rho_b + \lambda_3 \bar{\lambda}_3 \rho_c, \\ \rho_{xy} &= \lambda_1 \bar{\mu}_1 \rho_a + \lambda_2 \bar{\mu}_2 \rho_b + \lambda_3 \bar{\mu}_3 \rho_c, \\ \rho_{xz} &= \lambda_1 \bar{\nu}_1 \rho_a + \lambda_2 \bar{\nu}_2 \rho_b + \lambda_3 \bar{\nu}_3 \rho_c. \end{aligned} \right.$$

Análogamente se obtienen otras seis ecuaciones con las restantes seis componentes del tensor asimétrico. Considerando en ellas como incógnitas las ρ_a, ρ_b, ρ_c y sus nueve cosenos directores, el sistema será completamente determinado, puesto que á las nueve ecuaciones *(a)* han de agregarse las

$$(b) \left\{ \begin{aligned} \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 &= 1, \\ \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 &= 1, \\ \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 &= 1. \end{aligned} \right.$$

Así, pues, la reducción del tensor asimétrico á las tres

magnitudes ρ_a, ρ_b, ρ_c, que Weber llama *constituyentes* del tensor, es factible; y que sus tres direcciones, que denomina *ejes principales*, no sean mutuamente perpendiculares, resulta de la imposibilidad de agregar á (a) y (b) el sistema de ecuaciones

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 = 0,$$
$$\lambda_2 \lambda_3 + \mu_2 \mu_3 + \nu_2 \nu_3 = 0,$$
$$\lambda_3 \lambda_1 + \mu_3 \mu_1 + \nu_3 \nu_1 = 0.$$

Si estas nuevas condiciones se cumpliesen, se tendría $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1, \ldots\ldots \nu_3 = \overline{\nu}_3$ y

$$\rho_{xy} = \rho_{yx}, \qquad \rho_{yz} = \rho_{zy}, \qquad \rho_{zx} = \rho_{xz},$$

pasando el tensor á ser simétrico.

Evidentemente, ρ_a, ρ_b, ρ_e pueden considerarse como los módulos de tres vectores, que Weber designa por $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ y $\vec{R}_3$, cuyos argumentos quedan determinados por los cosenos directores de a, b, c. Análogamente $\overline{\lambda}_1, \overline{\mu}_1, \overline{\nu}$, y los otros dos grupos de tensores definen las componentes de otros tres vectores que llama $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3$. Mediante la introducción de estos vectores, los coeficientes ρ_{ij} se pueden escribir

$$\rho_{xx} = R_{1x} K_{1x} + R_{2x} K_{2x} + R_{3x} K_{3x},$$
$$\rho_{xy} = R_{1x} K_{1y} + R_{2x} K_{2y} + R_{3x} K_{3y},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho_{zy} = R_{1z} K_{1y} + R_{2z} K_{2y} + R_{3z} K_{3y};$$

valores que, sustituídos en las ecuaciones fundamentales, dan

$$P_x = R_{1x}(\vec{p}\,\vec{K}_1) + R_{2x}(\vec{p}\,\vec{K}_2) + R_{3x}(\vec{p}\,\vec{K}_3) = \sum_i R_{ix}(\vec{p}\,\vec{K}_i)$$

$$P_y = R_{1y}(\vec{p}\,\vec{K}_1) + R_{2y}(\vec{p}\,\vec{K}_2) + R_{3y}(\vec{p}\,\vec{K}_3) = \sum_i R_{iy}(\vec{p}\,\vec{K}_i)$$

$$P_z = R_{1z}(\vec{p}\,\vec{K}_1) + R_{2z}(\vec{p}\,\vec{K}_2) + R_{3z}(\vec{p}\,\vec{K}_3) = \sum_i R_{iz}(\vec{p}\,\vec{K}_i)$$

ó sea, en notación vectorial

$$(c) \qquad \vec{P} = \sum_i \vec{R}_i\,(\vec{p}\,\vec{K}_i).$$

Es interesante poner de manifiesto la relación que existe entre estos vectores auxiliares y el tensor $\overleftrightarrow{A}$ y el vector $\vec{\mathbf{A}}$, que nos sirvieron primeramente para ligar $\vec{P}$ con $\vec{p}$. Para este fin, basta reemplazar en las expresiones de las componentes de $\overleftrightarrow{A}$ y $\vec{\mathbf{A}}$ las ρ_{ij} por sus valores: así se obtiene inmediatamente

$$A_{xx} = \rho_{xx} = \sum_i R_{ix} K_{ix}; \qquad A_{yy} = \rho_{yy} = \sum_i R_{iy} K_{iy};$$

$$A_{zz} = \rho_{zz} = \sum_i R_{iz} K_{iz}.$$

$$A_{yz} = \frac{1}{2}(\rho_{yz} + \rho_{zy}) = \sum_i \frac{1}{2}(R_{iy} K_{iz} + R_{iz} K_{iy});$$

$$A_{zx} = \frac{1}{2}(\rho_{zx} + \rho_{xz}) = \sum_i \frac{1}{2}(R_{iz} K_{ix} + R_{ix} K_{iz});$$

$$A_{xy} = \frac{1}{2}(\rho_{xz} + \rho_{yx}) = \sum_i \frac{1}{2}(R_{ix} K_i^y + R_{iy} K_{ix}).$$

$$\mathbf{A}_x = \frac{1}{2}(\rho_{yz} - \rho_{zy}) = \sum_i \frac{1}{2}(R_{iy} K_{iz} - R_{iz} K_{iy});$$

$$\mathbf{A}_y = \frac{1}{2}(\rho_{zx} - \rho_{xz}) = \sum_i \frac{1}{2}(R_{iz} K_{ix} - R_{ix} K_{iz});$$

$$\mathbf{A}_z = \frac{1}{2}(\rho_{xy} - \rho_{yx}) = \sum_i \frac{1}{2}(R_{ix} K_{iy} - R_{iy} K_{ix});$$

ó sea

$$\overleftrightarrow{A} = \sum_i \| \vec{R}_i \, \vec{K}_i \|,$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \sum_i | \vec{R}_i \, \vec{K}_i |.$$

Estas relaciones pudieron encontrarse directamente sumando y restando á (c) la expresión

$$\frac{1}{2} \sum_i \vec{K}_i (\vec{p} \, \vec{R}_i).$$

Así

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \sum_i \vec{R}_i (\vec{p} \, \vec{K}_i) + \frac{1}{2} \sum_i \vec{K}_i (\vec{p} \, \vec{R}_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \vec{R}_i (\vec{p} \, \vec{K}_i) - \frac{1}{2} \sum_i \vec{K}_i (\vec{p} \, \vec{R}_i);$$

de donde, recordando relaciones más arriba demostradas,

$$\vec{P} = \sum_i \left\| \vec{p} \, \| \vec{R}_i \, \vec{K}_i \| \right\| + \frac{1}{2} \sum_i \left\| \vec{p} \, | \vec{R}_i \, \vec{K}_i | \right\|$$

ó por la ley distributiva, aplicable á todas estas operaciones,

$$\vec{P} = \left| \vec{p} \cdot \sum_i \| \vec{R}_i \vec{K}_i \| \right| + \left| \vec{p} \cdot \frac{1}{2} \sum_i | \vec{R}_i \, \vec{K}_i | \right|$$

fórmula que, comparada con la expresión primitiva de $\vec{P}$, nos conduce á los valores dados para $\overleftrightarrow{A}$ y $\vec{\mathbf{A}}$.

42. *El operador* ∇ *y los tensores.*—Hasta aquí hemos considerado los tensores como magnitudes constantes; pero es evidente que, en general, los fenómenos á que se refieren cambian de un punto á otro del espacio; de suerte que es

indispensable reconocer á qué nuevas magnitudes dan lugar dichos cambios. Se comprende que aqui, como en el caso de los vectores, será el operador ∇ el elemento fundamental en estas magnitudes.

Consideremos, en primer término, la acción de ∇ sobre un triple tensor $\overleftrightarrow{A}$. Aplicando la definición del operador, y teniendo en cuenta su naturaleza vectorial,

$$\left| \nabla \overleftrightarrow{A} \right| = \lim_{V=o} \frac{\int \left| \overrightarrow{ds}\, \overleftrightarrow{A} \right|}{V}.$$

Es evidente que el resultado de esta operación es un vector, puesto que vector es el numerador del segundo miembro; para obtener la componente según el eje de las x, hallemos el producto escalar por $\vec{i}$,

$$\vec{i} \left| \nabla \overleftrightarrow{A} \right| = \lim_{V=o} \frac{\int \vec{i} \left| \overrightarrow{ds}\, \overleftrightarrow{A} \right|}{V} = \lim_{V=o} \frac{\int \overleftrightarrow{A} \left\| \vec{i}\, \overrightarrow{ds} \right\|}{V},$$

en virtud de la igualdad demostrada más arriba.

Tomemos para volumen un paralelepípedo, cuyas aristas sean paralelas á los ejes coordenados; la integral del numerador se reduce á $\Sigma\, \overleftrightarrow{A} \left\| \vec{i}\, \overrightarrow{ds} \right\|$ sobre las seis caras del paralelepípedo. Para mayor sencillez supondremos el origen coincidiendo con uno de los vértices. En las caras perpendiculares al eje x las únicas componentes de $\vec{i}\, \overrightarrow{ds}$ diferentes de cero, serán las $\left\| \vec{i}\, \overrightarrow{ds} \right\|_{xx}$, cuyos valores, son:

$$-ds_x \quad \text{en} \quad x = 0 \qquad +ds_x \quad \text{en} \quad x = dx;$$

para las perpendiculares al eje y, las $\left\| \vec{i}\, \overrightarrow{ds} \right\|_{xy}$, y para las

dos restantes, las $\| \vec{i}\, \vec{ds} \|_{zx}$, con los valores que se indican á continuación:

$$\begin{array}{llllll} -ds_y & \text{en} & y=0 & +ds_y & \text{en} & y=dy, \\ -ds_z & \text{en} & z=0 & +ds_z & \text{en} & z=dz, \end{array}$$

Según esto, formando el producto $\overleftrightarrow{A} \| \vec{i}\, \vec{ds} \|$ en las dos primeras caras y sumando, se obtienen

$$-A_{xx}\, ds_x + (A_{xx} + \frac{\partial A_{xx}}{\partial x}\, dx)\, ds_x = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x}.$$

Resultados análogos se deducen para los otros pares, de suerte que en definitiva

$$| \nabla \overleftrightarrow{A} |_x = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial z}.$$

Siguiendo el mismo camino se deduciría para las otras dos componentes las expresiones

$$\nabla \overleftrightarrow{A} |_y = \frac{\partial A_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z},$$

$$| \nabla \overleftrightarrow{A} |_z = \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z}.$$

Lo anteriormente dicho pone una vez más de manifiesto cómo el operador ∇ se comporta siempre como un vector, puesto que la analogía formal con el producto vector-tensor, es evidente. Este vector se le designa, generalmente, con el nombre de divergencia del tensor $\overleftrightarrow{A}$, notándosele

$$\text{div}\, \overleftrightarrow{A},$$

y á las componentes

$$\mathrm{div}_x \overleftrightarrow{A}, \qquad \mathrm{div}_y \overleftrightarrow{A}, \qquad \mathrm{div}_z \overleftrightarrow{A}.$$

Nosotros hemos propuesto este nombre, antes de ahora, para otra función derivada del tensor $\overleftrightarrow{A}$, cuya naturaleza escalar le hace más análoga á la divergencia de un vector. En cambio, llamábamos á $\left| \nabla \overleftrightarrow{A} \right|$ *flujo del tensor*. Sin embargo, nos parece más acertado el nombre *graduante del tensor*, que le asigna Weber, con la notación

$$\mathrm{grad}\, \overleftrightarrow{A},$$

y para sus componentes

$$\mathrm{grad}_x \overleftrightarrow{A}, \qquad \mathrm{grad}_y \overleftrightarrow{A}, \qquad \mathrm{grad}_z \overleftrightarrow{A}.$$

Entre los casos interesantes puede citarse el graduante del tensor $\left| \vec{p}\ \vec{q} \right|$. Aplicando los mismos razonamientos que al determinar la rotación del vector $\left| \vec{p}\ \vec{q} \right|$, se obtiene aquí

$$\mathrm{grad} \left\| \vec{p}\ \vec{q} \right\| = \frac{1}{2} \vec{p}\ \mathrm{div}\, \vec{q} + \frac{1}{2} \vec{q}\ \mathrm{div}\, \vec{p} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\vec{p}\ \nabla)\ \vec{q} + \frac{1}{2} (\vec{q}\ \nabla)\ \vec{p}.$$

(Continuará).

XXXII.—La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopía, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912.

(Continuación.)

POR DOMINGO DE ORUETA.

INCONVENIENTES DE LOS MÉTODOS DE TÉCNICA HISTOLÓGICA

Estos métodos selectivos no llenan nunca el *desideratum* teórico que acabamos de exponer. En la práctica tienen serios inconvenientes. En primer lugar exigen tiempo, y á veces mucho tiempo; porque hay que dejar que los reactivos actúen, y en ocasiones hay que lavar mucho el tejido entre reactivo y reactivo, para que quede libre del primero antes de someterlo al segundo En los casos más favorables, el tejido puede examinarse á los pocos días de extraído del animal ó vegetal; pero en otros hacen falta semanas y aun meses para desarrollar el tratamiento. En segundo lugar, por muchas precauciones que se tomen y por bien que se seleccionen los métodos, el tejido sufre siempre poco ó mucho á causa de los fenómenos de osmosis que se originan al pasar por líquidos de distinta densidad y composición, y también por las acciones químicas de los reactivos sobre el tejido mismo. Cierto es que los resultados de cada método se comprueban siempre con los de otros, y que una conclusión no se da por sentada hasta que concurren á ella los resultados de métodos distintos; pero aun así siempre cabe la duda de si lo que se ve es efectivamente lo que la naturaleza hizo, ó es algo artificial hecho por los reactivos. Además, no conociéndose bien todavía, como no se conoce, la composición química de los tejidos, no puede determinarse previamente

lo que en cada uno de sus elementos sucederá cuando se aplique tal ó cual reactivo, y de aquí que los métodos de técnica histológica tengan mucho de empírico y sea preciso proceder por ensayos y tanteos al aplicarlos.

A pesar de estos inevitables inconvenientes, la técnica histológica ha dado admirables resultados. La mayoría de los descubrimientos hechos con el microscopio en la estructura y funciones de los organismos, se han debido á ella y á sus métodos. Gracias á éstos, la histología, la microbiología y otras importantísimas ciencias naturales han llegado á ser lo que hoy día son.

VENTAJAS DE LA DIFERENCIACIÓN ÓPTICA QUE PRODUCE LA LUZ ULTRA-VIOLETA

Por lo expuesto se comprende la importancia del nuevo método de investigación histológica que la luz ultra-violeta ha aportado á la técnica microscópica, método con el que se evitan en gran parte los inconvenientes antes señalados, y cuyos resultados ofrecen una garantía indudablemente superior á la de los procedimientos empleados hasta el día. En efecto, la luz ultra violeta produce ópticamente por sí misma en los tejidos orgánicos una diferenciación comparable á la que se consigue químicamente con los reactivos colorantes. Debido á la facilidad con que las radiaciones de onda corta son absorbidas, y á la sensibilidad, por decirlo así, de esta absorción en función de la composición química y molecular del cuerpo absorbente, los diversos elementos de un tejido resultan desigualmente transparentes para esta luz, y aparecen en el campo del microscopio claramente diferenciados unos de otros, cual si el tejido se hubiese coloreado artificialmente. Basta una ligera diferencia en la compacidad del protoplasma para que la absorción varíe en proporciones sensibles, y la diferencia de transparencia se acuse en la imagen. Véanse como comprobación gráfica de esto las

figuras 1 y 2 de la lámina II. Ambas representan un mismo corte del mesosarco de una esponja tetractinellida (Pachymatisma Johonstonia, Bow.) cuyo corte se ha obtenido por congelación de un trozo de la esponja acabada de pescar, y sin fijación ni coloración alguna. La figura 1 está tomada con un objetivo apocromático y con luz visible, y la núm. 2 con el monocular de cuarzo de 6 milímetros y alumbrando al objeto con luz ultra violeta de 0,275 μ de longitud de onda. El aumento es de 500 diámetros, y el mismo para ambas. La simple inspección de las dos fotografías muestra la diferencia que hay entre ellas. En la núm. 1 no se distinguen apenas los elementos componentes del tejido. En la núm. 2 se destacan en primer término las células cromáticas, muy negras por ser muy absorbentes, y después las granulaciones finas del protoplasma, las cámaras vibrátiles, etc. Todo ello tan diferenciado ó más quizá que en cortes coloreados artificialmente.

Las figuras 1, 2 y 3 de la lámina IX son también un buen ejemplo. Representan células de Betz de la corteza cerebral humana y están tomadas de un corte de dicha corteza conservada en formol al 10 por 100, sin coloración alguna, y fotografiadas con objetivo apocromático y luz visible. Salvo la masa de pigmento granular que se ve en la parte posterior de las células y un débil contorno del núcleo y nucleolo, los demás elementos no se ven. Compárense estas fotografías con las 5, 6 y 7 de la misma lámina y con las 3 y 4 de la lámina XIV, obtenidas con luz ultra-violeta, y se notará en seguida la mayor diferenciación que hay en estas últimas.

En todo tejido orgánico, sea el que sea, se obtiene siempre una diferenciación grande con luz ultra-violeta. Aun en los tejidos más transparentes, aun en aquellos que son por su naturaleza muy difíciles de colorear artificialmente, muestra esta luz parte por lo menos de los elementos componentes. Sirvan de ejemplo las fotografías 3 y 4 de la lámina II. La primera representa el corte de un tentáculo de una me-

dusa (Rizostoma pulmo) y la segunda el tegumento delgadísimo que cubre la superficie exterior de otra medusa (Carmarina parfata). Ambas fotografías están tomadas con luz ultravioleta y sin coloración ni preparación previa de ninguna clase. En la primera se han diferenciado bien las masas celulares de los bordes del tentáculo y los núcleos de las células internas. En la segunda se destacan las aglomeraciones pigmentarias y las fibras granulares delgadísimas, que son elementos punto menos que imposibles de colorear por los métodos de técnica corrientes.

Nos permite, pues, la luz ultra-violeta examinar los tejidos frescos, tales y como salen del animal ó vegetal, sin fijarlos ni colorearlos; dando en la mayoría de los casos diferenciación suficiente para que puedan estudiarse á fondo los elementos que los forman. Esto representa, en primer lugar, un considerable ahorro de tiempo; en segundo lugar, evita la deformación de las células por la osmósis y otras causas dependientes del tratamiento con reactivos, y, en tercer lugar, da á las observaciones una certidumbre grande, puesto que lo que se ve es evidentemente lo que en realidad hay allí y no se puede atribuir á la acción de los reactivos.

MÉTODOS MIXTOS DE COLORACIÓN ARTIFICIAL Y ALUMBRADO ULTRA-VIOLETA

No quiere decir esto, sin embargo, que la luz ultra-violeta esté llamada á sustituir *de golpe* á la ténica histológica toda. Lo que se deduce de lo expuesto es que dicha técnica debe modificarse, y se modificará seguramente, para dar cabida en ella á este nuevo método de investigación. En efecto; si bien es cierto que la luz ultra-violeta diferencia en muchos casos más completamente y con más finura que los métodos colorantes, no es menos cierto que en otros, ella sola no puede sustituir á ciertos procedimientos especiales de coloración, como, por ejemplo, los de las sales de plata para el

sistema nervioso, los colorantes lentos en vivo para infusorios y otros seres inferiores, los de inyección con tales ó cuales substancias, y, en general, á los que tienen por objeto poner de manifiesto *una sola substancia* ó un *un solo elemento* de un tejido dado. Hasta ahora, la luz ultra-violeta es un *método selectivo general*, y sólo en muy contados casos un *método selectivo especial* á tal ó á cual elemento. Pero téngase presente que estamos aún en los comienzos de la aplicación de este método al examen histológico y que puede legítimamente esperarse no poco, para época no lejana, cuando la práctica del método sea mayor y cuado se haya extendido su campo de acción. Cabe también introducir variantes en el método seguido hasta ahora de aplicar la luz ultra-violeta sola, y ya en la época presente se inician algunas que conviene enumerar.

Uno de estos métodos mixtos lo ha indicado el Dr. Kohler en su obra citada anteriormente. Consiste en combinar la diferenciación óptica de la luz ultra-violeta con la que se obtiene con los métodos de técnica usual, pero modificados convenientemente. Esta combinación puede hacerse de dos maneras: primera, la que propone Kohler, que estriba en buscar substancias especiales, aun no empleadas en técnica histológica, que, aunque sean transparentes á la luz visible, sean opacas ó casi opacas á la ultra-violeta, y tiendan al mismo tiempo á fijarse por acción química sobre el órgano ó elemento que se quiere diferenciar de preferencia; segunda, aplicar los métodos de técnica corrientes, valiéndose de las mismas substancias que en ésta se emplean, pero aplicar el método en *menor escala*, esto es, empleando los reactivos menos concentrados y dejándolos obrar menos tiempo. Como la inmensa mayoría de los reactivos colorantes usuales absorben á la luz ultra-violeta con más energía que á la luz visible, resulta que un tejido tratado así, aun cuando su coloración sea insuficiente para que á la luz visible se diferencien sus elementos, aparece á la ultra-violeta fuertemente coloreado y

se consigue el mismo fin que si se hubiera seguido el método largo y á alta concentración que prescribe la técnica usual. Se consigue ganar tiempo y aminorar sensiblemente las deformaciones y alteraciones producidas por la concentración de los reactivos y su largo tiempo de acción.

Esta variante del procedimiento de Kohler es más hacedera que la de buscar nuevas substancias. Al fin y al cabo se sabe ya de antemano el resultado á que se va á llegar, y sólo resta determinar la mejor concentración y el tiempo necesario. En el Laboratorio del autor se han comenzado recientemente ensayos sistemáticos de esta técnica mixta, y se han elegido como campo de ensayo los cortes del sistema nervioso. Aun cuando todavía se ha hecho poco, exponemos á continuación algunos de los resultados. Las fotografías de la lámina XIII pueden servir de ejemplo. La figura 1 representa una célula de Betz de la corteza cerebral humana fijada en formol al 10 por 100, y tratada, después de obtenido el corte, con una disolución de azul de metileno al *medio por mil,* durante cinco minutos. Dicho se está que este corte, examinado á luz vislble, no muestra signo de coloración, y, sin embargo, á luz ultra-violeta la célula aparece con un aspecto totalmente distinto al de las que no han sido tratadas por colorante alguno, cosa que puede verse comparando la figura citada con las fotografías de células de Betz representadas en otras láminas. Las figuras 3 y 4 (lámina XIII) representan zonas distintas de la corteza cerebral humana que se han tratado por el método de Achucarro (Nuevo método para el estudio de la neuroglia y del tejido conjuntivo. Sesión del 20 de Octubre de 1911 de la Sociedad Española de Blología); pero modificándolo en el sentido de reducir considerablemente la concentración y tiempo de acción del tanino y nitrato de plata del método original (*). Ambos cortes, examinados á

(*) En la hoja que acompaña á cada lámina encontrará el lector los detalles de la técnica seguida y las condiciones ópticas con que se han obtenido las fotografías.

luz visible, no muestran el menor indicio de diferenciación, y, sin embargo, á luz ultra-violeta las fibras de la figura 3 y las pirámides pequeñas de la figura 4 están bien diferenciadas, quizás demasiado.

Estas fotografías demuestran, á nuestro juicio, dos cosas que tal vez sean de cierto interés. La primera es la extraordinaria sensibilidad de la luz ultra-violeta, ó sea la gran facilidad con que es absorbida aun por las más pequeñas dosis de reactivo. La segunda es que los elementos orgánicos, á su vez, son mucho más sensibles de lo que se pensaba á la acción de dichos reactivos. El protoplasma de la célula (figura 1), las fibras (figura 3) y las células (figura 4) *están cargadas* de reactivo; éste se ha fijado en ellas en poquísimo tiempo, y á pesar de las insignificantes dosis de las disoluciones ha penetrado á fondo en la masa protoplásmica. ¿Cuál será entonces la intensidad de la reacción producida por las soluciones saturadas ó á alta concentración, actuando horas y aun días, que se emplean en la técnica corriente para luz visible? ¿Qué alteración producirán estas reacciones?

EMPLEO DE DISTINTAS RADIACIONES DENTRO DEL ESPECTRO ULTRA-VIOLETA

Cabe todavía otra combinación que abre amplio campo para el porvenir. Emplear varias radiaciones de luz ultra-violeta, pero de distinta longitud de onda, y comparar los resultados que se obtengan. Ya hemos dicho que hay motivos fundados para creer que la absorción de cada substancia y de cada elemento de tejido no es la misma para todas las radiaciones de luz ultra-violeta, sino que varía con arreglo á leyes aun no conocidas. Siendo esto así, el resultado final sería que tal elemento, opaco á tal radiación, podría no serlo á otra de mayor ó menor longitud de onda. Puede suceder, y es muy probable que suceda, que, examinado un tejido con luz de longitud de onda dada, muestra cierta diferenciación

de conjunto muy distinta de la que ofrezca cuando se cambie la radiación; y es posible también que tal elemento, no diferenciado en la primera, lo esté en la segunda y viceversa. Por desgracia, las instalaciones actuales de luz ultra-violeta tienen un campo limitado en este sentido, pues aparte de dificultades mecánicas que no serían difíciles de vencer, hay dificultades ópticas debidas á que la corrección de los monocromáticos se resiente cuando se aplican radiaciones muy lejanas de las que se han servido como tipo para corregirlos (*). Pero estas dificultades no son insuperables y debemos esperar que se venzan para época no muy lejana. Esto, unido á la aplicación de otros espectros discontínuos, distintos de los del magnesio y cadmio, permitiría al operador alumbrar al objeto con cualquiera de las radiaciones comprendidas entre $\gamma = 0{,}3\ \mu$ y $\gamma = 0{,}2\ \mu$, todas las cuales pasan á través del aire, como ya hemos dicho, y pueden, por lo tanto, manejarse con relativa facilidad. El día que esto se consiga habrá ante el operador un campo grande de experiencia y es muy probable se obtengan resultados inesperados.

INSTALACIONES DE LUZ ULTRA-VIOLETA

Prescindiremos de la descripción de los múltiples ensayos, modificaciones y rectificaciones que ha habido que hacer para llegar al tipo de instalación actual, y describiremos tan solo esta última tal y como hoy día la monta la casa Carl Zeiss, de Jena, bajo la dirección del Dr. Kohler. Esta

(*) Esto que ahora decimos podría parecer en contradicción con el descubrimiento de Swingle y Briggs que señalamos antes, que los objetivos monocromáticos dan imágenes *tolerables* con radiaciones muy distintas de las del tipo de corrección. No hay tal contradicción, porque una imagen tolerable, suficiente para un examen somero y para poder enfocar, no lo es, sin embargo, para dar una imagen fotográfica fina y bien definida, á menos que la corrección del objetivo no sea exacta para la radiación que se emplee.

instalación se compone de los elementos siguientes: 1.° Aparatos productores de la corriente eléctrica á alta tensión, que se necesita para la chispa de magnesio ó cadmio empeadas para el alumbrado. 2.° Aparatos de alumbrado propiamente dicho y descomposición cromática de la luz. 3.° Microscopio y accesorios especiales. 4.° Cámara fotográfica. Los describiremos sucesivamente.

TRANSFORMADORES, CONDENSADORES Y ACCESORIOS PARA LA CORRIENTE ELÉCTRICA

La corriente eléctrica se puede tomar, y se toma en la mayoría de los casos, de las redes de alumbrado doméstico, pues sólo hacen falta 3 á 4 amperios de intensidad y el potencial de la corriente primaria puede ser cualquiera. Es indiferente que esta corriente primaria sea continua ó alternativa; pero los aparatos transformadores son distintos en cada caso. Si se trata de corriente continua, se hace pasar ésta por el circuito primario de una bobina de inducción de 10 á 12 centímetros de longitud de chispa, que transforma la corriente continua en alternativa y eleva su potencial hasta 7.000 ú 8.000 voltios. Este tipo de instalación está representado en la lámina I, figura 1. En el circuito primario de la bobina se intercala un reostato ó resistencia variable que sirve para graduar la energía, y además un interruptor que sirve para abrir y cerrar el circuito. La corriente transformada, á alta tensión, va del circuito secundario del carrete *al exitador,* ó sea al aparato que soporta los electrodos de cadmio ó magnesio, entre los cuales salta la chispa. Para conseguir la capacidad eléctrica necesaria, dichos electrodos van sujetos á masas metálicas de cierto volumen, y además van unidos, en derivación, á un condensador formado por dos grandes botellas de Leyden (lámina I, figura 1) unidas en cantidad, que elevan la capacidad hasta 0,004 microfaradios. El interruptor de la bobina es del tipo «Simon» y se le

suele colocar en una habitación aparte para que no moleste el ruido que produce.

Si la corriente primaria de que se dispone es alternativa, se sustituye la bobina de inducción por un pequeño transformador que eleva el potencial hasta los 8.000 voltios necesarios. Se intercalan en el circuito primario el interruptor y el reostato variable, como en el caso anterior, y se suprime el interruptor «Simon», puesto que ya no hay bobina. La corriente transformada va al exitador como antes; pero en el caso de corriente alterna que estamos considerando, hace falta que la capacidad eléctrica sea mayor y se la eleva hasta 0,016 microfaradios por medio de un condensador formado por ocho botellas de Leyden unidas en cantidad. La figura 2 de la lámina I representa la instalación del autor, que es del tipo que estamos describiendo, salvo que la corriente primaria del laboratorio es alterna-trifásica y el circuito primario va unido á una sola de las fases.

APARATO DE ALUMBRADO Y DESCOMPOSICIÓN CROMÁTICA

El aparato de alumbrado y descomposición cromática consta: del exitador, un colimador, dos prismas y un colector. El exitador está formado por dos masas metálicas (bronce) atravesadas por los electrodos de magneso ó cadmio, y á las que van á parar los cuatro hilos conductores; dos del circuito secundario de la bobina ó del transformador, y los dos del condensador. Conductores y electrodos se fijan á las masas metálicas por medio de tornillos de presión con cabeza á propósito para manejarlos con la mano, que permiten pueda desmontarse fácilmente el aparato. Los electrodos son de forma prismática, con una sección de 4×2 milímetros. Van colocados horizontalmente y se pueden mover en dicho sentido é intercambiarse con facilidad. Las masas de bronce están soportadas por las dos columnas de porcelana que se ven á la izquierda de las fotografías de la lámina I, y que se

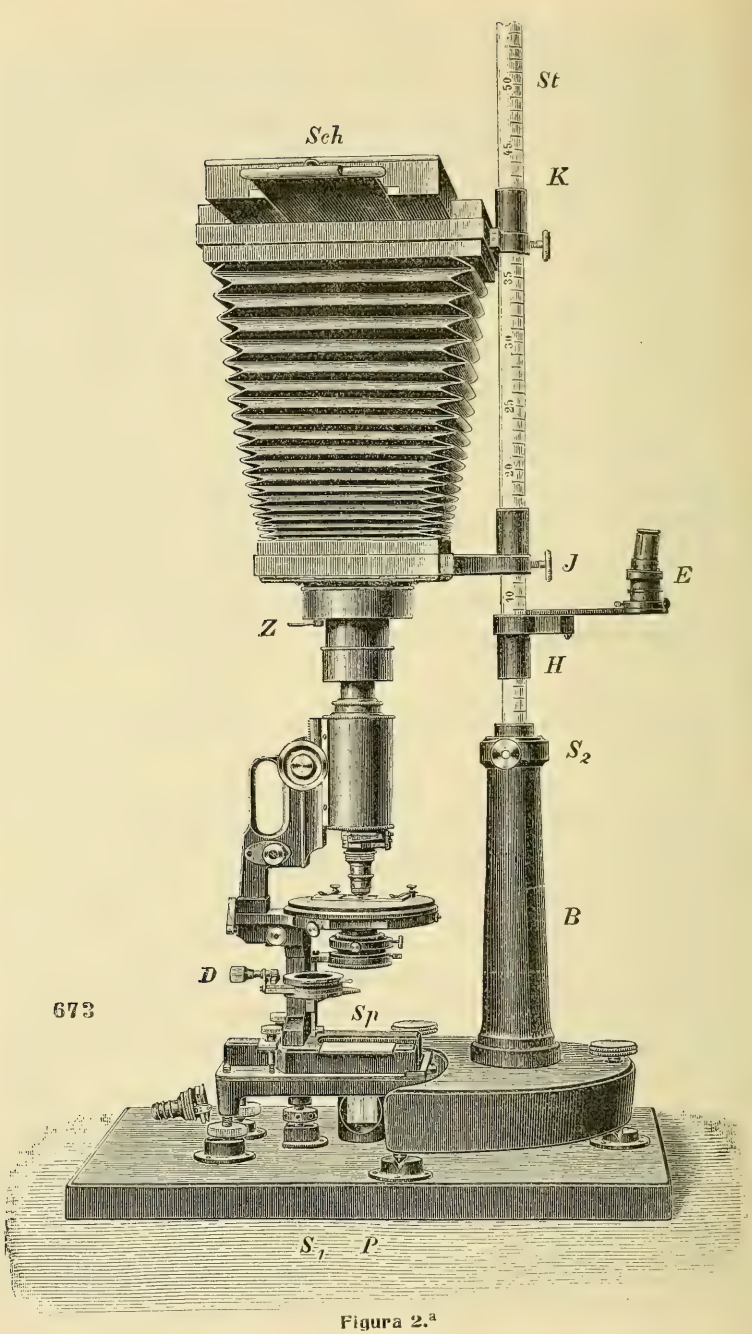


Figura 2.ª

apoyan á su vez en un soporte con dos tornillos micrométricos que permiten graduar con toda precisión la separación de los electrodos, y por consiguiente, la longitud de la chispa. La práctica ha enseñado que la separación más conveniente oscila entre 2 y 2,5 milímetros. Tanto el soporte del exitador, como el de los dos aparatos de alumbrado, colimador y prismas que siguen á aquél, van montados sobre un patín que se adapta á un banco de óptica triangular del modelo corriente de la casa Zeiss, y se fijan á él por medio de tornillos de presión; lo cual permite moverlos á lo largo del banco y graduar exactamente la distancia entre uno y otro, dejándolos fijos en la posición que se quiera. Este exitador está representado en la figura 4 del texto. Esta figura es una proyección horizontal del aparato de alumbrado, y conviene advertir que el exitador representado en ella es el primitivo que construyó la casa Zeiss, que se diferencia del moderno que hemos descrito, en que los electrodos van dispuestos verticalmente. Los demás aparatos representados en esta figura son iguales á los de las instalaciones de hoy día. Nos hemos valido de la figura 4 para aprovechar los clisés del catálogo de la casa Zeiss, que ha puesto á nuestra disposición el director de dicha casa.

La luz que emite la chispa la recoge una lente colimadora K_1 que la proyecta sobre dos prismas P_1, P_2 (figura 4), que la descomponen cromáticamente. El haz que emerge del último prisma pasa por una lente colectora K_2 que la concentra sobre un prisma de reflexión total P (figuras 2 y 3), colocado en la base del microscopio. Todos estos elementos son de cristal de roca, transparente como hemos dicho á las radiaciones ultra-violetas; no siendo preciso apelar para ellos al cuarzo fundido, cuyo material es muy caro, porque sólo se trata de alumbrar y no de formar imágenes. El exitador, colimador y prismas se pueden mover á lo largo del banco de óptica como ya hemos descrito. En cambio, el colector K_2 (figura 4) va montado en posición fija, sobre una

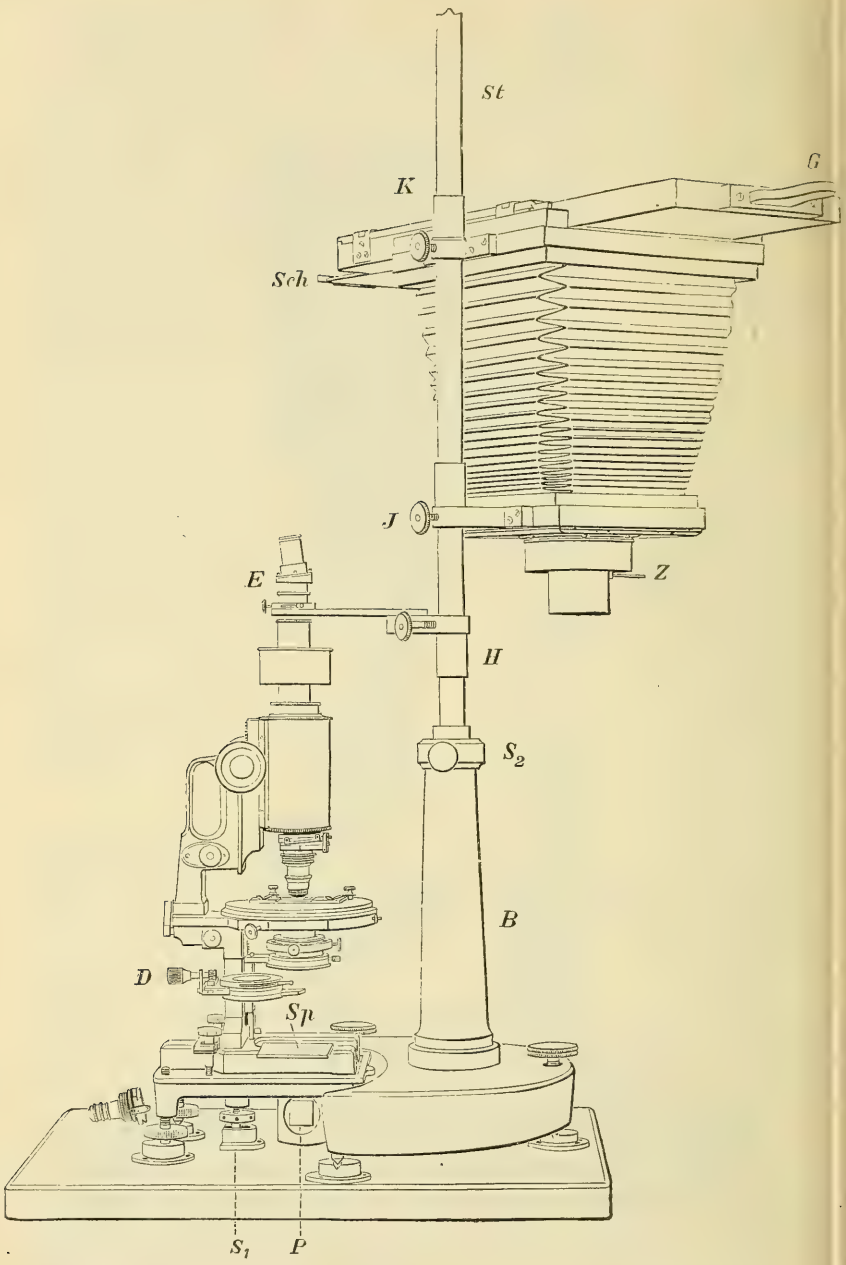


Figura 3.ª

prolongación lateral del banco de óptica, debajo de la cual, y en prolongación del eje del colector, hay un pivote que entra en un cono metálico hueco y sirve de centro de giro al aparato de alumbrado entero. Por medio de este giro se puede dirigir al microscopio la radiación que se quiera y colocarla

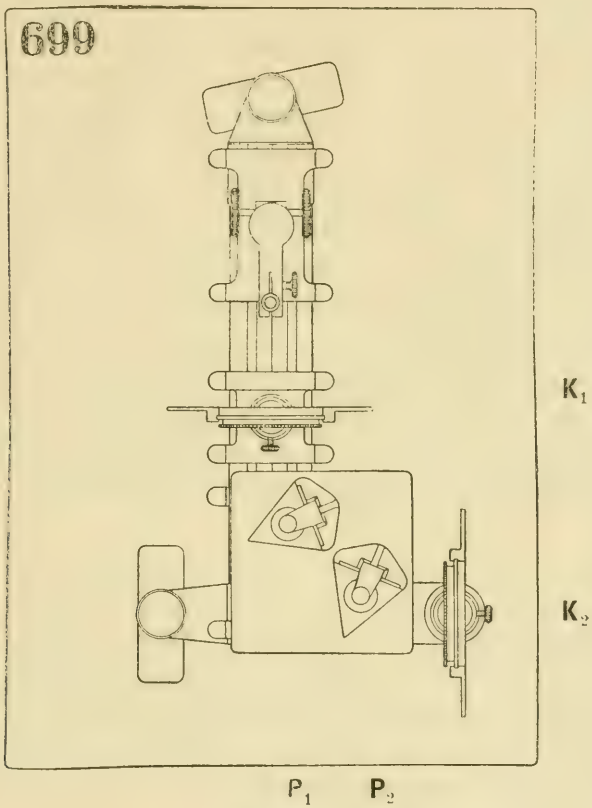


Figura 4.ª

exactamente sobre el centro del prisma *P* (figuras 2 y 3), que ha de dirigirla, á su vez, á lo largo del eje óptico del microscopio. Dos tornillos apoyados en dos piezas planas metálicas que se ven, una á la derecha de los prismas (figura 4) y otra detrás del exitador, sirven de apoyo al banco de óptica y permiten el giro y nivelado de éste.

Merced á estos aparatos ópticos y mecánicos, el banco de alumbrado se presta á todas las combinaciones y permite la selección de una radiación dada y su centrado y enfocado exactos sobre el microscopio. Para facilitar el manejo de la luz y banco de alumbrado se montan sobre una mesa este banco y los aparatos eléctricos antes descritos, y en mesa aparte el microscopio y la cámara. Esto permite que el operador, sentado entre ambas mesas, tenga al alcance de su mano al interruptor de la chispa, al reostato para graduar ésta, á los tornillos del exitador, colimador y prismas y al extremo del banco de óptica, pudiendo manejarlos todos cómodamente y centrar y graduar la luz sin cambiar de posición. Este sistema de mesas separadas tienen también otras dos ventajas, á saber: que las vibraciones de la chispa no se transmiten al microscopio, y que se establecen dos niveles distintos entre ambos grupos de aparatos, quedando la base del microscopio á la misma altura que el haz de la luz que emerge del colector K_2. En las dos figuras de la lámina I, y especialmente en la figura 1, se ve esta disposición.

MICROSCOPIO Y AUXILIARES

El microscopio y el aparato fotográfico están representados en las figuras 2 y 3 del texto. El primero se fija á la mesa por medio del tornillo S_1. La cámara va montada sobre una columna B que arranca de una base de hierro fuerte y pesada, provista de tres tornillos de nivelar, que se apoyan sobre piezas metálicas fijas á la mesa.

La luz que emerge del colector K_2 (figura 4) cae sobre un prisma de cristal de roca P (figuras 2 y 3) colocado en el eje óptico del microscopio y que puede girar alrededor de dicho eje. Este prisma es de reflexión total y desvía los rayos en ángulo recto, dirigiéndolos verticalmente á lo largo de dicho eje óptico. Para conseguir que entre en el prisma P la radiación que se desea y solamente ésta, se necesita ver

el espectro ultra-violeta, y esto se consigue merced á una tira de papel de 30 milímetros de altura y unos 0,20 milímetros de largo impregnada de sales de urano y montada en una armadura metálica con dos patas de apoyo. Esta pantalla fluorescente se coloca delante del prisma *P* y en ella se dibujan las rayas brillantes de los espectros ultra-violetas del cadmio ó del magnesio. Colocando al colector K_2 á unos 0,80 milímetros del prisma *P*, la divergencia ó separación de estas rayas es ampliamente suficiente para que sólo una de ellas entre en el prisma y las contiguas no. Haciendo girar el aparato de alumbrado entero alrededor del pivote que hay bajo el colector K_2 (figura 4) se mueve el espectro entero y guiándose por su imagen sobre la pantalla de urano, se hace entrar en el prisma *P* á la radiación que se quiera.

Esta radiación, dirigida verticalmente por el prisma *P*, incide en el condensador del microscopio; pero antes lo hace sobre un vidrio de urano que va montado en el porta-diafragma *D* (figura 2 y 3) del aparato de alumbrado de Abbe. En la posición representada en estas dos figuras, este porta-diafragma está fuera del eje del microscopio y, por consiguiente, la luz llega al condensador sin tropezar con el vidrio de urano; pero por medio de un giro puede colocarse el porta-diafragma sobre el eje del microscopio y entonces la luz se proyecta sobre el vidrio citado y forma sobre él una imagen fluorescente que se refleja sobre un espejo móvil *Sp;* lo cual permite verla con comodidad y centrarla y enfocarla exactamente. Conseguido esto, se separa el porta-diafragma *D* del eje óptico, llevándolo á la posición representada en las figuras, y la luz ultra-violeta entra en el condensador; pues de estar interpuesto el vidrio de urano, éste obraría como pantalla opaca.

CONDENSADOR

El condensador consta de tres lentes de cristal de roca; pero la inferior es fija y las frontales pueden intercambiarse.

Esto da lugar á tres combinaciones: lente inferior sola; lente inferior combinada con una sola frontal, y lente inferior combinada con dos frontales. La apertura numérica de estas combinaciones va en aumento de la primera á la tercera y está calculada de modo que sea siempre la que corresponde al objetivo empleado; esto es, la primera combinación sirve para el monocromático de 6 milímetros y 0,35 ap. num.ª; la segunda para el monocromático de 2,5 milímetros y 0,80 ap.ª num.ª, y la tercera para el de 1,7 milímetros y 1,25 ap.ª num.ª Dicho se está que las aperturas del condensador son el máximo que el objetivo admite, y que en muchos casos hay ventajas en reducirla, bien cerrando el diafragma de que ahora hablaremos, bien empleando á plena apertura el condensador inferior al que corresponde al objetivo.

Las frontales simple y doble de las dos combinaciones más potentes trabajan en inmersión en glicerina pura. Debajo de la lente inferior, y coincidiendo con el foco posterior de ella, va un diafragma iris con divisiones que marcan las reducciones de apertura que al cerrarlo experimenta el condensador. Estas divisiones se ven cómodamente por medio del espejo *Sp*. El condensador entero va montado dentro del manguito del aparato de alumbrado de Abbe y la cremallera y piñón de éste sirven para enfocarlo.

PORTA-OBJETO Y CUBRE-OBJETO

El porta-objeto puede ser de cristal de roca, tallado perpendicularmente al eje óptico del cristal, ó de un vidrio especial llamado *UV*, transparente á la luz ultra-violeta que hace poco ha empezado á fabricar la Vidriería Científica de Jena. Este porta-objeto mide 30 milímetros de largo por 20 de ancho y tiene un espesor de 0,2 á 0,3 milímetros si es de vidrio *UV*, y de 0,5 milímetros si es de cristal de roca. Para poder manejarlo con facilidad se monta sobre una pieza de aluminio (soporte de Heidenhain) que lleva dos ranuras para

alojarlo, y que tiene exteriormente la forma y dimensiones de un porta-objeto ordinario.

El cubre-objeto es redondo; de 12 milímetros de diámetro y de un espesor comprendido entre 0,17 y 0,20 milímetros. Es de cuarzo fundido y de construcción esmeradísima, para no introducir aberraciones en la imagen. Como hay que hacerlos por medio de procedimientos especiales de tallado, su precio resulta elevadísimo (4 francos) con relación á los cubre-objetos ordinarios. Esta misma razón eleva también el precio de los porta-objetos, que es de 6 francos para los de cristal de roca, y de 2,5 francos para los de vidrio *UV*. Resulta con esto un precio muy grande para las preparaciones, y esto es un inconveniente en la práctica de la técnica con luz ultra-violeta; si bien se aminora en parte por el poco interés que hay en conservar dichas preparaciones, y sí las otografías obtenidas de ellas.

MEDIOS DE MONTURA PARA EL OBJETO

Como medios para montar el objeto figura en primer lugar la glicerina, pura ó mezclada con agua. Tiene la ventaja de ser muy transparente á la luz ultra-violeta. Posee un índice de refracción suficientemente elevado para que resulte bastante contraste óptico entre ella y la mayoría de los objetos que envuelve, sobre todo si éstos son objetos orgánicos. Es, además, inofensiva para éstos. Cuando se trata de cortes en parafina ó celoidina que no se quieren volver á hidratar para llevarlos á la glicerina, pueden montarse directamente en *aceite de vaselina*, que, aunque no tan transparente como la glicerina, lo es, sin embargo, en grado suficiente para que las observaciones sean posibles. El bálsamo de Canadá, el Estoraque, Damar y demás resinas que se emplean en técnica corriente para montar objetos, son inútiles en la técnica con luz ultra-violeta por su opacidad total ó casi total á ella. Los objetos sólidos y duros, como diatomeas, substancias

minerales, rocas, etc., pueden montarse en seco, siempre que queden adheridos al cubre-objeto, para que la lámina de aire que se interpondría entre ambos, si no lo estuviesen, no disminuya la apertura numérica del objetivo (*).

OBJETIVOS Y OCULARES

De los objetivos y oculares nos hemos ocupado ya en las páginas que anteceden, y hemos dicho cuáles son sus constantes ópticas. Según catálogo, el precio de cada ocular es de 38 francos, y el de los objetivos es: de 250 francos el de 6 milímetros; de 500 francos el de 2,5 milímetros, y de 750 francos el de 1,7 milímetros.

VISOR

Sobre el ocular va una pieza especial *E* (figura 2), que se llama *visor*. Consta de un vidrio de urano y sobre él una lente para mirar la imagen de fluorescencia que sobre aquél se forma (**). La lente puede subir ó bajar dentro de su tubo de montura para ajustar dicha imagen á la vista del operador. El visor entero puede también subir y bajar á lo largo de la barra *St*, á la que va sujeto por medio de un collar *H*. El tornillo de presión de este collar permite fijar al visor á la altura que corresponde á las diferentes combinaciones de

(*) Esto se funda en el teorema siguiente de Abbe: «Para que un objetivo pueda dar toda la apertura numérica que es susceptible de dar, es condición precisa que entre el objeto y la frontal del objetivo no exista un medio cuyo índice de refracción sea menor que la cifra que expresa dicha apertura.» El índice de refracción del aire, siendo igual á la unidad, está en la categoría de los que disminuyen la apertura de los objetivos potentes.

(**) En realidad, el visor es algo más complicado, y la inclinación de la lente que se observa en las figuras tiene su razón de ser. No entramos en la descripción detallada de él porque estimamos sería de poco interés para los lectores. A los que les interese podrán verla en el artículo ya citado del Dr. Kohler, página 159 y siguientes.

objetivos y oculares, debiendo tenerse presente que su posición de trabajo es inmediatamente encima del ocular y con una separación de 2 á 3 milímetros entre la cara superior de éste y la inferior del visor, tal y como representa la figura 2.

Por medio de este aparato se examina la imagen final que en el microscopio forma la luz ultra-violeta. No hay que olvidar que esta imagen es la de fluorescencia producida sobre el vidrio de urano del visor, y que, por consiguiente, ni es tan brillante ni está tan bien definida como las que vemos en los microscopios alumbrados con luz visible. No sirve, pues, esta imagen para la investigación directa de los objetos, salvo cuando el aumento es muy pequeño, y aun así, rara vez resulta suficiente. El verdadero fin del visor es centrar al objeto y enfocarlo. Está construído de tal modo, que un detalle situado en el centro del visor y enfocado en él, resulta después en el centro de la placa fotográfica y en exacto foco sobre ella, siempre y cuando la longitud de la cámara esté comprendida entre 0,24 y 0,315 milímetros, debiendo advertir que 2 ó 3 centímetros en más ó en menos no alteran el foco aun cuando sí el aumento. Con los aparatos de luz ultra-violeta envía siempre la Casa Zeiss un prospecto que contiene, entre otros datos, un cuadro en el que van consignados las longitudes de cámara y los aumentos que corresponden á cada combinación.

El visor y los dos sorportes *J* y *K* de la cámara (figuras 1 y 2) no pueden girar sobre la barra *St* porque lo impide una ranura que ésta lleva en la que entran unas lengüetas interiores de que van provistos los soportes. Estos sólo pueden, por lo tanto, subir ó bajar á lo largo de la barra; y para quitar el visor y poner la cámara en su lugar sobre el microscopio basta hacer girar la barra entera con ambos aparatos fijos á ella, y éstos toman entonces la posición representada en la figura 1. El tornillo S_2 de la columna *B* sujeta á la barra *St*, dejándolos fijos en la posición que se desea.

CÁMARA

La cámara es del modelo vertical de Zeiss para placas de 13 por 18 centímetros, con intermediarios para las de 9 por 12. Sus dos frentes se mueven á lo largo de la barra *St* en la forma que hemos dicho, y se fijan á ella por medio de los soportes ó collares *J* y *K*, con sus correspondientes tornillos de presión. El obturador *K* es de pantalla metálica y sirve para dar la exposición. En el cuadro superior de la cámara, y en la parte exterior del mismo, va atornillada una plaquita de marfil que marca exactamente la posición que ocupa, dentro de la cámara, la cara sensible de la placa fotográfica. Por medio de dicha p aquita se puede tomar exactamente la longitud óptica de la cámara, que es la distancia que hay entre la capa sensible de la placa fotográfica y el borde superior del ocular, cuando el objeto está enfocado. Esta longitud óptica se toma por medio de una regla ó valiéndose de las divisiones de la barra *St*.

La unión de la cámara al microscopio se hace por medio de los dos cilindros huecos, de distinto diámetro, que se ven en las figuras 1 y 2 y que enchufan uno en otro sin tocarse, quedando así evitada la entrada de luz del exterior, sin que haya contacto entre el microscopio y la cámara. De este modo, las vibraciones y pequeños choques que pueden producirse al manipular los chasis no se transmiten al microscopio y no alteran el foco.

MODO DE OPERAR

Veamos ahora la manera cómo se opera con esta instalación. Ya queda dicho cómo se maneja el aparato de alumbrado para conseguir que entre en el microscopio la radiación que se desea. Nos limitaremos, pues, á describir el manejo del microscopio y de la cámara.

Se coloca sobre la platina al objeto, montado en porta-objeto y cubre-objeto, transparentes á la luz ultra-violeta y envuelto en un medio que también lo sea. Se comienza por alumbrar con una luz cualquiera; pero hay ventajas en usar luz monocromática. Para esto emplea el autor una lámpara eléctrica de incandescencia, montada sobre un soporte de corredera, que permite intercalarla y separarla rápidamente. Un vidrio verde, de los que recientemente construye la Vidriería científica de Jena, transforma en monocromática á la luz de la lámpara. Esta luz permite emplear á los monocromáticos de cuarzo para las operaciones preliminares de buscar y centrar, pues ya hemos dicho que estos objetivos dan imágenes bastante buenas con cualquier radiación monocromática, aun cuando ésta no sea la de $\gamma = 0{,}275\ \mu$ para que están corregidos; y si se emplease luz blanca, esto no sería posible y se perdería la comodidad de poder emplear cualquier objetivo para estas operaciones preliminares.

Se ponen en el microscopio un objetivo y un ocular débiles; se procede al examen somero del objeto; se elige la zona de éste que interesa estudiar y se centra el detalle que luego en la fotografía debe ocupar el centro del campo. Se pueden completar estas observaciones empleando objetivos potentes acromáticos ó apocromáticos, pues todos ellos, salvo los de inmersión en aceite de cedro, dan buenas imágenes con objetos montados en portas y cubre de cuarzo ó de vidrio *U V.* El condensador de cuarzo para luz ultra-violeta sirve también para luz visible, y es inútil cambiarlo por uno de vidrio.

Terminadas estas observaciones preliminares, se ponen en el microscopio el objetivo y el ocular de cuarzo (si ya no lo estuviesen) que se desea emplear; se separa la luz visible empleada hasta ahora; se abre el circuito eléctrico y entrará en el microscopio la radiación ultra-violeta, previamente seleccionada como ya se ha descrito. Lo primero que hay que hacer es enfocar esta radiación sobre el vidrio de urano que hay debajo del condensador. Para esto se coloca á este vidrio

sobre el eje óptico, haciendo girar al porta-diafragmas *D;* y en una circunferencia marcada en negro, que hay en el centro del vidrio, aparecerá una mancha fluorescente brillante, de contornos desvanecidos, que es la imagen de la chispa que da el exitador. Hay que enfocar esta mancha, y para ello se mueve á lo largo del banco de óptica al colimador *K* (figura 3) del aparato de alumbrado, hasta que se vea en el centro del vidrio de urano una imagen clara de la chispa y se destaquen bien, á un lado y á otro de ella, los contornos de los electrodos, aumentados cinco ó seis veces. Si esta imagen no estuviese exactamente en el centro del vidrio, se la centra, haciendo girar ligeramente al banco de óptica ó al prisma *P* (figuras 1 y 2) y moviendo los tornillos de nivelar del banco.

Conseguidos el centrado y enfocado de la luz sobre el vidrio de urano, se separa el porta-diafragmas *D,* llevándolo á la posición lateral representada en las figuras 2 y 3; se coloca el visor sobre el ocular y se enfoca al objeto. Se procede después á enfocar al condensador, moviéndolo de arriba abajo por medio de su cremallera, hasta que se obtenga la luminosidad máxima, ó lo que es lo mismo, hasta que se vea en foco una imagen del prisma P_2 (fig. 4) del aparato de alumbrado. Se gradúa después al diafragma del condensador, abriéndolo ó cerrándolo hasta que los detalles del objeto aparezcan con el mejor contraste. Por último, se enfoca la imagen de nuevo sobre el visor, con el mayor cuidado y exactitud posibles, pues esta operación es la más delicada y la que exige más práctica en el operador.

Mientras tanto, se ha colocado el chasis en la cámara, se ha cerrado el obturador de ésta, y se ha abierto la cortinilla del chasis, quedando así todo dispuesto para tomar la fotografía. Cuando el objeto está en foco en el visor, lo está también sobre la placa, y, por consiguiente, la operación final se reduce á hacer girar la columna S_t para que el visor se separe del microscopio y la cámara ocupe su lugar sobre éste,

bajar el frente inferior de dicha cámara hasta que los dos cilindros huecos enchufen, y apretar bien los tornillos S_2 y J. Hecho esto, se da la exposición que se desee por medio del obturador Z.

No nos hemos extendido más en la exposición de este *modus operandi*, porque sólo deseábamos al hacerla que el lector tuviese una idea general del procedimiento. Hemos prescindido, pues, de porción de detalles, cuya exposición hubiera sido inútil para el fin propuesto, y que, además, no hubiera resultado clara, á menos de no tener delante el aparato mismo, para poderla acompañar de demostraciones prácticas.

DIVISIÓN DE LA TÉCNICA EN DOS PARTES DIFICULTADES DE CADA UNA

Por la descripción de la técnica de la luz ultra-violeta que acabamos de hacer, vemos que puede considerarse dividida en dos partes: una, la de montar y centrar los aparatos, cosa que se hace de una vez para todas; otra, el manejo de los mismos, en la forma que sucintamente acabamos de describir. La primera no debemos negar que es difícil, y aun cuando el constructor Zeiss envía los aparatos bien dispuestos y los acompaña de instrucciones minuciosas para su montado, se necesitan, sin embargo, para hacer éste bien, un conocimiento exacto del método, y después una serie de ensayos prácticos que nos muestren los defectos de centrado y ajuste que pueda haber, para poder corregirlos. El resultado que nos debemos proponer al montar y centrar una instalación de éstas debe ser el de obtener con ella el *máximum de efecto* que es capaz de dar, y de obtenerlo con el menor trabajo posible cuando se opere con ella, y con seguridad casi absoluta de buen éxito en todos los casos. La segunda parte, ó sea el manejo diario de la instalación, es, en cambio, muy fácil, si está bien montada, y los resultados son de unifor-

midad casi absoluta, hasta tal punto, que sólo por excepción se estropea una placa. El operador, sentado ante el microscopio, tiene al alcance de su mano todos los aparatos que necesita mover, y estos movimientos son tan pocos y tan fáciles, que en breve se llegan á ejecutar maquinalmente, á modo de actos reflejos, como se ejecutan los que precisa el manejo de un microscopio ordinario. La inmovilidad de la luz y su intensidad siempre igual eliminan de estas instalaciones una de las dificultades mayores en las microfotografías con luz visible, que es la de tener que centrar y regular á cada paso el foco de luz.

Así, pues, el manejo de los aparatos, á pesar de su aparente complicación, no es nunca un obstáculo para la reproducción fotográfica rápida de un objeto recién preparado; y, por consiguiente, la ventaja de poder operar sobre tejidos orgánicos frescos, sin ninguna técnica previa, y sin dar tiempo á que se alteren, subsiste íntegra en este método de investigación.

III

Resumen de los trabajos hechos en el laboratorio desde Enero de 1911 á Junio de 1912.

MONTADO DEL APARATO

La instalación de luz ultra-violeta del autor (lámina I, figura 2) llegó al laboratorio en los primeros días de Enero de 1911, y se procedió en seguida á montarla. Se eligió como guía la radiación del cadmio, $\gamma = 0{,}275$, μ y se dispusieron las dos mesas de modo que, estando el banco de alumbrado en su posición central, dicha radiación fuese perpendicular al plano diametral del microscopio. Una lámpara eléctrica de incandescencia, provista de un vidrio monocromático verde, puede intercalarse ó separarse rápidamente de la

trayectoria de los rayos y sirve para las operaciones preliminares. Una serie de ensayos demostró que la intensidad de luz de cadmio más conveniente se obtenía cuando el amperómetro marcaba tres amperios para el circuito primario (*). La resistencia variable que acompaña al aparato sirve para graduar esta intensidad.

TIEMPOS DE EXPOSICIÓN

Terminada de montar la instalación, se procedió á determinar los tiempos de exposición necesarios para obtener negativas vigorosas con cada una de las combinaciones ópticas; pero antes se eligió de una vez para todas la marca de placas que se había de emplear, que fué la de Lumiére et Fils, etiqueta azul (**). Con una intensidad de luz constante, y empleando siempre la misma placa, no queda más factor variable que el objeto mismo, y según sea éste más ó menos transparente y aparezca más ó menos diferenciado, así serán los tiempos de exposición que necesite. Es imposible dar reglas fijas para estos últimos, y sólo la práctica diaria puede enseñar al operador á dar en cada caso la exposición

(*) La corriente primaria trifásica del laboratorio es de 50 períodos y 120 voltios.

(**) Se eligió esta placa, no porque tenga ventajas excepcionales para estos trabajos, sino simplemente por ser la que el autor venía empleando hacía tiempo para microfotografía con luz visible; por lo cual estaba habituado á manejarla. Es esencial *saber manejar* una marca de placas y conocer bien sus ventajas y defectos y su manera de comportarse con los reveladores. Vale más, pues, elegir una marca, y seguir siempre con ella, á andar variando á cada paso en busca de ventajas que casi siempre son ilusorias. La placa Lumiére, etiqueta azul, es suficientemente rápida para luz ultra-violeta, bastante fina de grano y muy fácil de manejar. No quiere decir esto, sin embargo, que no haya en el comercio marcas mejores para el caso. Sería cuestión de ensayarlas. Es esencial también emplear siempre placas frescas, esto es, que no lleven mucho tiempo en almacén, porque entonces su sensibilidad decrece mucho y también su transparencia después de fijadas.

conveniente, guiándose por la luminosidad con que la imagen aparece en el visor. Es, sin embargo, fácil adquirir esta práctica, por lo que ya hemos dicho de la invariabilidad de la luz, que suprime una de las principales causas de error.

Se ha comprobado en el laboratorio que los tiempos de exposición, cuando se trabaja con luz ultra-violeta, son menores que cuando para iguales aumentos se emplea la luz visible, aun cuando ésta proceda de focos intensos, como el arco eléctrico y la lámpara Nerst. Compárense, por ejemplo, las fotografías 1 y 2 de la lámina II. Ambas están tomadas del mismo punto, de una misma preparación y con el mismo aumento. La primera lo está con una lámpara Nerst-Kohler, que da una luz muy viva, y la segunda con la raya del cadmio, de 0,275 μ de longitud de onda. Los tiempos de exposición han sido de dos minutos y doce segundos, respectivamente, ó sea *diez veces* más con la luz Nerst que con la ultra-violeta. La comparación entre las fotografías 1, 2 y 3 de la lámina IX con las 5, 6 y 7 de la misma lámina da un resultado semejante. (Véase la hoja explicativa de esta lámina.) Y nótese que la raya del magnesio, de 0,280 μ de longitud de onda, es bastante más intensa que la del cadmio, de 0,275, y que, por consiguiente, los tiempos de exposición son todavía menores.

Como este dato de los tiempos de exposición puede ser de interés para los operadores con esta luz, hemos cuidado de consignarlos, para cada fotografía, en la hoja explicativa que acompaña á cada lámina. Por ellos verá el lector que, con aumentos fuertes, y para objetos muy opacos, se precisan, á lo sumo, tres ó cuatro minutos. Esta es una de las ventajas del método; porque las exposiciones cortas no dan tiempo á esas alteraciones en el foco ó en la posición del objeto, tan frecuentes cuando hay que estar exponiendo de diez á quince minutos, como sucede en muchas ocasiones cuando se trabaja con luz visible.

CORTES

Adquirida cierta práctica en los tiempos de exposición, se procedió á estudiar la técnica preliminar, esto es, el método más conveniente de preparar y montar los objetos que habían de examinarse. Como lo que más interesaba en el laboratorio era el estudio de tejidos orgánicos, se aplicaron desde luego los métodos de disociación y cortes. Los primeros no se diferencian de los de la técnica ordinaria; pero sobre la manera de hacer los cortes conviene decir algo. Desde luego es inútil hacerlos en celoidina y parafina, y sí muy ventajoso suprimir la serie de reactivos y operaciones que éstos exigen. Por esto, el método de cortes por congelación es el indicado; porque, además de ser el que origina menos alteración, permite operar sobre tejidos frescos, ó, á lo sumo, ligeramente indurados, y sin preparación ulterior alguna. Por otra parte, este método, debidamente manejado, es susceptible de dar cortes muy finos, casi tanto como los que se obtienen con los otros dos métodos, y, en todo caso, ampliamente suficientes para el examen con objetivos monocromáticos, gracias á la gran penetración que éstos tienen. Se ha operado, pues, en la mayoría de los casos, sobre tejidos acabados de extraer del animal ó vegetal; y cuando la conservación era indispensable, ó un ligero indurado conveniente, se ha empleado el formol al 10 por 100 (formalina 40° un volumen, agua 10 volúmenes). Se ha elegido este líquido de preferencia á los alcoholes, porque parece ser que altera menos á las células.

Para obtener cortes finos por congelación se ensayaron previamente varios modelos de microtomos, y se ha dado la preferencia al «Minot» por su gran rigidez.

El platillo macizo de este microtomo se ha sustituído por uno hueco, provisto de agujeros laterales, al que llega por un tubo la corriente de ácido carbónico líquido, empleado para helar.

Aun cuando se trate de una cosa muy sabida, debemos consignar, sin embargo, que para obtener cortes delgados por congelación es preciso, absolutamente preciso, que el cuchillo esté muy bien afilado, más que en los casos de la parafina y celoidina, por tratarse, en el de la congelación, de un conjunto, en general, menos consistente. Es muy conveniente también que el cuchillo encuentre al plano á cortar bajo un ángulo siempre el mismo para todos los cuchillos, y que sea el que éstos traen de fábrica. El autor ha conseguido afilar bien sus cuchillos valiéndose de una piedra de esmeril de grano muy fino, fija en un soporte, inclinado de tal modo, que el ángulo de contacto entre la piedra y el cuchillo sea el mismo que el del bisel que éstos traen de fábrica. De este modo el citado bisel no desaparece, como ocurre cuando se afila el cuchillo apoyándolo sobre la piedra sin precaución previa ninguna. El afilado se termina después sobre una correa fina y sin esmeril.

Como ejemplo de los resultados obtenidos pueden citarse los cortes de esponjas, figuras 1, 2, 5 y 6 de la lámina II y las 3, 4, 5 y 6 de la lámina III, todos los cuales son de sólo 10 μ de espesor, y han sido dados en una esponja viva, acabada de pescar, y sin ninguna preparación previa. Este resultado es difícil de obtener en esponjas silíceas, cuyos espículos hacen muy irregular al tejido en cuanto á dureza y fragilidad (*). La fig. 4 de la lámina IX, las 1 y 2 de la lámina X, las 1 y 2 de la lámina XI, las 1 y 2 de la XIV, y algunas otras, están tomadas de cortes de cerebro humano, de 4 á 6 μ de espesor, dados por congelación en trozos con-

(*) En la congelación de trozos de esponjas y otros organismos que tienen huecos grandes en su interior, se suele tropezar con la dificultad de que las masas grandes de agua que llenan á estos huecos, al cristalizar por la congelación, rompen al tejido y estropean á sus elementos. El autor ha conseguido evitar esto casi por completo poniendo durante un cuarto de hora al trozo que se va á helar dentro de una mezcla de agua y glicerina al 8 por 100 y helando cuando trozo está empapado de este líquido.

servados en formol al 10 por 100. De estos mismos trozos se han obtenido cortes hasta 3 μ de espesor, empleando cuchillos acabados de afilar.

MEDIOS PARA MONTAR AL OBJETO.—VENTAJAS DE LA GLICERINA

En el laboratorio se han ensayado los diferentes líquidos de inclusión y montura que preconiza el Dr. Kohler en su obra citada. El aceite de vaseiina para montar objetos deshidratados ha dado resultados bastante medianos en cuanto á transparencia. Posible es que el reactivo empleado no fuese de la misma procedencia que el de Kohler; pero es lo cierto que cuando se han querido examinar objetos deshidratados se han conseguido resultados incomparablemente mejores volviéndolos á hidratar y montándolos en la mezcla de agua y glicerina, que montándolos directamente en el aceite de vaselina. (*).

Todos los trabajos hechos hasta ahora en el laboratorio han venido á corroborar que el líquido por excelencia en esta técnica es la glicerina y sus mezclas con agua. Desde luego, su acción química sobre los tejidos es nula ó insigni-

(*) Hemos dicho y repetido que este procedimiento de deshidratar é hidratar otra vez estropea bastante al tejido. Como ejemplo de ello, compárese la fotografía núm. 2 de la lámina VII con la 2 de la lámina VI. Ambas representan cortes transversos de un mismo trozo de medula humana, indurado durante varios días en formol al 10 por 100. La primera es un corte en parafina, deshidratado después para montarlo en glicerina. La segunda, un corte dado directamente por congelación en el trozo antes de deshidratarlo. Véanse las contracciones que ha producido en el tejido el paso por las esencias y alcoholes (fig. 2, lámina VII). La mayoría de los *cilindros-ejes* ha sido arrastrada, y en algunos sitios se ven trozos de ellos atravesados en el hueco de la fibra nerviosa. La mielina se ha disuelto casi totalmente y no se ven las capas concéntricas características de ella, que tanto resaltan en la fig. 2 de la lámina 6 y también en la fig. 3 de esta misma lámina, que representa un corte transverso de un ciático, de rana, dado también directamente por congelación.

ficante, y su acción osmótica puede serlo también, si se toma la precaución de no pasarlos bruscamente á la glicerina pura, sino hacerlo primero por una mezcla de glicerina y agua á partes iguales. Así, pues, nuestra manera de operar es: pasar el corte del microtomo á un cristalizador grande lleno de agua destilada; introducir allí el porta; colocar el corte sobre él bien extendido y sacarlo del agua; poner sobre dicho corte una gota de la mezcla de agua y glicerina, y un cuarto de hora después absorber el líquido con papel secante y poner en su lugar una gota de glicerina pura. Si se desea la absoluta pureza de la glicerina, se repite otra vez la última operación.

Pero las propiedades ópticas de la glicerina influyen más todavía en los resultados que con ella se obtienen en la técnica de la luz ultra-violeta. Figura, en primer lugar, su gran transparencia á ésta; en segundo lugar, que siendo la glicerina pura é hidratada, los líquidos de inmersión elegidos para el condensador y el objetivo respectivamente, al montar al objeto en estos mismos líquidos, se forma un *conjunto óptico homogéneo* desde la frontal del condensador á la del objetivo, y sabido es lo que esto favorece á la claridad de la imagen y á la utilización total de la apertura numérica del objetivo. Pero en los trabajos del laboratorio se ha puesto de manifiesto otra propiedad notable de la glicerina, que es su *sensibilidad óptica* en función de la densidad. Por ejemplo: dos cortes exactamente iguales del mismo tejido, montado el uno en glicerina pura y el otro en esta misma glicerina, ligeramente hidratada, ofrecen, al examinarlos con luz ultra-violeta, aspecto distinto en cuanto á su transparencia. El que está en glicerina pura es más transparente en su conjunto que el otro, y las diferencias individuales de opacidad entre los diferentes elementos se acentúan más. Células cuyo protoplasma aparece uniformemente negro cuando se monta al corte en glicerina hidratada, muestran dicho protoplasma resuelto en gránulos de desigual transparencia, que

se diferencian claramente unos de otros, cuando se monta al corte en glicerina pura. Pueden servir de ejemplo las células de Betz, fotografiadas á 1.200 diámetros, de las láminas IX, X, XI, XIV, montadas en glicerina pura de alta densidad.

Se han notado, respecto á este particular, diferencias sensibles entre los resultados de las diferentes marcas de glicerina que se venden en el comercio. Entre las varias ensayadas figura, en primer lugar, por la transparencia que comunica á los tejidos, la marca «Price», que venden los ópticos ingleses; en segundo lugar, la de 1,26 de densidad, de la casa C. A. F. Kahlbaum, de Berlín; y, por último, la marca F. G. V., del mismo proveedor. Parece que la transparencia está en razón directa de la densidad, y que decrece rápidamente si ésta disminuye.

Se comprenden bien las ventajas que tiene en la técnica esta *elasticidad* del líquido de montura. Un objeto excesivamente opaco á la luz ultra-violeta puede transparentarse más montándolo en glicerina pura de alta densidad; y á la inversa, objetos demasiado transparentes y que ofrezcan, por lo tanto, poco contraste óptico, pueden corregirse en ambos sentidos empleando para montarlos glicerina mezclada con agua en distintas proporciones. La combinación de este procedimiento con el de los cortes á poco espesor nos ha permitido conseguir imágenes buenas de objetos teñidos artificialmente por reactivos considerados hasta ahora como opacos á la luz ultra-violeta. Véanse, por ejemplo, las figuras 1 y 2 de la lámina XIII, de una célula de Betz teñida por el azul de metileno, y las 3 y 4 de la misma lámina, que representan cortes de corteza cerebral humana tratados por el método de Achúcarro, modificado, para adaptarlo á la observación, con luz ultra-violeta (*).

(*) Este excelente método radica en el empleo del tanino y el nitrato de plata. *(Nuevo método para el estudio de la neuroglia y del tejido conjuntivo,* por N. Achúcarro. Sociedad Española de Biología. Sesión del 20 de Octubre de 1911.)

OBSERVACIONES SOBRE EL MANEJO DE LOS MONOCROMÁTICOS

Al describir los monocromáticos hemos dado sus factores ópticos, apertura equivalente, distancia focal y penetración, y con éstos puede calcularse el resultado que de ellos cabe esperar. Pero este resultado sería, hasta cierto punto, teórico, debido á que luego, al trabajar con los objetivos, intervienen otros factores, que dependen del objeto en su mayor parte, y que influyen no poco en el resultado final. Convenía, pues, hacer ensayos con los tres monocromáticos, y con objetos lo más variados posible, para ver prácticamente lo que de aquéllos puede esperarse. Estos ensayos se hicieron en el laboratorio á continuación de los de técnica que anteceden, y vamos á dar sucinta cuenta de lo que, en nuestra opinión, se deduce de ellos.

La serie que forman los tres monocromáticos es completa, en lo que atañe á grandes aperturas; entendiendo por éstas á las que exceden de 0,80, puesto que disponemos de la serie 0,7, 1,7 y 2,5; y si por acaso se necesitase una comprendida entre estas cifras, podríamos obtenerla diafragmando al objetivo sobre su lente superior. Nos hemos cerciorado de que los monocromáticos se prestan bien á esta reducción, y hemos comprobado que resisten una disminución de un tercio de su apertura equivalente sin que se noten en la imagen defectos de definición. Para este experimento nos hemos valido de un diafragma iris interpuesto entre el objetivo y el tubo del microscopio (*). Indicamos esto porque en algunos casos puede ser útil reducir la apertura de un monocromático, bien para aumentar su pene-

(*) Los ópticos ingleses venden este diafragma montado en una pieza provista de roscas universales para que pueda adaptarse á todos los microscopios. Llaman á esta pieza «Nosepiece Iris Diaphragm». Su precio es de 18 chelines.

tración, bien para comparar su efecto con el de otro objetivo, acromático ó apocromático, de apertura dada.

En cuanto al aumento, ya hemos dicho, al hablar de los oculares de cuarzo, que no se pueden conseguir con ellos y con los monocromáticos aumentos menores de 200 diámetros, y hemos explicado las razones que se oponen á ello y los inconvenientes que esto trae en la práctica. En el laboratorio hemos ensayado un método indirecto de conseguir vistas de conjunto á menos de 200 diámetros, y vamos á exponerlo, aun cuando reconocemos que es largo, pesado y de resultados inciertos, por lo cual sólo se debe emplear cuando sea absolutamente indispensable. Consiste en tomar varias fotografías á 200 diámetros de zonas contiguas del corte que se examina, y de manera que cada fotografía contenga parte de los bordes de la anterior; sacar después positivas de todas ellas; recortarlas y pegarlas á un cartón una junto á otra, de la misma manera que se pegan las diversas vistas que componen un panorama ó las múltiples hojas de un mapa, y, por último, fotografiar el conjunto á menor tamaño por medio de una cámara ordinaria.

El monocromático de seis milímetros y 0,7 de opertura equivalente representa en luz ultra-violeta á los objetivos medios de la serie apocromática en la luz visible. Su manejo es muy fácil, más que el de los objetivos secos potentes (0,95 ap.ª num.ª) de esta última serie, debido á su mayor distancia frontal y á que no es necesario manejar el collar de corrección, puesto que los cubre-objetos son todos del mismo espesor. Resiste bien aumentos hasta de 800 diámetros. A partir de ellos, la imagen pierde algo en definición, y vale más apelar al objetivo siguiente, de 1,7 de apertura. Lo que más sorprende en el monocromático de seis milímetros es su enorme penetración. Todos los detalles resultan en foco en la placa fotográfica, y es preciso que el objeto sea muy grueso para que no suceda así. Es, pues, de uso muy práctico para vistas de conjunto, salvo el inconveniente de su mucho

aumento; para orientarse en la preparación y para reproducir elementos relativamente grandes. Es el objetivo que más se usa, pues conviene siempre empezar por él y emplearlo antes que á los otros dos, para preparar el alumbrado y centrar al detalle que se va á estudiar.

El objetivo de 2,5 milímetros y 1,7 de apertura equivalente es más potente que el superior de la serie apocromática, aun incluyendo en ella al de 1,6 de apertura é inmersión en monobromuro de naftalina; y esto da especial interés á la comparación entre lo que muestra este monocromático con lo que habían mostrado antes los objetivos más potentes para luz visible. Su apertura, de 1,7, y su penetración, mayor que la de los apocromáticos, lo hacen inapreciable para el estudio de detalles histológicos. Su manejo no es difícil; pero conviene observar ciertas reglas para facilitar este manejo y para evitar accidentes en la lente frontal ó en la preparación. Debemos advertir, en primer lugar, que no es indispensable emplear siempre el condensador con frontal y de inmersión en glicerina, que corresponde por su apertura á este objetivo. Es regla general en microscopía que, salvo cuando se emplea luz oblicua, caso muy raro en esta técnica, *se debe trabajar siempre con un cono de luz estrecho,* esto es, con un condensador de menor apertura que la del objetivo (*), y, por consiguiente, para el de 1,7, que estamos considerando, sirve muy bien el condensador sin frontal, que trabaja en seco, y cuya apertura es de 0,3, siempre y cuando se emplee á plena apertura, ó sea con el diafragma abierto del todo. Esto es más fácil y más cómodo que usar el con-

(*) Esto contradice lo que han afirmado los microscopistas ingleses, y aún siguen afirmando algunos de ellos. Sin embargo, se ha demostrado de un modo concluyente que la imagen obtenida con un *cono ancho de luz* tiene que ser, y es, inferior en calidad á la obtenida con un cono estrecho (C. Abbé: *On the Effect of Illumination by means of Wide-angle Cones of Ligh. Journal of the Royal Microscopical Society,* 1889; pág. 721) Además, la práctica diaria con el microscopio confirma esto mismo á cada paso.

densador de inmersión; pero si por acaso se emplea éste, debe irse cerrando paulatinamente su diafragma hasta que se obtenga en la imagen del visor un contraste vigoroso y desaparezca esa especie de niebla que se nota cuando la apertura del condensador es muy grande y la luz muy viva. Con la chispa del magnesio, $\gamma = 0{,}28\ \mu$, es más necesaria esta precaución que con la del cadmio, por ser aquélla más luminosa que ésta. El centrado del objeto y el enfocado del condensador se deben hacer siempre con el monocromático de seis milímetros, y no se debe poner en el microscopio el de 1,7 milímetros sino cuando aquellas operaciones estén del todo terminadas, para que no haya mas que enfocar al objeto. Va sin decir que deben tomarse estas mismas precauciones, y con mayor cuidado todavía, cuando se trabaja con el objetivo de 2,5 de apertura equivalente.

Hemos comparado repetidas veces fotografías de un mismo objeto obtenidas con el monocromático de 1,7 y con el apocromático Zeiss de 1,4, y siempre nos ha sorprendido la mayor claridad y la incomparablemente mayor uniformidad de foco de las obtenidas con el primero. ¡Lástima que no pueda verse la imagen en el visor de urano con la misma claridad con que se ven las del apocromático en el campo del microscopio!

El objetivo de 2,5 milímetros de apertura equivalente era la novedad del método en cuanto á óptica micrográfica. Poder trabajar con una apertura casi doble que la mayor para luz visible fué, como hemos dicho ya, lo que se propusieron en primer término los ópticos alemanes. Pero ahora que el problema está resuelto, cabe preguntar: ¿Es aplicable esta apertura á los estudios generales de microscopía, ó existen tales restricciones ópticas y tales dificultades en el manejo de este objetivo, que sólo pueda utilizarse en casos excepcionales y para objetos de determinadas condiciones? El ejemplo de lo ocurrido hace años con el objetivo de 1,6 de apertura é inmersión en monobromuro de naftalina justifica-

ba la duda que envuelve la anterior pregunta. De aquí el interés que había en manejar á este monocromático, en aplicarlo á diversos objetos y en estudiar sobre ellos su valor práctico. Esto se ha hecho en el laboratorio, y como consecuencia de nuestros trabajos, nos atrevemos á pronunciarnos por la afirmativa, por haber visto que la enorme apertura de este monocromático es utilizable en cortes de tejidos, en disociaciones y en otra porción de objetos, con las mismas ó pocas más restricciones que exigen los objetivos apocromáticos de grande apertura y de inmersión homogénea. Claro está que los cortes han de ser muy finos, que han de estar bien planos y que han de ser lo suficientemente transparentes; pero estas condiciones son necesarias para todos los objetivos potentes, y no olvidemos que la penetración de éste no es menor que la de un objetivo de 1,25 de apertura para luz visible, y que, por lo tanto, la dificultad de obtener un buen foco y evitar los *anillos de confusión* es relativamente pequeña. Tampoco existe la que atañe al líquido de montura, que ya señalamos para el objetivo de inmersión al monobromuro, pues la glicerina, mezclada con agua ó pura, está dentro de las condiciones ópticas de este monocromático en cuanto á índice de refracción, y es inofensiva para los tejidos orgánicos.

Este objetivo, como corrección óptica, definición y luminosidad de imagen, es sencillamente insuperable y representa el *summum* de perfección en las construcciones de esta clase. Lo hemos aplicado á la resolución de masas granulares, al estudio de la contextura del núcleo y nucleolo, y á la investigación de algunos órganos dudosos, como membranas celulares, fibrillas de las células nerviosas, trabéculos y otros. El resultado ha sido siempre afirmativo. Esta apertura tan grande no es un alarde de óptica hecho por el constructor, sino una cosa utilizable y práctica, que puede prestar serios servicios en técnica histológica y en otras varias ramas de la micrografía, y que abre un interesantísimo y

muy vasto campo de estudio, cual es el de comprobar las opiniones deducidas de lo que se ha visto con los objetivos potentes para luz ordinaria con las que se deduzcan de lo que éste muestra con luz ultra-violeta; y es seguro que si hacen este estudio personas competentes en histología, no sólo han de modificarse algunas de aquellas opiniones, sino que han de descubrirse cosas nuevas, que sólo una apertura de 2,5 es capaz de mostrar.

No publicamos ahora los resultados que hemos obtenido con este monocromático, porque no son todavía bastante completos para demostrar palpablemente lo que afirmamos, y también, y principalmente, porque la interpretación de buena parte de estos resultados precisa conocimientos histológicos de que nosotros carecemos. Es posible, sin embargo, que, ayudados por personas competentes que suelen frecuentar este laboratorio, nos decidamos en breve á publicar una nota que contenga, entre otras cosas, las observaciones hechas con este monocromático en elementos del sistema nervioso y en tejidos orgánicos en general.

Para terminar lo referente á estos objetivos debemos prevenir, á los que piensen practicar la luz ultra-violeta, de una particularidad de aquéllos, que no hemos visto expuesta en el prospecto general de Zeiss, ni en otras publicaciones sobre esta técnica. Es que la combinación de monocromáticos oculares de cuarzo y visor *da imágenes rectas*, ó sea en la misma posición en que está el objeto que se examina, y no *imágenes invertidas*, como las que da la combinación objetivo-ocular de los microscopios ordinarios. Esto puede originar confusiones y dificultades en el manejo de la instalación, si no se sabe de antemano la particularidad en cuestión; pero, una vez sabida, el hábito de manejar al revés los tornillos de la platina se adquiere en poco tiempo.

PROGRAMA DE TRABAJOS

Fijados ya los puntos principales del procedimiento, se procedió á la investigación que desde un principio nos habíamos propuesto para comenzar, y que consistía en ver las diferencias de aspecto que presentaban á la luz ultra-violeta los principales tejidos orgánicos de las diversas ramas del reino animal y vegetal, principalmente del primero. Se trataba de averiguar cuáles seres podían estudiarse con fruto por medio de la luz ultra-violeta, y simultáneamente, cómo se comportaba ante dicha luz el protoplasma de cada tejido. Se ha operado casi siempre con la radiación del cadmio, $\lambda = 0{,}275\ \mu$, y á veces con la del magnesio, $\lambda = 0{,}28\ \mu$, dejando para más adelante el intento de aplicar radiaciones de distinta longitud de onda, para comparar sus resultados con los de las dos dichas. Exponemos á continuación un resumen de las observaciones hechas, y lo exponemos, no como conclusiones concluyentes, sino como simples indicaciones, que tal vez puedan servir de algo á otros operadores.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXX.— Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia octava..... 645

XXXI.— Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkoswki (continuación), por *B. Cabrera* 670

XXXII.— La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopía, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912 (continuación), por *Domingo de Orueta*..... 686

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NÚMERO 10.
ABRIL DE 1913.

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1913

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXIV. — Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia novena.

SEÑORES:

Bueno será, antes de continuar nuestra tarea, hacer un rapidísimo resumen de todas las Conferencias precedentes, puesto que aquí termina, por decirlo así, una primera etapa, y hoy vamos á empezar la segunda.

Hemos dicho y hemos repetido, que en toda la Física Matemática clásica domina la hipótesis mecánica y que, por lo tanto, la Mecánica es la ciencia fundamental en la historia de la Física Matemática.

Y agregamos, que si hoy no domina de una manera tan absoluta, todavía su influencia es extraordinaria y no pocas veces continúa siendo dominante.

Por tales estas razones, que ampliamente desarrollamos, todos los problemas de Mecánica nos merecen marcada predilección, y claro es que habíamos de consignar, como punto de partida en el presente estudio, las ecuaciones generales de la Dinámica, que, establecidas sobre el principio de las velocidades virtuales y sobre el teorema de D'Alembert, tenían esta forma:

$$\Sigma_1^k \left[\left(X_i - \frac{d^2 x_i}{d t^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - \frac{d^2 y_i}{d t^2} \right) \delta y_i + \right.$$
$$\left. + \left(Z_i - \frac{d^2 z_i}{d t^2} \right) \delta z_i \right| = 0 \qquad (i = \ldots\ldots n).$$

By transfer
FEB 12

Después dedujimos de estas ecuaciones generales las ecuaciones generales de Lagrange, aplicadas á un sistema cualquiera, pero en que ya no entraban más que el *número mínimo* de funciones q, que como independientes se introducían en el sistema para determinar su forma en todo momento.

A las ecuaciones generales anteriores, en las que es claro que si existen enlaces, todas las x, y, z no pueden ser independientes unas de otras, sustituíamos las ecuaciones de Lagrange; las que, representando por q_1, q_2 ..... q_k las variables ó coordenadas en número mínimo del sistema, se reducen á

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2 \ldots k)$$

Estas ecuaciones, que son clásicas, y que aun hoy mismo se aplican, ó á nuevas cuestiones de Mecánica, ó á nuevas teorías de la Física Matemática moderna, como, por ejemplo, para no citar más que dos, á la teoría de la electricidad y á la thermodinámica, estas ecuaciones, repetimos, son ecuaciones diferenciales de segundo orden, conteniendo k funciones q de la variable independience t, que representa el tiempo.

Se comprende, que por los procedimientos ordinarios del cálculo, introduciendo las $q' = \frac{dq}{dt}$ como nuevas funciones, dicho sistema puede convertirse en otro de diferenciales simultáneas de primer orden con $2k$ funciones y la variable independiente t, y aun se les puede dar la forma normal, empleada ordinariamente, con sólo despejar las derivadas de primer orden.

Pero no es q' la nueva función que hemos elegido.

Hemos aplicado la transformación Poisson-Hamilton, eligiendo como nuevas funciones

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_3} = p_3 \ldots\ldots \frac{\partial T}{\partial q'_k} = p_k$$

y de este modo hemos transformado las ecuaciones clásicas de Lagrange, reduciéndolas á este nuevo sistema de forma extraordinariamente sencilla:

$$\frac{dp_1}{dt} = Q_1 - \frac{\partial K}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = Q_2 - \frac{\partial K}{\partial q_2}, \ldots\ldots \frac{dp_k}{dt} = Q_k - \frac{\partial K}{\partial q_k}$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \ldots\ldots \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_k}$$

ó abreviadamente

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= Q_i - \frac{\partial K}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial k}{\partial p_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

cuya forma es ya la forma canónica ordinaria de las ecuaciones diferenciales simultáneas de una variable independiente, puesto que, en rigor, para todos los problemas, ó para cada problema, los segundos miembros son funciones perfectamente determinadas en que no entran más que las funciones

$$p_1, p_2 \ldots\ldots p_k$$
$$q_1, q_2 \ldots\ldots q_k$$

y el tiempo t.

Pues si bien es cierto, que en los segundos miembros aparecen formas de diferenciación, estas derivaciones pueden efectuarse, toda vez que la K es una función que se determina *à priori* y que se expresa de este modo

$$K = \Sigma_1^k p_i q'_i - T;$$

en razón á que del segundo miembro se pueden siempre eli-

minar las q', como explicamos en la Conferencia anterior, y no quedarán más que las p, q, t.

Por último, introducíamos dos simplificaciones para dos casos particulares, que, aun siendo casos particulares, tienen gran generalidad.

Cuando las fuerzas exteriores tienen una función de fuerzas, ó, si se quiere, salvo el signo, una potencial U, las Q se expresan de este modo

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

y entonces las ecuaciones anteriores, que podemos decir que son las generales de la Mecánica con las variables Poisson-Hamilton, toman esta forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2 \;....\; k)$$

siendo H una función de las p, q, t, que se expresa de este modo

$$H = \Sigma_1^k p_i\, q'_i - T - U.$$

La segunda y última simplificación consiste en suponer, no sólo como en la primera simplificación, que las fuerzas exteriores se derivan de una potencial, sino que en las ecuaciones de los enlaces no entra el tiempo.

En este caso, que es el caso á que generalmente nos referiremos, la forma canónica de Hamilton para las ecuaciones de la Mecánica será, como antes:

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Pero la funeión H tendrá esta forma sencillísima

$$H = T - U;$$

y repetiremos, como siempre, que, siendo conocida como lo es, en cada caso, la función $T - U$, es decir, pudiendo en todos los problemas expresar esta función H directamente y *à priori* en valores de p y q, claro es que los segundos miembros de las ecuaciones generales, aunque tienen la forma de derivada para expresar cómo se obtienen, serán funciones de forma conocida en p y en q.

El signo ∂ no es más, que el que indica una operación que ha de efectuarse sobre una función dada *à priori*.

Efectuada la operación, el signo diferencial desaparece de los segundos miembros.

En cambio, queda siempre el signo diferencial en los primeros miembros, porque afecta á las funciones desconocidas de t, que hemos llamado p y q.

Por eso el sistema es de ecuaciones diferenciales.

Y además los segundos miembros se reducen á términos finitos y las ecuaciones canónicas de Hamilton entran en el tipo normal ordinario

$$\frac{dp_i}{dt} = f(p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = g(p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k)$$

suponiendo que no aparece t ni en los enlaces ni en las Q.

*
* *

Quedan, pues, reducidos la mayor parte de los problemas de Mecánica á integrar el sistema de ecuaciones diferenciales del sistema canónico, que acabamos de expresar.

Y aquí acaba el problema de Física Matemática ó de Mecánica, que pretendíamos resolver, y empieza un problema de Matemáticas puras.

Este problema de la integración no puede tener actualmente el mismo sentido que, por instinto, se le daba en un principio, ó que le daban algunos matemáticos en el origen de esta rama de la Ciencia.

Aun hoy mismo se emplean frases, que no son todo lo correctas ó todo lo claras que debieran ser. Se dice *integrar una ecuación diferencial ó un sistema de ecuaciones diferenciales*, ó bien *hallar la integral ó las integrales* de estas ó de aquellas ecuaciones, que se presentan bajo forma diferencial.

Y esto, decimos, y lo hemos dicho varias veces, que ni es correcto ni es exacto en términos absolutos, aunque es la forma usual.

Permítaseme volver una vez más, siquiera sea rápidamente, sobre estas ideas; y para fijar más sus términos y concretar nuestro pensamiento tomemos, entre los infinitos sistemas de ecuaciones diferenciales, que pueden presentarse, el más sencillo, el más elemental: el que se refiere á la integración por cuadraturas, como se dice generalmente.

Supongamos que se nos pide la integración de esta ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Si al pedirnos una función de x

$$y = \varphi(x)$$

se nos exige que esta función φ sea una de las funciones ya conocidas ó una combinación definida de estas funciones, conteniendo un número finito de operaciones, se nos pide

en la mayor parte de los casos un imposible, diré más, un absurdo.

Supongamos, para concretar aún más la cuestión, que el matemático *no conoce ni ha estudiado* más que funciones algebraicas de x, racionales ó irracionales, y funciones trigonométricas, pero que no ha tenido ocasión ni de estudiar, ni de definir siquiera, las funciones logarítmicas.

Pues en este caso, pedirnos que integremos la ecuación diferencial

$$dy = \frac{1}{x} dx$$

es pedirnos un imposible, y aun es pedirnos un absurdo *si se pretende que expresemos la integral de esta ecuación diferencial en términos finitos* de las funciones conocidas algebraicas y trigonométricas; porque *no hay combinación* ninguna en número finito de operaciones, tal, que combinando funciones algebraicas y trigonométricas, la expresión que resulte diferenciada con relación á x tenga por coeficiente diferencial $\frac{1}{x}$.

Si la integral es una función logarítmica y no conocemos las funciones logarítmicas, ¿qué sentido puede tener el problema planteado, por decirlo de este modo, en estos términos estrechos?

Y claro es, que prescindimos de otro aspecto moderno de la cuestión: el de si la ecuación diferencial será ó no será integrable.

Supongamos que lo sea, que existe una función bien definida cuyo coeficiente diferencial sea $\frac{1}{x}$, pues si no conocemos esta función, mal podemos resolver el problema por una función de todo punto ignorada, más aún, cuya existencia ni siquiera sospechamos.

El problema se presenta en este caso desde otro punto de

vista, y en cierto modo, se descompone en dos partes:

Primera. Haciendo la lista de las funciones ya definidas y estudiadas, que para precisar la explicación llamaremos

$$y = C_1(x),\ y = C_2(x) \ldots\ldots y = C_n(x), \qquad (C)$$

puede preguntarse y es problema legítimo, y refiriéndonos siempre, para más precisión, al ejemplo sencillísimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x};$$

puede preguntarse, repetimos, si por medio de combinaciones en términos finitos de las funciones (C), ¿puede expresarse una función cuya derivada sea una función conocida, por ejemplo, $\frac{1}{x}$ en nuestro caso?

Y la contestación puede ser afirmativa ó negativa.

Si es negativa, hay que dar la demostración; demostraciones que siempre son difíciles.

Si, por el contrario, el problema es posible, es natural que se trate de resolver.

Pero ocurre un segundo problema, que es mucho más general que el primero.

Suponiendo que se demuestra la imposibilidad de hallar una función que, siendo combinación finita de las C, tenga por derivada $\frac{1}{x}$; ya el problema, en rigor, no es de integración, es *de definición* y *estudio de nuevas funciones.*

La ecuación diferencial viene á definir una nueva función, antes no estudiada, ó, más en general, un sistema de funciones, no estudiadas tampoco.

Y aquí se abre un inmenso horizonte á la Ciencia.

Definir nuevas funciones ó nuevos sistemas de funciones por medio de ecuaciones diferenciales y *deducir las propiedades de estas funciones sólo de sus ecuaciones diferenciales.*

Así, en el ejemplo que hemos presentado, sólo de la consideración de la derivada $\frac{1}{x}$ puede deducirse la propiedad de que la suma de los logaritmos ha de ser logaritmo del producto.

Así, todavía de la ecuación diferencial

$$dy = \pm \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

suponiendo que no se conozcan las líneas trigonométricas, pueden deducirse las principales propiedades del seno y del coseno, su periodicidad entre otras, y por de contado el teorema de la suma ó de la diferencia de dos arcos.

Así, todavía pueden estudiarse las funciones elípticas y las funciones avelianas y las *fuchsiennes* de Poincaré.

En resumen, definida una función ó un sistema de funciones por medio de ecuaciones diferenciales, hay que deducir de estas ecuaciones diferenciales — porque se supone que no de otro modo es conocida la nueva función ó las nuevas funciones; hay que deducir, repito, sus propiedades, su marcha general, su periodicidad, si es periódica, sus ceros y sus infinitos, sus puntos singulares, sus teoremas de sumas ó diferencias, y, por último, su cálculo numérico para las aplicaciones prácticas.

***

Pero cuestiones son éstas en que, naturalmente, no podemos detenernos; ni siquiera en los métodos generales de integración de las ecuaciones canónicas de Hamilton, á no ser para dar algunas ideas generales.

Claro es que, entrando estas ecuaciones en el *tipo normal* de las ecuaciones diferenciales con una variable, á este sistema se aplica el método llamado de los *límites* ó de las *ma-*

yorantes (y valga la palabra, traducida directamente del francés); el método de Cauchy, por lo tanto, el de Cauchy perfeccionado; el de los multiplicadores y el de los grupos por transformación de Lie.

Sobre todas estas teorías, de las que sólo podemos aquí dar los nombres, y los damos para excitar la curiosidad científica de nuestros alumnos por si no las conocen, puede verse, entre otras obras de consulta, la elemental exposición, elemental pero substanciosa y magistral á la vez, que presenta Mr. Goursat en su curso de Análisis matemático.

Pero así y todo, y por el interés teórico y práctico que presenta la forma canónica de Hamilton, hemos de estudiar dicho tipo en estas Conferencias, aunque á la ligera; pues de dichas teorías hemos de hacer varias aplicaciones. Y ya encontramos un ejemplo en la teoría de los torbellinos rectilíneos y paralelos.

Precisamente en este problema nos detuvimos hace dos cursos por no conocer, ó suponer que mis alumnos no conocían, los métodos que en el presente curso vamos á exponer.

Así cerraremos, si se nos permite la comparación, el paréntesis que abrimos hace dos años en la serie de estas Conferencias, y que en éste nos proponemos cerrar definitivamente.

***

Volvamos, pues, reanudando nuestra tarea, á las ecuaciones de la Mecánica, presentadas bajo la forma á que se da el nombre abreviado de forma canónica de Hamilton.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k) \qquad (D)$$

Este sistema de $2k$ ecuaciones diferenciales con $2k$ funciones, que son las p y las q, es el que debemos integrar en cada caso.

Ya hemos visto que, en rigor, la forma canónica de Hamilton está dentro de la forma normal ordinaria.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= f_i(p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, t) \\ \frac{dq_i}{dt} &= g_i(p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, t) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

ólo que la f y la g se deducen de una sola función H, dif e renciándola para las f con relación á las q, y para las g con relación á las p, como se ve en las ecuaciones fundamentales; es decir, que las funciones p y q están cambiadas.

Más claro, que para las derivadas de las p con relación á t se obtiene el segundo miembro diferenciando H con relación á q. Y para las derivadas de las q con relación á t se obtiene el segundo miembro diferenciando la misma función H con relación á p.

Integrar este sistema de ecuaciones diferenciales es determinar las funciones p y q en valores de t; es decir, encontrar un sistema de $2k$ ecuaciones como el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1(t, C_1, C_2, \ldots\ldots C_{2k}) \\ p_2 &= \alpha_2(t, C_1, C_2, \ldots\ldots C_{2k}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k &= \alpha_k(t, C_1, C_2, \ldots\ldots C_{2k}) \\ q_1 &= \beta_1(t, C_1, C_2, \ldots\ldots C_{2k}) \\ q_2 &= \beta_2(t, C_1, C_2, \ldots\ldots C_{2k}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k &= \beta_k(t, C_1, C_2, \ldots\ldots C_{2k}) \end{aligned}\right\} \quad (Y)$$

tal, que las funciones α y β, que son funciones de t y de $2k$ constantes arbitrarias C_1, $C_2 \ldots\ldots C_{2k}$, satisfagan á las ecua-

ciones de Hamilton convirtiéndolas en identidades sin fijar los valores de C.

Para precisar bien las ideas, tomemos una de las ecuaciones del sistema Hamilton, que expresando las variables que contiene el segundo miembro, será como hemos dicho

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i\,(p_1 \ldots\ldots p_2,\, q_1 \ldots\ldots q_2,\, t).$$

Poniendo en esta ecuación los valores del sistema *(Y)* se convertirá en

$$\alpha'_i\,(t,\, C_1 \ldots\ldots C_{2k}) = f\,[\alpha_1\,(t,\, C_1 \ldots\ldots C_{2k}), \ldots\ldots$$
$$\alpha_{2k}(t,\, C_1 \ldots\ldots C_{2k}),\, \beta_1\,(t,\, C_1 \ldots\ldots C_{2k}) \ldots\ldots \beta_{2k}(t,\, C_1 \ldots\ldots C_{2k})\, t]$$

ecuación que no contiene más que el tiempo t, las constantes arbitrarias C y las constantes, naturalmente, del problema, que son datos.

Pues para que el sistema *(Y)* constituya el sistema general de integrales de las ecuaciones diferenciales propuestas es preciso, que esta última ecuación sea una identidad, es decir, que el tiempo t y las constantes C se destruyan entre sí, sin darles valores particulares, y que dicha ecuación se reduzca, por lo tanto, á $0 = 0$.

Y esto ha de verificarse para todas las ecuaciones diferenciales del sistema *(D)*.

Si esto se verifica, el sistema *(Y)* que da los valores de las p y las q, en función del tiempo y de $2k$ constantes arbitrarias, constituirá el sistema de integrales de las ecuaciones diferenciales *(D)*.

Dicho esto con todas las salvedades y explicaciones que antes expusimos.

Si las α y las β son funciones de las ya conocidas, hemos obtenido realmente las integrales del problema.

Si no las conocemos, pero existen, habrá que estudiarlas mediante las ecuaciones diferenciales.

Por último, si existen, aunque no las conozcamos de antemano, será posible encontrarlas desarrolladas en serie por los métodos que enseña el cálculo integral.

Nosotros en adelante, diremos ya sin escrúpulos, que integrar el sistema *(D)* es buscar un sistema *(Y)* en que las funciones p y q estén expresadas en valores del tiempo y que conviertan en identidades todas las ecuaciones del sistema *(D)*.

Se demuestra en el cálculo integral, y no podemos hacer aquí otra cosa que recordarlo, que las integrales más generales de las ecuaciones diferenciales de primer orden (D) han de contener $2k$ constantes arbitrarias, que se determinarían en cada caso particular por la condición de que en un instante cualquiera, por ejemplo, $t = 0$, las p y las q tuvieran valores determinados

$$(p_1)_0, (p_2)_0 \ldots\ldots (p_k)_0, (q_1)_0, (q_2)_0 \ldots\ldots (q_k)_0.$$

Y, en efecto; si en el primer miembro de las ecuaciones (Y) ponemos estos valores, y en el segundo miembro en vez de t ponemos 0, las ecuaciones (Y) se convertirán en $2k$ ecuaciones con $2k$ incógnitas $C_1, C_2 \ldots\ldots, C_{2k}$, de cuyo sistema se podrán deducir los valores de estas últimas cantidades, porque son $2k$ ecuaciones con $2k$ incógnitas.

Esto es lo mismo, generalizado, que lo que se hace al integrar una ecuación de primer orden con dos variables. Esta ecuación representa un sistema de curvas que constituyen la integral general, y el valor de la única constante arbitraria de este caso se determina fijando el punto por el cual ha de pasar la curva que se elige, es decir, estableciendo que para el valor de x elegido x_0, y ha de tomar el valor y_0.

Con esto basta para determinar el valor de la constante arbitraria por medio de la ecuación

$$F(x, z, C) = 0,$$

en que ponemos

$$F(x_0, y_0, C) = 0.$$

En nuestro caso la única variable independiente es t, que equivale á la x de este último ejemplo, y en vez de una sola función y, tenemos $2k$ funciones, que son las p y las q.

Si el sistema (Y), para ciertos valores de las constantes C, satisface al sistema (D), pero no para todos los valores de dichas constantes, ya el sistema (Y) no representará la solución más general, sino en todo caso una solución particular.

***

Vamos á definir ahora un concepto de uso general en estas teorías. El concepto de *integral primera* en las ecuaciones diferenciales del movimiento de un sistema.

Se dice que una expresión de la forma

$$F(p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, t) = c$$

de las p y las q, en que c representa una constante, es una *integral primera* del sistema de ecuaciones diferenciales, cuando, sustituyendo en vez de las p y las q sus valores del sistema (Y), el tiempo desaparece y la ecuación queda reducida á una identidad

$$c = c;$$

ó, si se quiere, dado que no desaparezcan todas las C,

$$F_1(C_1, C_2 \ldots\ldots C_{2k}) = c$$

que como las C son arbitrarias, pueden fijarse de modo que el primer miembro se convierta en c, y quedaría como hemos dicho

$$c = c.$$

Mas en general esto es lo mismo, que si dijéramos, que la función (F), en todo el movimiento del sistema, y sean cuales fueren las condiciones iniciales, es decir, los valores de C, conserva un valor constante c.

Si los valores de p y de q del sistema (Y) convierten en identidad la ecuación $F = c$, ocurre por intuición inmediata, que esta ecuación puede suplir á cualquiera de las ecuaciones del sistema (Y), y que si tuviéramos $2k$ ecuaciones como la (F), y las c fueran arbitrarias, este sistema podría sustituir al (Y) y de él podríamos despejar las p y las q, en función del tiempo y de las $2k$ constantes C.

Se dice, que son *integrales primeras*, porque ha de recordarse, que las ecuaciones diferenciales del movimiento son de *segundo orden*, y en estas ecuaciones últimas entran las p, que dependen de las $q' = \frac{dq}{dt}$ que son derivadas primeras. Y cuando en las ecuaciones diferenciales de segundo orden se obtienen relaciones entre las derivadas primeras y las variables, se afirma, en general, que estas ecuaciones son *integrales primeras*. Además, la denominación es justa porque las ecuaciones diferenciales contenían derivadas segundas, y si ahora tenemos relaciones con derivadas primeras es, en cierto modo, haber efectuado una primera integración.

Así, apurando la analogía, si la ecuación $F = c$ se convirtiera en una de las que dan el valor de las p en el sistema (Y), podríamos decir que ésta era una *integral primera*, salvo que contiene más de una constante.

Y, en cambio, en el mismo sistema (Y) las ecuaciones que dan los valores de q son integrales segundas y definitivas porque dan el valor de la función ó coordenada auxiliar del sistema q.

Claro es que si $F = c$ es una integral primera, también lo será cualquier función φ de F, es decir:

$$\varphi\,[F(p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k, t)] = c;$$

y esto es evidente, porque durante el movimiento F es constante, en F desaparece el tiempo y queda reducida á c, de modo que la ecuación anterior será

$$\varphi(c) = c_1$$

siendo c_1 otra constante, pues la función de una constante es otra constante.

Y aun esto se puede generalizar, y podemos decir, que si

$$F_1(p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k t) = c_1, F_2 = c_2, F_3 = c_3 \ldots\ldots F_l = c_l$$

son l funciones primeras, una función de todas ellas, sea cual fuere, será también una función primera. En efecto,

$$\varphi(F_1, F_2 \ldots\ldots F_l)$$

se convierte cuando se sustituyen por las p y las q los valores del sistema (Y) en

$$\varphi(c_1, c_2 \ldots\ldots c_l)$$

que es una constante c_o, por ejemplo; y tendremos

$$\varphi[F_1, F_2 \ldots\ldots F_l] = c_l$$

en que el primer miembro es una función de las p, de las q y del tiempo, que al sustituir en ella los valores de p y q del sistema (Y) se convierte en c_0, ó sea en una constante.

Así se comprende que para las ecuaciones del movimiento puede haber varias integrales primeras.

Mas aquí aparece otro concepto muy importante, y que se repite en muchas cuestiones de análisis, y es el de integrales primeras *distintas*.

Es decir, que hay integrales primeras distintas unas de otras, ó sea que ninguna de ellas se puede deducir por una combinación de varias de las restantes ó de todas.

Fijemos las ideas.

Supongamos tres integrales primeras

$$F_1 = c_1 \; F_2 = c_2, F_3 = c_3.$$

Para que sean distintas, según definición, es necesario y suficiente, que cada una de ellas no pueda expresarse por una combinación de las otras dos ó de una de ellas.

Es preciso, por lo tanto, que no se puedan establecer relaciones análogas á ésta

$$F_3 = \varphi (F_1, F_2).$$

De modo que no existe ninguna función φ capaz de satisfacer á tales relaciones.

Tenemos, pues, definidas las *integrales primeras* de las ecuaciones del movimiento, y hemos establecido asimismo la definición de *integrales primeras distintas.*

*
* *

En general, toda relación entre las p, las q y el tiempo, tal como

$$F (p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k, t \ldots\ldots c_1, c_2 \ldots\ldots c_l)$$

que quede satisfecha por el sistema (Y), dando á las constantes c_1, c_2..... ciertos valores, se dice que es una integral cualquiera de las ecuaciones diferenciales.

Es, por decirlo de este modo, una generalización de las integrales primeras, pues si en vez de entrar l constantes entra sólo una, podremos despejar con relación á ésta y resultará la expresión general de las integrales primeras.

Todas éstas son nociones probablemente conocidas de mis alumnos, y en que no debemos insistir, salvo el precisar estas ideas siempre que para las aplicaciones sea esto necesario.

Como el ir obteniendo integrales primeras, ó, en general, integrales cualesquiera, de esta última clase que hemos explicado, se comprende que es ir adelantando en el camino de la integración, resulta de aquí, que obtener las condiciones á que debe satisfacer una expresión de la forma

$$F(p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k, t) = c \qquad (F)$$

para ser integral primera será un problema de gran importancia.

Pero, en rigor, esta condición ya la hemos establecido; es preciso y es suficiente, que sustituyendo en esta ecuación en vez de las p y las q los valores del sistema (Y), la ecuación se reduzca á una identidad

$$c = c.$$

Ahora bien; esto supone que ya se ha obtenido el sistema (Y), y en este caso el problema de la integración está resuelto y las integrales primeras puede decirse, que nos sobran, y aun fácilmente podemos obtenerlas, eliminando constantes entre las ecuaciones del sistema (Y).

Mas aquí podemos dar un rodeo para evitar la dificultad, y si dado el carácter de estas Conferencias se me permite una cita vulgar, podré decir que «ya que la montaña no puede venir á Mahoma, Mahoma bien puede ir á la montaña».

Pues esta comparación modestísima hasta puede servide regla nemotécnica.

En último resultado, lo que se quiere poner en evidencia es que el sistema (Y) y la supuesta integral primera $F = c$ son ecuaciones compatibles, de cuya combinación resulta una identidad.

Mas para demostrarlo, no podemos sustituir las p y las q del sistema (Y), porque no lo conocemos. Lo único que conocemos son relaciones entre los coeficientes diferenciales de p y de q con relación al tiempo.

Pues bien; si no sabemos todavía integrar las *(D)* para obtener las *(Y)* y sustituir las p, q en F, *diferenciemos esta última con relación al tiempo,* que esto sabemos hacerlo, y como en la ecuación diferencial que resulta entrarán las p' y q', es decir

$$\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$$

en vez de estas derivadas podemos sustituir sus valores según el sistema *(D)*.

Lo que resulte no podemos *à priori* afirmar que sea una identidad, para ello sería preciso algo que veremos; pero será una relación que deberá verificarse entre p, q, t.

En suma, no sabemos integrar la *(D)*, pero sabemos diferenciar la F.

Efectuemos todo esto que hemos dicho.

Tendremos, diferenciando con relación al tiempo, la ecuación

$$F(p_1 \ldots\ldots p_k, q_1 \ldots\ldots q_k, t) = c$$

y recordando que c es una constante,

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \cdot \frac{dp_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial p_k} \cdot \frac{dp_k}{dt} +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Y ahora, en vez de los coeficientes diferenciales de p y de q con relación al tiempo, podemos sustituir sus valores deducidos del sistema *(D)*, que reproducimos para más claridad.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k) \qquad (D)$$

Haciendo dicha sustitución resultará

$$-\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}-\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}-\ldots\ldots-\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}+$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots\ldots+\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}+\frac{\partial F}{\partial t}=0;$$

y ordenando esta expresión en otra forma, es decir, reuniendo los términos que se refieren al mismo subíndice, tendremos:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}-\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}-\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}\right)+\ldots\ldots+$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}=0. \qquad (G)$$

Si realmente $F = c$ es una integral primera, se verificará al mismo tiempo que el sistema *(Y)* de integrales generales y que el sistema *(D)* que equivale al *(Y)*, esta última ecuación *(G)* que es una consecuencia de las *(D)* y de la F deberá verificarse también.

Pero hay más, y en esto consiste la importancia de este teorema.

La condición *(G)*, no sólo se verifica poniendo en vez de las p y las q sus valores en función del tiempo, sino que se verifica por sí misma destruyéndose unas cantidades con otras y convirtiéndose en una identidad $0 = 0$.

En efecto; la ecuación *(G)*, que para abreviar la escritura presentaremos bajo la forma de una Σ, puesto que todos los grupos de términos sólo difieren en el subíndice; es decir, la ecuación

$$\Sigma_1^k\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \qquad (i=1, 2 \ldots\ldots k) \quad (G)$$

en rigor, es una función de las q, de las p y del tiempo.

Basta para convencerse de ello observar que H es una función de p, q y t perfectamente conocida, de la cual se pueden deducir todas las derivadas parciales respecto á p y q que entran en esta ecuación (G), y los resultados serán funciones también determinadas de las p, q y t.

Como suponemos, que se nos da la función F, de p, q, t, con el objeto de averiguar si es ó no una integral primera; y precisamente para eso estamos buscando la condición necesaria, es claro, que tambien podemos considerar á todos los coeficientes diferenciales de F, con relación á las p y las q, como funciones de estas cantidades y del tiempo t: luego la ecuación (G) es, como decimos, una función de forma determinada en p, q, t, que podremos representar así

$$G(p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, t) = 0.$$

Hemos dicho que si $F = c$ es una integral primera, esta última ecuación debe verificarse; pero hemos agregado, además, que debe ser una identidad, y esto es lo que resulta evidentemente del siguiente razonamiento.

Esta ecuación debe verificarse durante todo el tiempo del movimiento, sean cuales fueren las condiciones iniciales, porque los sistemas (D) (F), de donde proceden, cumplen con esta condición.

Pues consideremos un instante cualquiera t_0; á este instante corresponderán valores de p y q, que representaremos por

$$(p_1)_0, (p_2)_0 \ldots\ldots (p_k)_0, (q_1)_0, (q_2)_0 \ldots\ldots (q_k)_0 \text{ en el tiempo } t_0.$$

Mas no hay inconveniente en considerar este instante como el inicial del movimiento; luego estas p y estas q serán los valores iniciales, y éstos pueden ser arbitrarios, porque para cada sistema de estos valores, sea el que fuere, y durante el movimiento del sistema á que corresponden, la F

ha de quedar invariable; luego la ecuación (G) ha de verificarse para valores arbitrarios de las p y las q, que es precisamente la condición para que sea una identidad.

Esto mismo se puede demostrar en el sistema de integrales (Y), porque basta poner en vez de las p y las q estos valores arbitrarios y determinar los valores de las constantes C que satisfacen á estas condiciones iniciales, y sea cual fuere el sistema de valores de las C, durante todo el movimiento de este sistema subsiste la integral F si es integral primera y subsiste la condición (G).

En suma, la condición necesaria y suficiente para que la relación $F = c$ sea una integral primera y para que subsista en todo el movimiento de todo el sistema, es que se verifique la condición (G).

Luego la regla para conocer si una ecuación que se nos presenta $F = c$ es ó no una integral primera no puede ser más sencilla:

Se sustituyen F y H en la ecuación (G). Cómo se reducirá ésta á una relación de p, q, t, no habrá más que ver si esta relación se convierte en una identidad $0 = 0$.

Si se reduce $F = c$ á una identidad, $F = c$ es una integral primera; si no se reduce, no lo es. Claro es que para llegar á esta conclusión suponemos, no sólo que es condición necesaria, sino suficiente.

Y, en efecto, como (G) resulta de combinar el sistema (Y), ó, mejor dicho, (D) con la ecuación F, á su vez F puede considerarse como el resultado de combinar (Y) ó (D) con (G), y si éstas se verifican para todo instante del movimiento, se verificará $F = c$; es decir, que será independiente del tiempo, que es lo que constituye su definición.

La forma de la condición (G) es clásica en la Mecánica respecto á las ecuaciones canónicas del movimiento, y se escribe con este símbolo su primer término:

$$(F, H)$$

y, por lo tanto, la condición (G) se expresará simbólicamente de este modo:

$$(F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Dicho símbolo es lo que se llama el paréntesis de Poisson, y en su estudio nos ocuparemos en la próxima Conferencia.

XXXV.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la mecánica.

Por José Echegaray.

Conferencia décima.

Señores:

Las teorías matemáticas se fundan en la intuición y en la lógica; mas para aplicar sus razonamientos tienen un vastísimo arsenal, por decirlo así, de útiles, herramientas y máquinas, que son los *símbolos matemáticos*. Todos representan *economía de esfuerzo*.

En cierto modo, la misma diferencia que existe entre el trabajo manual y el trabajo á máquina, existe entre la lógica vulgar y la poderosa lógica matemática aplicada á la maquinaria de las figuras geométricas y á la maquinaria del cálculo algebraico.

La lógica vulgar puede decirse que, hasta cierto punto, procede en serie lineal de silogismos. Los símbolos proceden por combinación de organismos; son máquinas de un número enorme de dimensiones, y á veces de un salto y de una vez llegan á conclusiones á que la lógica vulgar, ó no llegaría, ó llegaría penosamente.

Apuntamos estas observaciones, que para ser bien comprendidas exigirían mayores desarrollos, que los que en estas Conferencias podemos concederles, y motiva estas observaciones, repetimos, lo que al final de nuestra última Conferencia dijimos respecto á un símbolo matemático, que tiene importancia en varias cuestiones de Mecánica y de Física Matemática.

Nos referimos al símbolo que se conoce con el nombre de *paréntesis de Poisson*.

Ya lo explicamos al terminar nuestra última Conferencia; pero vamos á insistir sobre aquella definición.

Prescindamos de toda cuestión de Mecánica y de toda cuestión de Física Matemática, y expliquemos la estructura, por decirlo así, de dicho símbolo.

Sean φ y ψ dos funciones de diferentes variables; y como para la constitución del símbolo vamos á tener que parear ó agrupar estas variables por parejas, supondremos que todas las de una serie se representan por la misma letra q. y todas las de la segunda serie por la letra p, y á las cantidades ó variables que van pareadas les daremos el mismo subíndice, que crecerá por ley natural.

Si pues las variables son en número par, por ejemplo, $2k$, quedarán divididas en dos grupos que, por decirlo así, las agotarán; á saber:

$$q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_i \ldots\ldots q_k$$
$$p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_i \ldots\ldots p_k$$

formando las parejas

$$\begin{array}{ll} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \\ \ldots\ldots & \\ q_i & p_i \\ \ldots\ldots & \\ q_k & p_k \end{array}$$

Siendo el número de estas cantidades par, claro es que todas las cantidades que entran en φ y ψ quedarán de este modo agotadas.

Si tales cantidades son en número impar, sobrará una, que designaremos por t.

Resulta, pues, que las funciones φ y ψ serán funciones de las p, de las q, y, en general, de t.

Así tendremos:

$$\varphi\,(q_1, q_2 \ldots . q_i \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_i \ldots .. p_k, t)$$
$$\psi\,(q_1, q_2 \ldots . q_i \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots . p_i \ldots\ldots p_k, t).$$

Y fíjense bien mis alumnos: si á las cantidades de que dependen φ y ψ les hemos dado las mismas denominaciones que en las ecuaciones de Hamilton, es porque de este símbolo de Poisson vamos á hacer aplicación á las ecuaciones indicadas, no por otro motivo.

En la definición general del símbolo de que se trata, ni las q son precisamente las coordenadas de los puntos del sistema, ni las p son funciones auxiliares, ni las φ y ψ tienen, por ahora, nada que ver con problemas dinámicos.

Las φ y ψ son funciones cualesquiera de $2k + 1$ cantidades.

Podría, por ejemplo, ser la φ y lo mismo la ψ, una función de x, y, z, u, v, w, s, y tendríamos:

$$\varphi\,(x, y, z, u, v, w, s)$$
$$\psi\,(x, y, z, u, v, w, s)$$

y podríamos aparear las cantidades comprendidas en la función de este modo:

$$\begin{array}{cc} x & u \\ y & v \\ z & w \end{array}$$

dejando aparte s.

Mas para expresar esta *ordenación* de cantidades sería aún más claro emplear las notaciones precedentes, llamando

á la x, q_1; á la u, p_1; á la y, q_2; á la v, p_2; á la z, q_3; á la w, p_3, y á la s la designaríamos por t, aunque en el problema abstracto la s no designa el tiempo, ni tiene relación ninguna con esta entidad.

Y, una vez más, pido disculpa por descender á tales pormenores.

Tomando en las funciones φ y ψ, como variables, las p, q, con el primer par q_1 y p_1 de las cantidades que comprenden, se forma el siguiente binomio:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}$$

que fácilmente se retiene en la memoria; porque no hay mas que tomar las derivadas parciales de φ y ψ respectivamente, con relación á p_1 y q_1, y multiplicarlas, y restar de este primer producto un producto análogo, pero invirtiendo el orden de las variables de la diferenciación. Si antes diferenciamos φ con relación á q_1, ahora se diferencia con relación á p_1, y análogamente para ψ.

Formemos otro binomio análogo con relación á las variables que llevan el subíndice 2, y tendremos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}.$$

Del mismo modo, y repitiendo esta misma combinación, formaremos binomios análogos á los precedentes respecto á las p y q con todos los subíndices hasta el subíndice k.

El término general será

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$$

y el último grupo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k}.$$

Después sumaremos todos estos grupos y resultará evidentemente, no escribiendo, para abreviar, mas que el primero y el último

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right)$$

que también puede escribirse empleando el signo Σ y escribiendo el término general

$$\sum_1^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right).$$

Esta expresión analítica es la que se expresa abreviadamente, y en forma simbólica y condensada, por el paréntesis de Poisson.

$$(\varphi, \psi).$$

Este paréntesis es un signo puramente convencional, que hubiera podido sustituirse por otro cualquiera.

Indica una función determinada de las p, q; indica una serie de operaciones determinadas que han de efectuarse sobre las funciones φ y ψ con relación á las cantidades p, q, que contienen, para *construir* la función (φ, ψ) por medio de φ y de ψ: es una *definición*.

Hubiera podido escogerse la letra P y llamar símbolo de Poisson á este otro.

$$P(\varphi, \psi),$$

si el signo P conviniéramos en que representa la serie de operaciones indicadas.

En las ecuaciones del movimiento hay otro símbolo análogo al de Poisson, que es el de Lagrange, y éste se expresa por un paréntesis recto.

$$[\quad]$$

Pero nosotros sólo consideraremos el paréntesis de Poisson, que es de ramas curvas ( ).

De manera que la definición analítica de este símbolo es, como acabamos de explicar,

$$\sum_1^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) = (\varphi, \psi).$$

Todas las operaciones que indica el primer miembro están condensadas en el segundo en un sencillo paréntesis.

Los simbolismos algebraicos son tanto más ventajosos cuanto expresan mayor número de operaciones en la forma más sencilla.

Y son tanto más fecundos, repetimos, cuanto permiten representar por una combinación sencilla de dichos símbolos una complicación creciente de operaciones.

Por ejemplo, en Aritmética y en Álgebra, los signos $+$ y $\times$ tienen las propiedades *asociativa* y *conmutativa*, que permiten saltar de un golpe de una forma á otra y demostrar inmediatamente teoremas que por la lógica vulgar sería mucho más difícil poner en evidencia.

Sirvan de ejemplo las imaginarias cuyo cálculo entra en el cálculo ordinario algebraico.

Y sirvan de ejemplo los cuaternios, que en parte dan de una sola vez ciertos resultados, complicadísimos de suyo, y que cuando ven esterilizada su potencia es porque les falta la propiedad *conmutativa*.

Pero terminemos esta digresión, ajena á nuestro objeto, y y sigamos estudiando el símbolo de que tratamos.

*
* *

Mas fijémonos en las siguientes condiciones:

1.ª Sólo se trata de *formas analíticas,* y no de ningún problema concreto, aunque estas formas puedan aplicarse á varios problemas.

2.ª Las funciones φ y ψ son funciones cualesquiera de $p_1 \ldots\ldots p_k$, $q_1 \ldots\ldots q_k$, y, en general, de t.

Es decir:

$$\varphi(q_1, q_2 \ldots q_k, p_1, p_2 \ldots p_k, t);\ \psi(q_1, q_2 \ldots q_k, p_1, p_2 \ldots p_k, t)$$

3.ª Se trata de formar *otra función* mediante estas dos φ, ψ, y el símbolo expresa dicha función: llamémosla P. P se forma mediante operaciones sobre φ, ψ.

4.ª La nueva función P se expresa, como hemos dicho, por el símbolo (φ, ψ), y efectuada la operación de diferenciación, resultará

$$(\varphi, \psi) = P(q_1, q_2 \ldots q_k, p_1, p_2 \ldots p_k, t).$$

5.ª Las cantidades $p_1 \ldots\ldots p_k$, $q_1 \ldots\ldots q_k$ no decimos que sean *constantes* ó *variables,* ni que tengan ninguna significación. Esto se precisará con las aplicaciones del *símbolo.*

Ahora bien, el paréntesis de Poisson goza de ciertas propiedades, que vamos á exponer:

Primera propiedad.—Si en el símbolo (φ, ψ) se sustituye una de las funciones por una constante y como caso particular por *cero,* la expresión que el símbolo representa se anula.

Es decir, que se tiene

$$(\varphi, c) = 0 \quad \text{y también} \quad (c, \psi) = 0$$

y como caso particular

$$(\varphi, 0) = 0 \quad \text{y} \quad (0, \psi) = 0.$$

Esto es evidente, porque si una de las dos funciones se reduce á una constante, claro es que no contendrá ninguna de las cantidades p, q; todas sus derivadas serán nulas; y como en todos los términos de la expresión entra una de estas derivadas, todos los términos se anularán y se anulará la función, y al símbolo que la representa deberemos igualarlo á cero.

Más claro; se tiene:

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \ldots$$

Pero siendo, por ejemplo,

$$\psi = c$$

resulta

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1} = \frac{\partial c}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{d q_1} = \frac{\partial c}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial p_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0 \ldots$$

Luego todos los términos, como antes decíamos, se reducen á cero; y lo mismo podemos decir para la función φ.

Segunda propiedad.—Si en el símbolo de Poisson se invierten las funciones φ y ψ, la expresión que el símbolo representa conserva su valor numérico, pero cambia de signo.

Es decir, que se tiene

$$(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi).$$

La demostración, ó, si se quiere, la comprobación, es evidente; pero hay que fijarse en que, si se invierten las funciones, el orden de la diferenciación subsiste; es decir, que el esqueleto de la expresión queda siempre el mismo

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1} \ldots\ldots$$

sólo que en el símbolo (φ, ψ) los huecos de los numeradores se llenan en este orden para este caso:

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \ldots\ldots$$

es decir, cuando el orden es φ, ψ; y

$$(\psi, \varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial q_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \ldots\ldots$$

en el segundo caso que es ψ, φ.

Lo que hemos dicho para el primer grupo pudiéramos decir para otro cualquiera; pero basta comparar ambos grupos para ver que son iguales y de signo contrario.

El primer término del primero es el segundo del segundo símbolo, sólo que se han invertido los factores, lo cual importa poco. Y se ha cambiado el signo.

Y otro tanto podemos decir del segundo término del primer grupo, que es idéntico al primero del segundo, invirtiendo los factores y sustituyendo el signo — por el signo +.

Resulta, pues, que la expresión se conserva con el mismo valor numérico; pero cambia de signo, y podemos escribir como antes escribíamos:

$$(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi).$$

Tercera propiedad.—Si se cambia el signo á una de las

funciones se cambia el signo á la expresión, y, por lo tanto, debe cambiarse el signo al símbolo, ó sea al paréntesis.

Esto es evidente, porque cada función, por ejemplo, φ, entra por una de sus derivadas con relación á p ó á q en cada término como factor, y entra una sola vez; luego al cambiar el signo de la función cambiará el signo del término, y como esto puede decirse de todos ellos, la función toda cambiará de signo.

Por ejemplo, el primer grupo, y lo que de él digamos pudiéramos decir de los demás, es, como hemos visto,

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \ldots..$$

poniendo $-\varphi$ en vez de φ, con lo cual el símbolo deberá expresarse así $(-\varphi, \psi)$, tendremos

$$(-\varphi, \psi) = \frac{\partial(-\varphi)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \ldots..$$

ó bien sacando el signo — fuera del grupo

$$(-\varphi, \psi) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right) - \ldots.. =$$

$$= -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \ldots..\right]$$

es decir,

$$(-\varphi, \psi) = -(\varphi, \psi).$$

Se podrá, pues, cuando así nos convenga en el cálculo, cambiar el signo al símbolo y cambiar el signo á una de las funciones.

De aquí se deduce que, cambiando el signo á las dos funciones, la expresión queda inalterable.

En efecto, se tiene sucesivamente

$$(-\varphi, -\psi) = -(\varphi, -\psi) = -[-(\varphi, \psi)] = (\varphi, \psi).$$

Es decir, que no ha cambiado la expresión cambiando á la vez los signos de las dos funciones.

Cuarta propiedad.—La expresión se anula cuando en el símbolo las dos funciones son iguales. Es decir

$$(\varphi, \varphi) = o.$$

Esto es evidente, porque no hay mas que ver lo que pasa en un grupo correspondiente á un índice, y lo mismo se repetirá en todos los restantes.

Por ejemplo, si en el primer grupo binario

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}$$

reemplazamos la ψ por la φ, tendremos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$$

y como los dos términos son iguales y de signo contrario, se destruyen.

También se puede demostrar esto mismo de otra manera.

Si en la expresión

$$(\varphi, \psi)$$

cambiamos las funciones, por lo que hemos demostrado antes, la expresión debe cambiar de signo; pero como las funciones son iguales, al invertirlas, el símbolo queda el mismo, é idéntica queda la expresión que representa.

Mas para que una cantidad—y toda expresión algebraica ya sabemos que representa una cantidad, mientras no se es-

en que, por decirlo así, se recuerdan y se consignan los dos elementos de que la expresión se compone; á saber: la función f, de la cual se toman las derivadas, y los coeficientes A_1, A_2..... hasta A_{2k}, puesto que son $2k$ las variables p y q.

Esto por una parte, y por otra, la letra A, que recuerda y consigna los coeficientes A_1, A_2 ....., que son todos funciones de p y q, como hemos dicho.

Igualando, pues, el símbolo á la expresión anterior, que es escribir una identidad en forma simbólica, tendremos

$$A(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \ldots\ldots$$

$$+ A_k \frac{\partial f}{\partial q_k} + A_{k+1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + A_{k+2} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + A_{2k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \quad (A)$$

Este símbolo $A(f)$ es precisamente aquel á que antes nos referíamos.

Claro es, que por este sistema se pueden formar infinitas expresiones análogas á la precedente. Y aun partiendo de *la misma función* (f) y variando los coeficientes A_1, A_2 ....., pueden formarse infinitas funciones con sus correspondientes símbolos.

Así el símbolo $B(f)$, análogo al anterior, indica una expresión en que se parte siempre de (f); pero los coeficientes por los cuales se multiplican las derivadas, en vez de ser las funciones de p y q

$$A_1, A_2 \ldots\ldots A_{2k},$$

son otras funciones distintas; y que por eso se representan por distintas letras

$$B_1, B_2 \ldots\ldots B_{2k},$$

que son, como antes, funciones todas ellas de p y q.

Y en este último caso para la armonía de las notaciones y de los símbolos se sustituye á la letra A la letra B.

De modo que la nueva expresión y el nuevo símbolo serán

$$B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \ldots\ldots + B_k \frac{\partial f}{\partial q_k} +$$

$$+ B_{k+1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + B_{k+2} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots\ldots + B_{2k} \frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (B)$$

Las dos expresiones (A), (B) son análogas; ambas se derivan de la función única (f); pero los coeficientes B_1, B_2..... representan funciones que pueden ser completamente distintas de las funciones que representan A_1, A_2 .....

Así podríamos formar infinitas expresiones con sus correspondientes símbolos, aun partiendo de la misma función f, que claro es, que en general, esta pudiera variar también; por ejemplo:

$$A(f),\ B(f),\ C(f) \ldots\ldots$$

Pero nosotros sólo necesitamos dos símbolos,

$$A(f) \quad \text{y} \quad B(f),$$

que son los que ahora vamos á combinar.

Estos simbolismos parciales, por decirlo así, sólo tienen aplicaciones limitadas, sólo sirven para determinados problemas, y su objeto es simplificar, bajo la misma idea, el orden de los cálculos, que de otro modo serían muy complicados y muy enojosos.

Si dichos símbolos quisiéramos generalizarlos y combinarlos entre sí, resultarían tales complicaciones, que perderían todas sus ventajas, las que presentan para problemas determinados ó demostraciones especiales.

No hay que confundirlos con los símbolos generales de la

ciencia, que abarcan inmensas ramas; por ejemplo: el símbolo de las imaginarias, el símbolo de los cuaternios de Hamilton; y en rigor es inútil citar estos ejemplos, porque toda la ciencia es un puro simbolismo de maravillosas combinaciones, y en que los símbolos y las realidades se corresponden término á término con rigurosa exactitud.

Pasemos ahora á la aplicación del símbolo precedente.

***

Vamos á combinar los dos símbolos

$$A\,(f) \quad \text{y} \quad B\,(f)$$

relativos á la misma función f de p y q y á dos series de coeficientes A_1, A_2..... B_1, B_2..... que, como sabemos, son funciones también de p y q.

Esta combinación la vamos á efectuar sustituyendo en el primer símbolo $A\,(f)$, en vez de f el segundo símbolo $B\,(f)$. Recíprocamente, sustituyendo á f en el segundo símbolo $B(f)$ el primer símbolo $A\,(f)$. Y, por último, restando un resultado de otro.

Cuando decimos *sustituir en el símbolo,* claro es que queremos decir *sustituir en la expresión que el símbolo rspresenta,* en vez de f, la expresión que determina el segundo símbolo.

Sustituyendo, como acabamos de decir, en $A\,(f)$ el segundo símbolo, en vez de f, tendremos, en cierto modo, esta superposición de símbolos:

$$A\,[B\,(f)]$$

y sustituyendo asimismo en el símbolo $B\,(f)$ el primer símbolo, resultará análogamente la expresión

$$B\,[A\,(f)].$$

Ambos símbolos compuestos expresan una serie de operaciones perfectamente definidas sobre la función f; operaciones que son diferenciaciones y multiplicaciones por los coeficientes A_1, A_2..... B_1, B_2 .....

De modo que, en último término, ambos símbolos representan funciones perfectamente definidas de p y de q, deducidas por operaciones perfectamente definidas también.

Todos estos símbolos no tienen nada de extraño ni de cabalístico; expresan *abreviadamente operaciones determinadas.*

Mas por sencillo que esto sea, conviene que mis alumnos se fijen en las explicaciones que voy á dar, que no pueden ser más elementales.

Consideremos el primer símbolo compuesto

$$A\,[B\,(f)].$$

El símbolo $A\,(f)$ tiene una significación que ya hemos explicado minuciosamente.

Ahora bien; la función (f) de p, q es completamente arbitraria, y, por otra parte, el segundo símbolo $B\,(f)$ hemos dicho y hemos demostrado, que representa una función de p y q; luego es legítimo suponer que se aplica á esta función el símbolo A, en vez de aplicarlo á f; y por eso resulta

$$A\,[B\,(f)],$$

que desarrollándolo tomaría esta forma:

$$A\,[B\,(f)] = A_1 \frac{\partial\,[B\,(f)]}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial\,[B\,(f)]}{\partial q_2} + \ldots\ldots$$

$$+ A_{k+1} \frac{\partial\,[B\,(f)]}{\partial p_1} + A_{k+2} \frac{\partial\,[B\,(f)]}{\partial p_2} + \ldots\ldots$$

pecifique otra cosa—al cambiar de signo quede idéntica á sí misma, es preciso que sea nula.

Quinta propiedad.—El símbolo de Poisson goza de cierta propiedad distributiva. Es decir, que si una de las funciones es la suma de otras dos, puede decirse que el símbolo es la suma de dos símbolos análogos; de modo que

$$(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi, \psi_1) + (\varphi, \psi_2).$$

En efecto, veamos lo que pasa en el primer grupo binario, y esto mismo pasará en todos los restantes.

Tendremos por definición

$$(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial(\psi_1 + \psi_2)}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial(\psi_1 + \psi_2)}{\partial q_1} + \ldots..$$

y desarrollando sucesivamente

$$(\varphi_1 \psi_1 + \psi_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial q_1}\right) + \ldots.$$

y también

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \psi_1 + \psi_2) &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1} + \ldots.. \\
&+ \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} + \ldots.. \\
&= \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1}\right) + \\
&+ \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial q_1}\right) \\
&= (\varphi, \psi_1) + (\varphi, \psi_2)
\end{aligned}$$

Sexta propiedad.—Si en la expresión que representa el paréntesis de Poisson entrase una variable t, *explícitamente*, además de las p y las q, la diferencial de la expresión (φ, ψ)

con relación á t puede expresarse en forma muy sencilla, aplicando el símbolo de que se trata.

En efecto, hemos dicho que

$$(\varphi, \psi) = \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right).$$

Diferenciemos con relación á t, para lo cual basta diferenciar cada término de las Σ, considerando á las p, q como constantes; y como cada término del binomio es un producto, y en todas las derivadas entrará, en general, la t; ó de otro modo: como las dos funciones φ y ψ, en general, son funciones de t, tendremos, evidentemente, la serie de ecuaciones:

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \Sigma_1^k \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial p_i}}{\partial t} - \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial q_i}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) + \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial p_i}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial q_i}}{\partial t} \right)$$

en que al fin hemos dividido la Σ en dos Σ parciales, agrupando los términos convenientemente.

Por último, como lo mismo da diferenciar primero respecto á p ó q y después respecto á t, que invertir estas diferenciaciones, podremos escribir

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) +$$

$$+ \Sigma_1^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\partial q_i} \right).$$

Mas el primer término del segundo miembro puede expresarse por el *símbolo del paréntesis*, porque tiene el mismo sistema de formación que éste, sin otra diferencia que la siguiente: las dos funciones á que se refiere el símbolo son $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ y ψ en vez de ser φ, ψ.

Y otro tanto podemos repetir para el segundo término. También puede expresarse por el paréntesis simbólico; de modo que podemos escribir el segundo miembro de esta manera:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

que es un procedimiento de diferenciación del símbolo sumamente sencillo, y en cierto modo análogo al de la diferenciación de un producto, porque sabemos que

$$\frac{\partial \cdot \varphi\psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\psi + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Séptima propiedad. — Todas las propiedades anteriores son tan elementales y tan sencillas que, en rigor, hubiera bastado con enunciarlas. La que vamos á exponer ahora es algo más complicada, porque se refiere, por decirlo así, á una combinación de paréntesis de Poisson, y comprende tres funciones.

Pero antes de demostrarla, siguiendo para ello paso á paso el método de Mr. Appell en su obra ya citada de Mecánica, acudiremos á un nuevo símbolo, que tampoco es muy complicado.

Supongamos que se tiene una función de las variables

$$p_1,\ p_2 \ldots\ldots p_k$$
$$q_1,\ q_2 \ldots\ldots q_k$$

formada del siguiente modo.

Se considera una función f de todas estas variables. Es decir,

$$f(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k),$$

y es claro que empleamos estas notaciones, como antes decíamos, porque son las que hemos empleado en las ecuaciones generales de la Mecánica, y que á estos problemas hemos de hacer aplicación de cuanto ahora vamos exponiendo.

Por lo demás, en vez de emplear las notaciones p y q con subíndices, nos hubiera bastado con decir: un número par de variables

$$x, y, z \ldots\ldots u, v, w$$

agrupadas dos á dos.

Y aun empleamos las p, q, porque hemos de hacer aplicación de este *lema* á la *identidad* de Poisson que hemos de demostrar después.

La función que vamos á formar se compone de las derivadas de f con relación á las p y á las q, multiplicada cada una por una función determinada de dichas cantidades p y q:

$$A_1(q_2, q_2 \ldots\ldots q_k, p_2, p_2, \ldots\ldots p_k);\ A_2(q_1 \ldots\ldots q_k, p_1 \ldots\ldots p_k);\ A_3, \ldots\ldots A_k$$

Después se suman todos estos productos.

En resumen; la función que nos proponemos considerar tiene esta forma:

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \ldots\ldots A_k \frac{\partial f}{\partial q_k} + A_{k+1} \frac{\partial f}{\partial p_1} +$$
$$+ A_{k+2} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots\ldots + A_{2k} \frac{\partial f}{\partial p_k}.$$

Tal expresión se representa por el siguiente símbolo:

$$A\ (f)$$

y si aún se quiere desarrollar más, no habrá sino poner en vez de $B(f)$ su expresión propia; así, pues,

$$A[B(f)] = A_1 \frac{\partial\left[B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \ldots\ldots + B_{k+1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + B_{k+2} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots\ldots\right]}{\partial q_1} +$$

$$+ \ldots\ldots + A_{k+1} \frac{\partial\left[B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \ldots\ldots + B_{k+1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + B_{k+2} \frac{\partial t}{\partial p_2} + \ldots\ldots\right]}{\partial p_1} \ldots\ldots$$

De aquí se deduce que, en general, hay que diferenciar f con relación á una p ó á una q, multiplicar el resultado por uno de los coeficientes B_1....., y lo que se obtenga volverlo á diferenciar con relación todavía á una p ó á una q, multiplicando lo que resulte por uno de los coeficientes A_1 .....

Para fijar las ideas tomemos un término cualquiera del desarrollo anterior; por ejemplo, el primero

$$A_1 \frac{\partial\left[B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}\right]}{\partial q_1}$$

Y resultará

$$A_1 \left[\frac{\partial B_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} + B_1 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2_1}\right]$$

porque no ha de olvidarse, que B es una función de las v y las q.

Esta última expresión vemos que contiene un término con la primera derivada de f con relación á q, y otro con relación á la segunda derivada de la misma función f, también con relación á q. Es decir,

$$A_1 \frac{\partial B_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} + A_1 B_1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}.$$

Si ensayamos ahora el segundo término, obtendremos un resultado análogo.

El segundo término es

$$A_1 \frac{\partial \left[B_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} \right]}{\partial q_1} = A_1 \left[\frac{\partial B_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2} + B_2 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2} \right] =$$

$$= A_1 \frac{\partial B_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2} + A_1 B_2 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2}$$

También contiene dos términos: uno con una primera derivada de f, multiplicada por una función de p y q, porque la A_1 lo es, y como también lo es B_2, también lo será $\frac{\partial B_2}{\partial q_1}$, y ambos factores son de forma conocida.

En cambio, el segundo término contiene una segunda derivada de f con relación á q_1 y á q_2, multiplicada por un coeficiente $A_1 B_2$, que es una función conocida de p y q.

Y como esto mismo podemos repetir para todos los demás términos del desarrollo, vemos que éste será una función lineal de primeras y segundas derivadas de f. A saber:

Todas las derivadas de primer orden de (f) con relación á todas las p y q, y todas las derivadas de segundo orden de la misma función f, que serán, por decirlo así, de cinco tipos distintos. O sean: derivadas segundas de f dos veces con relación á la misma p; derivadas segundas dos veces con relación á la misma q; derivadas segundas, todavía, con relación á dos p distintas; derivadas segundas con relación á dos q distintas, y derivadas segundas con relación á una p y á una q.

Es decir, los siguientes tipos, suprimiendo algunos subíndices que son innecesarios por ahora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_l}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_l}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}.$$

En resumen. El símbolo en cuestión no representa, como hemos dicho, otra cosa que una expresión lineal de derivadas primeras y segundas de f con relación á las p y á las q.

Lo mismo podemos repetir respecto al segundo símbolo compuesto.

$$B\,[A\,(f)]$$

Tampoco representa otra cosa que una función lineal de derivadas primeras y segundas de f.

Y ahora demostremos el siguiente teorema.

Teorema.—Si restamos de un símbolo otro, la diferencia

$$A\,[B\,(f)] - B\,[A\,(f)]$$

es decir, la expresión que esta diferencia de símbolos representa, no contendrá ninguna derivada de segundo orden de f; todas ellas se destruirán idénticamente, y no quedará mas que una expresión lineal de derivadas primeras.

La demostración es sumamente sencilla, y casi está dada en lo que acabamos de explicar.

La expresión general de los símbolos compuestos, que antes desarrollamos, prueba que las derivadas segundas de f suponen una primera derivación respecto al símbolo B en que entra un coeficiente que es una B con el subíndice idéntico al que lleva la p ó la q de la derivación.

Y, análogamente, la segunda derivación sobre f lleva un coeficiente A con el subíndice de la variable á que esta derivación se refiere.

Aclaremos esto con algunos ejemplos.

Supongamos la derivada segunda $\frac{\partial^2 f}{\partial q_1{}^2}$.

Esta segunda derivada supone dos diferenciaciones. La primera, dentro del símbolo B, dará

$$B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}.$$

La segunda derivación será

$$A_1 \frac{\partial \left(B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)}{\partial q_1}$$

Y como al obtener las derivadas segundas los coeficientes se consideran como constantes, porque los términos en que aparecen sus derivadas no contienen mas que derivadas primeras de f, la expresión anterior dará

$$A_1 B_1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1{}^2}.$$

Esto en el símbolo compuesto $A\,[B(f)]$.

La misma derivada segunda en el segundo símbolo, que ha de restarse del primero, es decir en $B\,[A(f)]$, dará á su vez para la segunda derivada

$$B_1 \frac{\partial \left(A_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)}{\partial q_1} \;....\; B_1 A_1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1{}^2}$$

que es igual á la expresión anterior, y, por lo tanto, al restar ambos símbolos se destruirán ambos términos:

$$A_1 B_1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1{}^2} - B_1 A_1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1{}^2} = 0;$$

y desaparecerá la derivada segunda de f que estamos considerando; á saber: $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$.

Lo mismo exactamente puede decirse de otra derivada segunda cualquiera.

Por ejemplo: $\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2}$. También aquí hay dos diferenciaciones: una vez con relación á q_1, da la primera; y la dife-

renciación con relación á q_2, la segunda; en el otro término, respecto á q_1, q_2, sucede á la inversa.

En el primer caso tendremos

$$A_2 \frac{\partial \left[B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} \right]}{\partial q_2} \ldots\ldots A_2 B_1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2}.$$

En cambio, en el término de este mismo desarrollo, en que el orden de las diferenciaciones sea el inverso del precedente, tendremos:

$$A_1 \frac{\partial \left[B_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} \right]}{\partial q_1} \ldots\ldots A_1 B_2 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2}.$$

Porque, lo repetimos: los segundos coeficientes diferenciales de f proceden de los términos en que se consideran á los coeficientes A_1..... y B_1....., como constantes.

Resulta, pues, que en el desarrollo del primer símbolo compuesto, el término del segundo coeficiente diferencial que estamos considerando será la suma de los dos anteriores.

Es decir,

$$(A_2 B_1 + A_1 B_2) \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2}.$$

Consideremos ahora este mismo coeficiente diferencial en el segundo símbolo compuesto $B \mid A(f) \mid$, y no habrá mas que repetir los mismos razonamientos, sustituyendo la B por la A y la A por la B, y tendremos:

$$(B_2 A_1 + B_1 A_2) \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2}.$$

Al restar un símbolo de otro resultará

$$[(A_2 B_1 + A_1 B_2) - (B_2 A_1 + B_1 A_2)] \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$$

porque los términos del coeficiente se destruyen dos á dos.

A todas las derivadas segundas es aplicable el razonamiento precedente, pues lo mismo da considerar las p que las q, ó combinar unas con otras.

Por ejemplo: el coeficiente $\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial p_1}$.

Este coeficiente, en el símbolo complejo, supone dos diferenciaciones y dos derivadas.

En el símbolo $A\,[B\,(f)]$ dará lugar á dos términos.

Si en el primero la primera derivación es con relación á q_1, la derivada estará multiplicada por B_1, y tendremos

$$B_4 \frac{\partial f}{\partial q_1}$$

y la segunda por el coeficiente que corresponde á p_1 en el símbolo A; resultará, pues,

$$A_{2k+1} \frac{\partial \left(B_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)}{\partial p_1} \ldots\ldots A_{2k+1} B_1 \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial q_1}.$$

En el segundo término de este mismo símbolo complejo, la primera derivación será con relación á p_1, la segunda con relación á q_1; y tendremos:

$$B_{2k+1} A_1 \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial q_1}.$$

El término total para este coeficiente de segundo orden será

$$(A_{2k+1} B_1 + B_{2k+1} A_1) \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial q_1}.$$

En el segundo símbolo complejo $B\,[A\,(f)]$ podremos repetir el mismo razonamiento y dará un término análogo;

pero como en el símbolo la A y la B están invertidas, no habrá mas que invertirlas también para obtener el término total; y tendremos desde luego

$$(B_{2k+1} A_1 + A_{2k+1} B_1) \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial q_1}.$$

Al restar los dos símbolos $A\,[B\,(f)] - B\,[A\,(f)]$ obtendremos

$$[(A_{2k+1} B_1 + B_{2k+1} A_1) - (B_{2k+1} A_1 + A_{2k+1} B_1)] \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial q_1}$$

donde se ve evidentemente, que se destruyen los términos del paréntesis total y que el término se reduce á cero.

Queda, pues, demostrado que al restar dos símbolos complejos en que se invierten las operaciones simbólicas A y B que han de efectuarse sobre una función de p, q que designamos por f, todas las segundas derivadas desaparecen; no quedan mas que, en general, las derivadas primeras.

O, repitiendo esto mismo de otro modo, para que se fije bien en la memoria de mis alumnos: en la expresión representada por el símbolo

$$A\,[B\,(f)] - B\,[A\,(f)]$$

no queda ninguna derivada seguida de f con relación á p y q.

Hemos insistido en todos estos pormenores, llegando hasta la mayor minuciosidad, para que comprendan mis alumnos que estas operaciones simbólicas nada tienen de abstracto ni de metafísico, ni nada tampoco de vago é impreciso. Son una manera de expresar operaciones ordinarias, y los razonamientos son tan claros y tan lógicos como si se tratara de un teorema de Aritmética primaria.

Es sustituir á la palabra, un signo; al razonamiento, una

agrupación de símbolos en que el razonamiento se condensa; pero todo ello puede traducirse al lenguaje vulgar, aunque con mucha más extensión, y la excesiva extensión es causa, casi siempre, de obscuridad ó de fatiga.

En la Conferencia próxima empezaremos el estudio de la nueva expresión simbólica denominada, para simplificar, la *identidad de Poisson.*

Denominación que, á su vez, es un *símbolo:* porque no se trata, naturalmente, de la identidad personal del gran matemático francés, y perdóneseme el inesperado humorismo, sino de una combinación de funciones, combinación que se demuestra que es idénticamente nula.

XXXVI. — Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowsky.

(Continuación.)

POR B. CABRERA.

43. Es evidente que la serie de razonamientos en cuya virtud hemos introducido el vector grad $\overleftrightarrow{A}$ son también aplicables á un tensor asimétrico, puesto que las relaciones que distinguen esta clase de la otra, no figuran ni explícita ni implícitamente. Así podemos escribir para las componentes de grad $\overleftrightarrow{\rho}$

$$\text{grad}_x \overleftrightarrow{\rho} = \frac{\partial \rho_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{xz}}{\partial z}$$

$$\text{grad}_y \overleftrightarrow{\rho} = \frac{\partial \rho_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{yz}}{\partial z}$$

$$\text{grad}_z \overleftrightarrow{\rho} = \frac{\partial \rho_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z}$$

Si se efectúa la descomposición de $\overleftrightarrow{\rho}$ en las formas que hemos visto anteriormente, se obtienen las dos ecuaciones

$$\left|\nabla \overleftrightarrow{\rho}\right| = \left|\nabla \overleftrightarrow{A}\right| + \left|\nabla \vec{\mathbf{A}}\right| = \text{grad}\,\overleftrightarrow{A} + \text{rot}\,\vec{\mathbf{A}}$$

$$\left|\nabla \overleftrightarrow{\rho}\right| = \left|\nabla \overleftrightarrow{B}\right| + (\nabla \vec{q})\vec{g} =$$

$$\left|\nabla \overleftrightarrow{B}\right| + \vec{g}(\nabla \vec{q}) + (\vec{q}\,\nabla)\vec{g} = \text{grad}\,\overleftrightarrow{B} + \vec{g}\,\text{div}\,\vec{q} + (\vec{q}\,\nabla)\vec{g}.$$

44. *Divergencia de un tensor.*—Puesto que $\left|\nabla \overleftrightarrow{A}\right|$ es un vector, podrá aplicársele cualquiera de los teoremas demos-

trados para estos últimos. En particular calculemos la divergencia:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \overleftrightarrow{A} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{grad}_x \overleftrightarrow{A} + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{grad}_y \overleftrightarrow{A} + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{grad}_z \overleftrightarrow{A}.$$

Sin dificultad se reconoce que el valor de esta función es

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zz} +$$
$$+ 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} A_{yz} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} A_{zx} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_{xy},$$

y como se trata una magnitud esencialmente escalar, y A_{xx} ..... A_{yz} ..... son las componentes de un triple tensor, las derivadas segundas se comportarán también como magnitudes de esta última clase. Por otra parte, esto mismo pudo verse inmediatamente, teniendo presente las propiedades de transformación de estos símbolos de derivación. Esta fusión escalar la llamaremos divergencia del tensor, y la notaremos

$$\operatorname{div} \overleftrightarrow{A}.$$

De otra manera podíamos haber llegado á la misma relación entre grad $\overleftrightarrow{A}$ y div. $\overleftrightarrow{A}$. Puesto que el operador ∇ se comporta como un vector, $\| \nabla^2 \|$ deberá conportarse como un tensor cuyas componentes son los símbolos de las derivadas segundas.

Ahora bien: hallando su producto escalar por $\overleftrightarrow{A}$ y aplicándole el teorema demostrado más arriba, se obtiene inmediatamente la igualdad

$$\left| \nabla^2 \right| \left| \overleftrightarrow{A} \right| = \nabla \left| \nabla \overleftrightarrow{A} \right|$$

que queríamos demostrar.

Evidentemente, como generalización del teorema de Gauss, podemos escribir aquí

$$\iiint \operatorname{div} \overleftrightarrow{A}\, dv = \iint \operatorname{grad} \overleftrightarrow{A}\, \vec{ds}.$$

Si tomamos la divergencia del vector $\left| \nabla \overleftrightarrow{\rho} \right|$ que deriva del tensor asimétrico $\overleftrightarrow{\rho}$, la fórmula ($a$) del párrafo 43 nos permite escribir inmediatamente

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \overleftrightarrow{\rho} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \overleftrightarrow{A} + \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \overleftrightarrow{A},$$

pues que sabemos por la teoría de vectores que

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} = 0.$$

45. *Deformación de un vector.*—Varias veces nos hemos ocupado del tensor $\left\| \vec{p}\, \vec{q} \right\|$ derivado de los vectores $\vec{p}, \vec{q}$. Puesto que ∇ se comporta como un vector, la expresión $\left\| \nabla \vec{p} \right\|$ será un tensor de componentes

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial p_z}{\partial z},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_z}{\partial y} + \frac{\partial p_y}{\partial z}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_x}{\partial z} + \frac{\partial p_z}{\partial x}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_y}{\partial x} + \frac{\partial p_x}{\partial y}\right).$$

Para comprobarlo basta apoyarse en la forma de comportarse estas magnitudes en un cambio de ejes coordenados, pero conceptuamos interesante acudir á la misma definición del operador ∇. Según ésta

$$\left\| \nabla \vec{p} \right\| = \lim_{V=0} \frac{\int \left| \vec{p}\, \vec{ds} \right|}{V}$$

de la cual se deduce inmediatamente la naturaleza tensorial, puesto que el numerador es una suma de tensores. La forma de las componentes se obtiene determinando el producto escalar por $\overleftrightarrow{a^0}$, puesto que dicho producto no es otra cosa que la componente de primera especie del tensor en la dirección de $\overleftrightarrow{a^0}$. Ahora bien:

$$\overleftrightarrow{a^0} \left| \nabla \vec{p} \right| = \lim_{V=o} \frac{\int \overleftrightarrow{a^0} \left\| \vec{p}\, \vec{ds} \right\|}{V}$$

y puesto que, según lo ya demostrado,

$$\overleftrightarrow{a^0} \left\| \vec{p}\, \vec{ds} \right\| = \vec{p} \left| \overleftrightarrow{a^0}\, \vec{ds} \right|,$$

la integral se convierte en la

$$\int \vec{p} \left| \overleftrightarrow{a^0}\, \vec{ds} \right|.$$

Recordemos que, poniendo de manifiesto el argumento y el módulo del producto vector-tensor que figura en esta última integral,

$$\left| \overleftrightarrow{a^0}\, \vec{ds} \right| = \vec{ds} \cos \left(\vec{a^0}\, \vec{ds} \right) \vec{a^0},$$

y tomemos para volumen V un cilindro de generatrices paralelas á $\vec{a^0}$, sección ds y altura da.

Sobre todas las generatrices de este cilindro cos $(\vec{a^0}\, ds)$ es nulo; en la base que pudiéramos llamar inferior — 1, y en la superior + 1. Así la integral de superficie se reduce á la suma de los valores del elemento diferencial en dichas dos bases; esto es,

$$\int \vec{p}\left|\overleftrightarrow{a^0}\,\vec{ds}\right| = -\vec{p}\,ds\,\vec{a^0} + \left(\vec{p} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial q}\,da\right) ds \cdot \overleftrightarrow{a^0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a}\,\vec{a^0}\,\vec{p} \cdot ds\,da.$$

Además, el volumen V tiene por medida $ds \cdot da$, y como $\vec{a^0}\,\vec{p}$ es la proyección de $\vec{p}$ sobre $\vec{a^0}$ que designaremos por p_a, podremos escribir

$$\overleftrightarrow{a^0}\,\left\|\nabla \vec{p}\right\| = \frac{\partial p_a}{\partial a},$$

de conformidad con lo que habíamos dicho.

Esto demostrado, multipliquemos el tensor $\left|\nabla\,\vec{p}\right|$ por un vector cualquiera $\vec{q}$, que se conservará independiente del operador ∇. Aplicando reglas de cálculo conocidas

$$(a) \qquad \vec{q}\left\|\nabla \vec{p}\right\|\Big| = \frac{1}{2}\nabla(\vec{p}\,\vec{q}) + \frac{1}{2}(\vec{q}\,\nabla)\vec{p};$$

$$\Big|\vec{q}\,\Big|\nabla \vec{p}\,\Big| = \quad \nabla(\vec{p}\,\vec{q}) - \quad (\vec{q}\,\nabla)\vec{p}.$$

Dividiendo por 2 y restando la segunda de la primera, se obtiene

$$(b) \qquad \Big|\vec{q}\left\|\nabla \vec{p}\right\|\Big| - \frac{1}{2}\Big|\vec{q}\,\Big|\nabla \vec{p}\,\Big| = (\vec{q}\,\nabla)\vec{p},$$

vector cuyos componentes son:

$$Q_x = \frac{\partial p_x}{\partial x}q_x + \frac{\partial p_x}{\partial y}q_y + \frac{\partial p_x}{\partial z}q_z,$$

$$Q_y = \frac{\partial p_y}{\partial x}q_x + \frac{\partial p_y}{\partial y}q_y + \frac{\partial p_y}{\partial_z}q_z,$$

$$Q_z = \frac{\partial p_z}{\partial x}q_x + \frac{\partial p_z}{\partial y}q_y + \frac{\partial p_z}{\partial z}q_z.$$

Así, pues, el vector $(\vec{q}\ \nabla)\ \vec{p}$, que hemos ya encontrado en la teoría de vectores, es un producto vector-tensor asimétrico, que puede expresarse en fnnción del producto vector-tensor simétrico $\left\| \vec{q} \right\| \nabla \vec{p} \| \|$ y del producto vector $\left\| \vec{q}.\frac{1}{2} \left| \nabla \vec{p} \right| \right\|$ mediante la fórmula general, en que

$$\overleftrightarrow{A} = \| \nabla \vec{p} | \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{p}.$$

46. Si tomamos para vector $\vec{q}$ un corrimiento $\vec{dx}$ infinitamente pequeño, de componentes dx, dy, dz, el vector $\bar{Q}$ se convertirá en $\vec{dp}$, puesto que evidentemente

$$dp_x = \frac{\partial p_x}{\partial x} dx + \frac{\partial p_x}{\partial y} dy + \frac{\partial p_x}{\partial z} dz,$$

$$dp_y = \frac{\partial p_y}{\partial x} dx + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy + \frac{\partial p_y}{\partial z} dz,$$

$$dp_z = \frac{\partial p_z}{\partial x} dx + \frac{\partial p_z}{\partial y} dy + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz.$$

Así las nueve derivadas que definen el tensor asimétrico que estamos considerando, determinan el cambio experimentado por el vector $\vec{p}$ al pasar de un punto á otro infinitamente próximos, y de aquí que Weber le dé el nombre de *deformación* del vector $\vec{p}$, que notaremos

$$\Delta \text{ef}\ \vec{p}.$$

Teniendo en cuenta la fórmula (*b*) del párrafo anterior,

$$\vec{dp} = \left| \Delta \text{ef}\ \vec{p}\ .\ \vec{dr} \right| = \left\| \| \nabla \vec{p} \| \quad \vec{dr} \right\| + \frac{1}{2} \left| \operatorname{rot} \vec{p}\ .\ \vec{dr} \right|,$$

de suerte que el cambio experimentado por $\vec{p}$ se descompone en dos partes: una definida por el tensor simétrico $\| \nabla \vec{p} \|$ y la otra por rot $\vec{p}$. En el caso particular de la deformación de un medio material $\| \nabla \vec{p} \|$ se llama deformación pura y está determinada, como siempre, por sus componentes de primera especie

$$e_x = \frac{\partial p_x}{\partial x}, \qquad e_y = \frac{\partial p_y}{\partial y}, \qquad e_z = \frac{\partial p_z}{\partial z}$$

ó *dilataciones*, y las de segunda

$$g_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_x}{\partial y} + \frac{\partial p_y}{\partial x}\right), \qquad g_y = \left(\frac{\partial p_z}{dx} + \frac{\partial p_x}{\partial z}\right),$$

$$g_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_z}{\partial y} + \frac{\partial p_y}{\partial z}\right)$$

ó *deslizamientos*. El vector rot $\vec{p}$ es la rotación del medio en el punto considerado.

Es útil dar á $\| \nabla \vec{p} \|$ un nombre y una notación. Dada su significación en el caso sencillo anterior, el nombre más lógico es el de *deformación pura* de $\vec{p}$, de igual suerte que se llama rotación el vector $| \nabla \vec{p} |$, por generalización del mismo caso sencillo que acabamos de citar: el tensor asimétrico puede continuar recibiendo el nombre de *deformación* simplemente.

En cuanto á la notación, consideramos lo más acertado adoptar para la deformación pura el símbolo

$$\text{def}\, \vec{p}$$

conservando el indicado en el párrafo anterior para la de-

formación en general. Así el valor $\vec{dp}$ puede también escribirse

$$\vec{dp} = \left| \Delta \text{ef } \vec{p} \cdot \vec{ds} \right| = \left| \text{def } \vec{p} \cdot \vec{dr} \right| + \frac{1}{2} \left| \text{rot } \vec{p} \cdot \vec{dr} \right|$$

47. Caso particular del vector $\vec{p}$ es el grad φ ó $\nabla \varphi$, de suerte que podemos aplicarle inmediatamente cuanto hemos dicho en el párrafo anterior. Así

$$\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

son las componentes de primera especie, y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial y}$$

las de segunda especie de un tensor simétrico. Esto mismo podíamos haberlo deducido de lo dicho en el párrafo 44, puesto que siendo los símbolos de derivación las componentes del operador tensorial $\| \nabla^2 \|$ y φ una magnitud escalar, que por ende no puede alterar la naturaleza del producto, $\| \nabla^2 \varphi \|$ será un triple tensor. Por último, se ve inmediatamente que ello está de acuerdo con las propiedades de transformación de las magnitudes anteriores.

Como en este caso

$$\text{rot } \nabla \varphi = \text{rot grad } \varphi = 0$$

el tensor asimétrico y el simétrico se confunden, de suerte que la deformación del grad φ es siempre una deformación pura. En este caso, la deformación se suele llamar *irrotacio-*

nal y φ *potencial de la deformación*. Para este tensor propo nemos la notación

$$\text{ten}\ \varphi$$

48. Calculemos ahora el graduante de la def $\vec{p}$ y de la Δef $\vec{p}$. Para ello el camino más rápido es utilizar el operador ∇, mediante el cual, se expresa dicho graduante por

$$\left| \nabla \left\| \nabla \vec{p} \right\| \right|.$$

Resulta, entonces, por aplicación de la fórmula (a) del párrafo 45.

$$\left| \nabla \left\| \nabla \vec{p} \right\| \right| = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \vec{p}) + \frac{1}{2} (\nabla^2) \vec{p}$$

ó empleando las otras notaciones

$$(a) \quad \text{grad def } \vec{p} = \frac{1}{2} \text{ graddiv } \vec{p} + \frac{1}{2} \Delta \vec{p},$$

fórmula que hubiéramos también podido obtener mediante el desarrollo de las componentes del vector del primer miembro.

Por otra parte, de la ecuación (b) del párrafo 45 se deduce, sustituyendo $\vec{q}$ por ∇,

$$\left| \nabla \left\| \nabla \vec{p} \right\| \right| - \frac{1}{2} \left| \nabla \left| \nabla \vec{p} \right| \right| = (\nabla^2) \vec{p}$$

y como el primer miembro representa el producto vector-tensor de ∇ por Δef $\vec{p}$, podemos escribir:

$$(b) \qquad \text{grad } \Delta\text{ef } \vec{p} = \Delta \vec{p}.$$

En el caso particular en que div $\vec{p} = 0$ la comparación de las fórmulas anteriores conduce á

$$\text{grad } \Delta \text{ef } \vec{p} = 2 \text{ grad def } \vec{p}.$$

Además, se deduce inmediatamente de (*a*), por ser div grad $\varphi = \Delta \varphi$, que

$$\text{div } (\text{grad def } \vec{p}) = \Delta \text{ div } \vec{p} = 0.$$

Otro caso particular interesante, es aquel en que $p =$ grad φ. Como en este caso hemos visto que la deformación es siempre pura, podemos acudir indistintamente á una de las dos fórmulas (*a*) ó (*b*). De la segunda se deduce inmediatamente

$$\text{grad ten } \varphi = \Delta \text{ grad } \varphi = \text{grad } \Delta \varphi$$

En general, la naturaleza del graduante de la deformación es idéntica á la naturaleza del vector. Cuando éste deriva de un potencial φ, aquél lo hace de $\Delta \varphi$, y sí de un potencial vector $\vec{\pi}$, la deformación derivará del $\Delta \vec{\pi}$ y la deformación pura de $\frac{1}{2} \Delta \vec{\pi}$.

(Continuará)

XXXVII.—Geometría Analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades.

Por Modesto Domínguez Hervella.

(Continuación.)

Adición y sustracción.

36. Convenido (núm. 8) que las entidades están representadas, tanto en magnitud como en tendencia, por vectores rectilíneos, y establecido que el orden en que se dicen ó se escriben las letras de sus extremos indica el sentido en que sus magnitudes han sido engendradas, se efectúa la suma y la resta, como en el caso de no haber exponentes indirectos; es decir, que si se ha de hacer gráficamente la verdadera suma

$$AB + CD + EF \quad \ldots\ldots + KL$$

en que la primera letra de cada sumando es su extremo inicial y la segunda su extremo final, llevaremos á continuación unas de otras estas magnitudes en sus direcciones respectivas, de modo que el extremo inicial de cada una coincida con el final de la que le precede. La suma será el vector que va del extremo inicial de la primera al final de la última trasladada.

37. Según este procedimiento, un vector $a_{\alpha|\alpha'}$ puede reemplazarse por un trinomio en que cada término sea la proyección del vector sobre cada una de las direcciones OX, OY, OZ (fig. 19).

El vector $OM = a_{\alpha|\alpha'}$ tiene por proyección $OA = a \cos \alpha$ sobre el eje real OX, y $OD = a \operatorname{sen} \alpha$ sobre el ecuador YZ.

Las proyecciones de OM sobre los ejes OY, OZ son las mismas que las de OD; y se tiene

$$OB = \sqrt{-1}\, OD \cos\alpha',\quad OC = BD = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\, OD \operatorname{sen}\alpha'$$

$$OB + BD = OD\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \operatorname{sen}\alpha'\right)$$

y siendo

$$OA = DM \text{ y } OM = OB + BD + DM = OA + OB + OC$$

será

$$OM = a\cos\alpha + a\operatorname{sen}\alpha\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right).$$

Tenemos, pues, las dos expresiones de que haremos uso

$$(2)\qquad a_{\alpha;\alpha'} = a\left[\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)\right] \quad (3)$$

cuyo módulo es

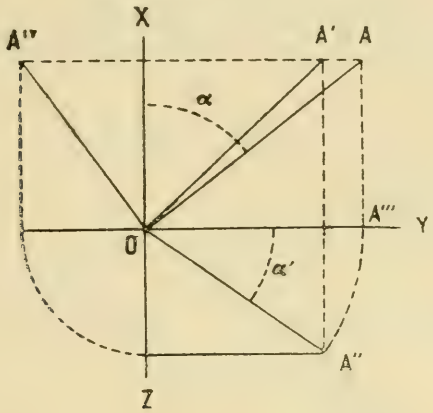
$$a\sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha' + \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha'} =$$
$$= a\sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = a.$$

38. La representación gráfica de la fórmula (3) se hará por proyecciones sobre el meridiano principal y el ecuador. Se hace girar uno de estos dos planos alrededor de la intersección OY (fig. 20), hasta adaptarse con el otro, de modo que la parte posterior del ecuador coincida con la superior del meridiano y la anterior de aquél con la inferior de éste.

Sea O el origen, XY el meridiano principal, YZ el ecuador después del giro. Suponiendo conocidas a, α, α', si el meridiano del vector $a_{\alpha;\alpha'}$ gira alrededor de OX hasta coincidir con XY, se presenta en su verdadera magnitud el vec-

tor $OA = a_\alpha$ y su colatitud $XOA = \alpha$. Si se deshace el giro, el punto A describirá un arco de círculo paralelo al ecuador. Las proyecciones de esta trayectoria son: sobre el ecuador, el

Fig.ª 20.ª



arco $A'''A''$ que determina la longitud $\alpha' = A'''OA''$, y sobre el meridiano principal, la recta AA' paralela á YO. Se tienen así las proyecciones

$$OA' = a\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha'\right)$$

sobre el meridiano principal, y

$$OA'' = a\,\text{sen}\,\alpha\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,\text{sen}\,\alpha'\right)$$

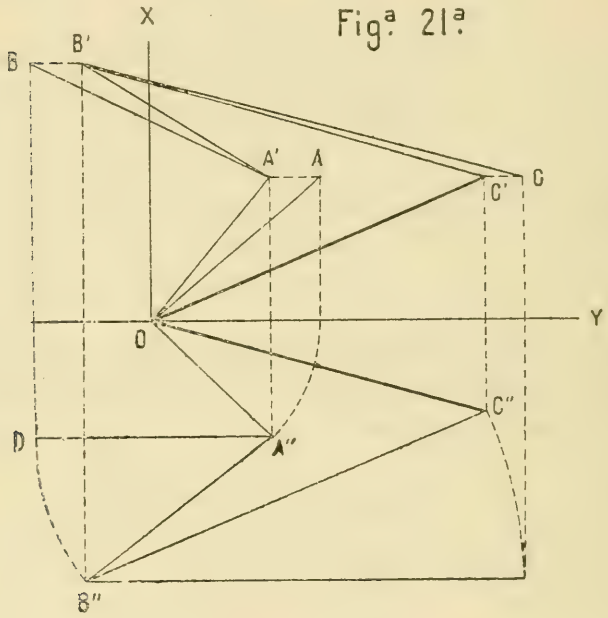
sobre el ecuador, las cuales determinan la posición del vector en el espacio.

Si se quiere la proyección sobre el meridiano secundario, se hará girar éste alrededor de OX hasta que coincida con el plano XY, y tendremos el punto A^{IV} á una altura igual á $A'''A$ y la proyección

$$OA^{IV} = a\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha'\right)$$

Esta proyección es necesaria para representar un vector perpendicular á OY.

39. Vamos ahora á efectuar por proyecciones la suma $a_{\alpha|\alpha'} + b_{\beta|\beta'} + C_{\gamma|\gamma'}$, siendo (fig. 21) $OA = a_\alpha$ y OA'' la línea en que se proyecta el vector $a_{\alpha|\alpha'}$ sobre el ecuador. Por la construcción indicada en la figura, las proyecciones de este vector serán OA', OA''. Tomemos por origen



de $b_{\beta'|\beta'}$ el punto A', A'', final del primer sumando, colocándolo en un plano paralelo al meridiano principal: la recta $A'B = b_\beta$ aparecerá en su verdadera magnitud, y su proyección ecuatorial será $A''D$, paralela á la recta YO, llamada *línea de tierra* en Geometría Descriptiva; y haciendo girar la recta $A'B$, $A''D$ alrededor de la vertical proyectada en A'' hasta situarse en un plano paralelo al semimeridiano de longitud β', se tendrán las proyecciones $A'B'$, $A''B''$ de un vector paralelo á $b_{\beta|\beta'}$ y de su misma magnitud. Toman-

do por origen el punto $B'\ B''$ llegaremos, por el mismo procedimiento, á determinar el punto $C'\ C''$ en que termina el tercer sumando $B'\ C'$, $B''\ C''$ y la suma $O\ C'$, $O\ C''$, cuya longitud angular es $Y O C''$. La colatitud y el módulo aparecerán en evidencia si se hace girar el vector $O\ C'$, $O\ C''$ alrededor de $O\ X$ hasta llegar al meridiano principal.

Según la definición de suma, se tendrán las proyecciones

$$OC' = OA' + A'B' + B'C' = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma +$$
$$+ \sqrt{-1}\,(a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + b \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta' + c \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma')$$
$$OC'' = OA'' + A''B'' + B''C'' =$$
$$= \sqrt{-1}\,(a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha' + b \operatorname{sen} \beta \cos \beta' + c \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma') +$$
$$+ \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,(a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + b \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta' + c \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma')$$

y si llamamos $d_{\delta|\delta'}$ al vector suma, será

$$d_{\delta|\delta'} = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma +$$
$$+ \sqrt{-1}\,(a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha' + b \operatorname{sen} \beta \cos \beta' + c \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma') +$$
$$+ \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,(a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + b \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta' + c \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma')$$

Las proyecciones del vector suma sobre los tres ejes, CX, OY, CZ, serán $d \cos \delta = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$.

$$\sqrt{-1}\, d \operatorname{sen} \delta \cos \delta' =$$
$$= \sqrt{-1}\,(a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha' + b \operatorname{sen} \beta \cos \beta' + c \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma')$$
$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\, d \operatorname{sen} \delta \cos \delta' =$$
$$= \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,(a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + b \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta' + c \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma')$$

40. Si algunos términos de un polinomio fuesen sustraendos, se convertirían en sumandos tomándolos en sentido contrario; así se tendrá

$$AB - CD + EF - GH = AB + DC + EF + HG$$

y se hará esta suma por el procedimiento de la fig. 21. El segundo miembro de la última igualdad indica que el punto final de cada sustraendo, se toma como inicial para hacerlo coincidir con el final del término anterior, que si era otro sustraendo habrá sufrido el mismo cambio.

Si resulta cerrado el polígono después de reducidos á sumandos todos los términos sustractivos; es decir, si el punto final del último sumando coincide con el inicial del primero, la suma es cero. Si los vectores son movimientos, el punto móvil vuelve al origen; si son fuerzas aplicadas á un punto, este punto está en equilibrio, como se ha dicho respecto á fuerzas situadas en un plano.

41. Las fórmulas (2) y (3) comprueban la interpretación dada á las colatitudes, aplicándolas al caso en que α es negativo. Cambiando α en $-\alpha$ se convierten en

$$a_{-\alpha|\alpha'} = a\left[\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)\right] =$$
$$= a\left[\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\left(-\sqrt{-1}\cos\alpha' - \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)\right] =$$
$$= a\left\{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\left[\sqrt{-1}\cos(\alpha'+\pi) + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}(\alpha'+\pi)\right]\right\} = a_{\alpha\alpha'+\pi}$$

de donde resulta que el vector $a_{-\alpha|\alpha'}$ está en el semimeridiano opuesto al de longitud α'.

Sin ser negativa la colatitud, puede estar el vector en el semimeridiano opuesto al de su longitud. Así sucede al vector

$$d_{\delta+\pi|\delta'}, \text{ si } \delta \lesseqgtr \pi \text{ y } \delta' \lesseqgtr \pi$$

Para que la expresión $1_{\alpha|\alpha'}$ represente todos los radios es suficiente que, variando α entre cero y π, varíe α' entre $-\pi$ y $+\pi$, ó bien, α entre $-\pi$ y $+\pi$ y α' entre cero y π; en una palabra, siendo π la máxima variación de un índice, que sea 2π la del otro.

Si todos los sumandos son paralelos á un plano y se hace

la suma á partir del origen toda la operación estará en un plano que pasa por el origen y en que también está contenido el vector suma.

Multiplicación general.

42. Al tratar de factores que no tienen exponente indirecto hemos visto que en dicho caso la multiplicación tiene todas las propiedades demostradas para las cantidades reales: es conmutativa, asociativa y distributiva. Si uno de dos factores es la unidad positiva, el producto es igual al otro factor; si uno de varios vectores es cero, todo el producto es cero.

Podrán algunas de estas propiedades ser generales; podrá alguna de ellas admitirse en la definición; pero para generalizar las demás se necesita demostración, fundada en la definición general que se adopte.

Puesto que la fórmula (2) representa toda magnitud en cualquier dirección del espacio, el caso más general de dos cantidades que se multiplican puede expresarse por

$$a_{\alpha}^{1\alpha'} \times b_{\beta}^{1\beta'};$$

pero para mayor sencillez tomaremos la forma

$$a_{\alpha|\alpha'} \times b_{\beta|\beta'}.$$

De las propiedades de la multiplicación en el meridiano principal, esto es, sin exponentes indirectos, la más á propósito para ser admitida en la definición es que *el módulo del producto sea el producto de los módulos de los factores.* Puesto que el módulo es la magnitud ó valor absoluto de la entidad, basta esta condición para que en ella esté comprendida la multiplicación de cantidades reales, y no está en contradicción con el caso conocido de la forma $a_{\alpha} \times b_{\beta}$.

De modo que podemos establecer, como primera parte de la definición general, que *la magnitud del producto es, respecto á la del multiplicando, lo que la del mutiplicador es respecto á la unidad absoluta.*

Este convenio queda establecido en la equivalencia

$$a_{\alpha|\alpha'} \times b_{\beta|\beta'} = a \cdot b.$$

43. Falta saber qué dirección se ha de dar á $a \cdot b$. Esta dirección no puede depender de las cantidades a y b, y será la misma que en el caso de $a = b = 1$. Veamos, pues, qué interpretación puede tener el producto de dos unidades dirigidas $1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'}$, que son dos radios de una esfera, equivalentes á la unidad.

La regla general ha de tener la condición indispensable de que, en el caso particular de $\alpha' = 0$ y $\beta' = 0$, es decir, si los dos factores están en el meridiano principal, la manera de efectuar la operación ha de ser la conocida:

$$1_\alpha \times 1_\beta = 1_{\alpha+\beta}.$$

De las demás propiedades de la multiplicación en el meridiano principal, tratemos de conservar la distributiva en la forma trinomia de los factores unidades

$$1_{\alpha|\alpha'} = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)$$
$$1_{\beta|\beta'} = \cos\beta + \operatorname{sen}\beta\left(\sqrt{-1}\cos\beta' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\beta'\right).$$

Haciendo

$$\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha' = A,$$
$$\sqrt{-1}\cos\beta' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\beta' = B,$$

se reducen los dos factores á los binomios

$$\cos\alpha + A \operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad \cos\beta + B \operatorname{sen}\beta,$$

cuyo producto es, admitiendo la propiedad distributiva,

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'} = \cos\alpha \cos\beta + A \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \\ + B \operatorname{sen}\beta \cos\alpha + A \cdot B \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

A y B son dos factores situados en el ecuador; su producto es

$$A \cdot B = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cos\alpha' \cos\beta' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \times \\ \times \sqrt{-1} \operatorname{sen}\alpha' \cos\beta' + \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \cos\alpha' \operatorname{sen}\beta' + \\ + \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^2 \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta'.$$

El cuadrado de $\sqrt{-1}$ es el producto de dos factores situados en el meridiano principal. La colatitud de cada uno es $\frac{\pi}{2}$; la del producto es π; de modo que $\sqrt{-1}^2 = -1$.

Lo mismo es el cuadrado de cualquier vector unidad situado en el ecuador; por ser cuadrado, los dos vectores factores están en un mismo meridiano, y haciendo girar hasta él el meridiano principal, el producto será el mismo que $\sqrt{-1}^2$; por consiguiente,

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$$

y

$$A \cdot B = -\cos\alpha' \cos\beta' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \times \sqrt{-1} \operatorname{sen}\alpha' \cos\beta' + \\ + \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \cos\alpha' \operatorname{sen}\beta' - \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta',$$

$$A \cdot B = -\cos(\alpha' - \beta') + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sqrt{-1} \operatorname{sen} \alpha' \cos \beta' +$$
$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \cos \alpha' \operatorname{sen} \beta'.$$

El módulo de este producto tiene que ser la unidad, porque este mismo es el de los factores. Para esto es necesario que, siendo $\cos^2(\alpha' - \beta')$ el cuadrado de la parte real, sea $\operatorname{sen}^2(\alpha' - \beta')$ la otra parte del cuadrado del módulo, lo cual no puede ser sin que

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

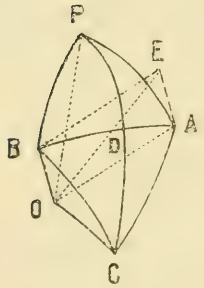
No es conveniente que dos factores monomios tan importantes como

$$\sqrt{-1} \text{ y } \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

no se puedan conmutar, y será preferible desechar la propiedad distributiva reduciendo previamente á monomios los factores que se hayan de multiplicar.

44. Una de las propiedades de la multiplicación en el meridiano principal es que el producto forma con cada factor un ángulo igual al que el otro factor forma con el eje real. Vamos á generalizar esta propiedad tomándola como definición.

Fig.ª 22.ª



Quedará asegurada la propiedad conmutativa, porque al mismo resultadose llegará, cualquiera que sea, de los dos factores, el que se toma como multiplicando.

Sea O (fig. 22) el centro de una esfera de radio $OP = 1$, y los factores $OA = 1_{\alpha|\alpha'}$ y $OB = 1_{\beta|\beta''}$. Las colatitudes respectivas serán los arcos PA, PB de meridiano. El producto OC ha de formar con OA un ángulo $AOC = POB$,

colatitud de OB, y con OB un ángulo $BOC = POA$, colatitud de OA. La colatitud del producto será el ángulo POC medido por el arco de meridiano PC.

El punto C se determina fácilmente en una esfera sólida en que se puedan trazar líneas: dados los puntos P, A y B, con la cuerda PA por radio y centro en B, llevando el compás en la dirección aproximada á PA, se traza un arco en la superficie esférica; con centro en A y radio PB se traza otro arco que corte al anterior, y se tendrá el punto C extremo del producto.

Los arcos de círculo máximo PA, PB, BC, AC determinan un cuadrilátero que podemos llamar *paralelogramo esférico*, á pesar de no tener sus lados más paralelismo que el de un par de elementos. No sólo son iguales los lados opuestos, sino también los ángulos opuestos, y, como pronto veremos, los arcos diagonales se cortan en partes iguales; si algunas otras propiedades de los paralelogramos planos no se verifican aquí, es porque estamos en un caso más general.

Vamos á determinar la longitud y la colatitud del producto, sin hacer uso de las fórmulas de Trigonometría Esférica.

El arco PC de meridianos que une el polo P con el extremo C del producto es la colatitud de éste, y divide al cuadrilátero esférico en dos triángulos PAC y CBP iguales, por tener sus lados respectivamente iguales; por consiguiente, son iguales los ángulos APC y BCP opuestos á lados iguales. Uniendo el punto medio D del arco PC con A y B por arcos de círculo máximo, tendremos los triángulos APD y BCD, iguales por tener iguales los ángulos en P y en C y los lados que los comprenden.

Serán, pues, iguales los ángulos en D de dichos triángulos; y como los arcos PD y DC pertenecen á un mismo círculo máximo, lo mismo ocurriría con los arcos AD y DB.

Por consiguiente, el punto D también divide al arco AB en dos partes iguales, y con esto se podrá obtener en fun-

ción de entidades conocidas la dirección del radio OD, cuya colatitud es la mitad de la del producto y cuya longitud es la misma que la de éste.

Si tiramos por A una paralela á OB y por B una paralela á OA se forma un rombo $OAEB$ cuya diagonal OE, bisectriz del ángulo AOB, coincide en dirección con el radio OD.

$$OE = OA + AE = OA + OB.$$

Tenemos

$$OA = 1_{\alpha|\alpha'} = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)$$

$$OB = 1_{\beta|\beta'} = \cos\beta + \operatorname{sen}\beta\left(\sqrt{-1}\cos\beta' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\beta'\right)$$

y llamando μ y μ' la colatitud y longitud del producto,

$$OE = \cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta') + \\ + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')$$

$$OD = \cos\frac{1}{2}\mu + \operatorname{sen}\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{-1}\cos\mu' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\mu'\right)$$

El módulo de OE es

$$\sqrt{(\cos\alpha\cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta')^2 + (\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')^2}$$

La cantidad subradical se reduce á

$$1 + 1 + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha'\operatorname{sen}\beta\cos\beta' + \\ + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta' = 2\,[1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')]$$

y la unidad, en la dirección OE, será

$$OD =$$

$$= \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta') + \sqrt{-1}^{\,\sqrt{-1}}(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')}{\sqrt{2\,[1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')]}}$$

y teniendo en cuenta que

$$\cos\frac{1}{2}\mu = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\mu}{2}} \text{ y } \operatorname{sen}\frac{1}{2}\mu = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\mu}{2}}$$

se tiene

$$OD = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\mu}{2}} \pm \sqrt{\frac{1-\cos\mu}{2}}\left(\sqrt{-1}\cos\mu' + \sqrt{-1}^{\,\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\mu'\right)$$

De la igualdad de los valores OD resultan las tres ecuaciones

$$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\mu}{2}} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sqrt{2\,[1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')]}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\mu}{2}}\cos\mu' = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta'}{\sqrt{2\,[1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')]}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\mu}{2}}\operatorname{sen}\mu' = \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'}{\sqrt{2\,[1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')]}}$$

De estas tres ecuaciones resulta

$$1 + \cos\mu = \frac{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')} \qquad (4)$$

$$(1 - \cos\mu)\cos^2\mu' = \frac{(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta')^2}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')} \qquad (5)$$

$$(1 - \cos\mu)\operatorname{sen}^2\mu' = \frac{(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')^2}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')} \qquad (6)$$

Por comprobación de estas ecuaciones sumemos la (5) y la (6), y se tendrá:

$$1 - \cos \mu = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')} \qquad (7)$$

y sumando ésta con la (4), resulta la dentidad

$$2 = \frac{2 + 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')} = 2,$$

como debía suceder, porque siendo determinado el problema y teniendo tres ecuaciones con dos incógnitas, cada una de aquéllas ha de ser consecuencia de las otras dos.

De la ecuación (4) resulta

$$\cos \mu = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta^2)}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')} - 1$$

$$\cos \mu = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta') - 1}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')},$$

valor que usaremos bajo la forma que más convenga en cada caso.

Multiplicando las ecuaciones (4) y (7)

$$1 - \cos^2 \mu = \operatorname{sen}^2 \mu = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}{[1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')]^2}$$

$$\operatorname{sen} \mu = (\cos \alpha + \cos \beta) \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')} \qquad (8)$$

Dividiendo las ecuaciones (5) y (6) por la (7) se tiene

$$\cos^2 \mu' = \frac{(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha' + \operatorname{sen} \beta \cos \beta')^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}$$

$$\operatorname{sen}^2 \mu' = \frac{(\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta')^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}$$

$$\cos \mu' = \frac{(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha' + \operatorname{sen} \beta \cos \beta')}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}} \quad (9)$$

$$\operatorname{sen} \mu' = \frac{(\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta')}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')}} \quad (10)$$

El doble signo no es admisible, porque el producto no puede tener dos valores; para saber cuál de los signos es el verdadero observemos lo que será en un caso particular:

Si $\alpha' = \beta'$ los dos factores están en un mismo semimeridiano, el cuadrilátero esférico se reduce á un arco $(\alpha + \beta)$, y la longitud del producto será la misma que la de los factores, es decir, $\mu' = \alpha' = \beta'$.

Si hacemos $\beta' = \alpha'$ en estas fórmulas se tiene, con el signo $+$,

$$\cos \mu' = \frac{(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) \cos \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} = \cos \alpha', \qquad \operatorname{sen} \mu' = \frac{(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) \operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} \alpha',$$

mientras si tomásemos el signo $-$ sería

$$\cos \mu' = -\cos \alpha', \qquad \operatorname{sen} \mu' = -\operatorname{sen} \alpha',$$

lo cual estaría en contradicción con el resultado del paralelogramo esférico.

Multiplicando las ecuaciones (9) y (10) por la (8) se tiene:

$$\operatorname{sen} \mu \cos \mu' = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha' + \operatorname{sen} \beta \cos \beta')}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')} \quad (11)$$

$$\operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \mu' = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)(\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta')}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos (\alpha' - \beta')} \quad (12)$$

y, finalmente, el producto

$$1_{\mu|\mu'} = \cos \mu + \operatorname{sen} \mu \left(\sqrt{-1} \cos \mu' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \operatorname{sen} \mu'\right)$$

será

$$1_{\alpha|\alpha'} = 1 + (\cos\alpha + \cos\beta) \times$$

$$\times \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta') + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha' - \beta')} \quad (13)$$

45. Para la representación gráfica de esta operación en un plano tomaremos por meridiano principal y vertical de proyección el meridiano de uno de los factores, llamando β su colatitud, α y α' la colatitud y la longitud del otro factor, éstos serán $1_{\alpha|\alpha}$ y 1_β; la fórmula (13) será, haciendo $\beta' = 0$,

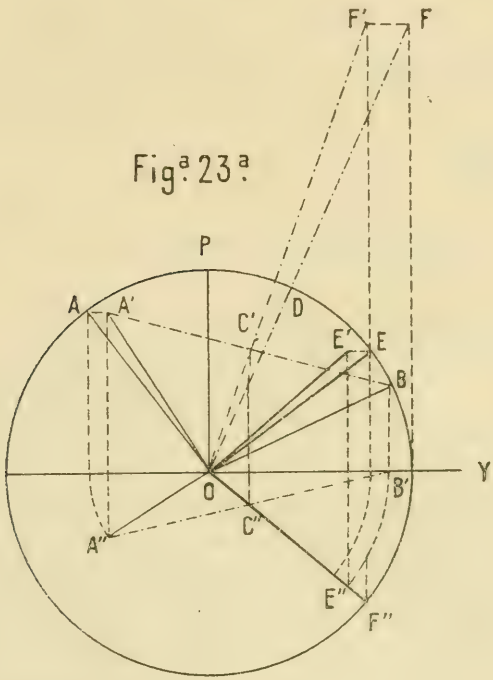
$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_\beta = -1 + (\cos\alpha + \cos\beta) \times$$

$$\times \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta) + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\alpha'}.$$

Con este cambio de meridiano principal, α' es el ángulo de los meridianos de los factores.

Sea (fig. 23) $OA = 1_\alpha$, $YOA'' = \alpha'$ y $OB = 1_\beta$. Haciendo girar OA alrededor de OP, el punto A describirá un arco de paralelo que termina en el semimeridiano POA''; en el punto A'' termina la proyección horizontal, y la proyección vertical es la recta AA' paralela á la línea de tierra. Este factor será, pues, OA', OA''. El punto C', C'', medio de la cuerda BA', BA'' está en el meridiano del producto, según se ha demostrado (núm. 44); el vector que pasa por él divide en dos partes iguales la colatitud del producto. Para hacerlo girar hasta situarlo en el meridiano principal, téngase en cuenta que el punto $C'C''$ es interior á la superficie esférica, y el radio OC'' suele ser demasiado pequeño para la exactitud de la construcción, por lo cual tomaremos un punto de la prolongación, que puede ser el $F'F''$ proyectado en la circunferencia ecuatorial. Haciendo girar el vector OF', OF'' vendrá á situarse en OF sobre el meridiano

de proyección. El punto D en que corta á la circunferencia de radio unidad determina la mitad PD de la colatitud del producto, la colatitud PE y las proyecciones OE', OE'' del producto.



46. La fórmula (13) se simplifica mucho en los casos particulares que se presentan con más frecuencia que el caso general.

Caso 1.° Los dos factores en un mismo semimeridiano. Los lados del paralelógramo esférico se reducen á un solo arco igual á la suma de las colatitudes de los factores, y la longitud de éstos es la del producto.

Esto vamos á comprobar aplicando la fórmula (13), que en este caso se reduce á

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'} = -1 + (\cos\alpha + \cos\beta) \times$$

$$\times \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\alpha'}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$= -1 + (\cos\alpha + \cos\beta) \times$$

$$\times \frac{\cos\alpha + \cos\beta + (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)}{1 + \cos(\alpha - \beta)}$$

se sabe que

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$1 + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

y la fórmula de que nos ocupamos viene á ser

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'} = -1 + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \times$$

$$\times \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)}{2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

suprimiendo el factor común $2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ queda

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'} = -1 + 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \times$$

$$\times \left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)$$

y siendo

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=\cos(\alpha+\beta)$$

y

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)$$

se llega á la ecuación

$$1_{\alpha|\alpha'}\times 1_{\beta|\alpha'}=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)\times$$
$$\times\left(\sqrt{-1}\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,\mathrm{sen}\,\alpha'\right)=1_{\alpha+\beta|\alpha'}. \quad (14)$$

No está demás esta demostración, aunque hay otra más sencilla; la que se acaba de dar, sirve para comprobar la exactitud de la fórmula (13).

Es más sencillo cambiar el meridiano principal, haciéndolo girar un ángulo α', lo cual se puede hacer con cualquier fórmula, disminuyendo α' en todas las longitudes, ó sean los segundos índices. En este caso, los factores quedan reducidos á $1_{\alpha}\times 1_{\beta}$, cuyo producto es $1_{\alpha+\beta}$. Restablecido el anterior meridiano principal, habrá que añadir α' como segundo índice, tanto á los factores como al producto, resulta la ecuación (14) en el orden

$$1_{\alpha|\alpha'}\times 1_{\beta\alpha}=1_{\alpha+\beta.\alpha'}=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)\left(\sqrt{-1}\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,\mathrm{sen}\,\alpha'\right)$$

(Continuará.)

XXXVIII.—La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopía, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912.

(Conclusión.)

POR DOMINGO DE ORUETA

MICROBIOS Y ORGANISMOS SIMILARES

Estos organismos, y, en general, las algas sin clorofila ó con poca clorofia, se destacan bien con luz ultra-violeta, pero *no demasiado;* esto es, su interior aparece lo suficientemente transparente para que pueda estudiarse en sus detalles internos. El aspecto general de un líquido cargado de bacterias ha sido reproducido muy bien por el Dr. Kohler en su obra citada (fig. 10, lámina IV de dicha obra). En nuestro laboratorio se han fotografiado con facilidad á aumentos de 1.500 y 2.000 diámetros los esporos de algunas algas, que se destacaban bien sobre el fondo más claro del protoplasma interno, y también los que se movían libremente en el líquido y que se habían fijado previamente. Como regla general, puede decirse que el esporo aparece siempre más negro que el bacilo ó que el alga de que procede; esto es, que es más opaco que aquéllos á las radiaciones de onda corta.

La luz ultra-violeta es, pues, un buen procedimiento para el examen de aguas potables, porque con ella se puede determinar en plazo muy breve el número de microbios que contienen. Se llega con esta técnica á un resultado similar al que da el método moderno de ultra-microscopía (alumbrado anular sobre fondo negro); pero con la ventaja de que las imágenes no están deformadas por el alumbrado oblicuo.

Como rapidez, ambos métodos pueden considerarse como iguales. Como ventaja á favor de la ultra-microscopía, debemos señalar la de una instalación más barata y menos especial que la de la luz ultra-violeta.

La acción microbicida ó abiótica de estas radiaciones se manifiesta bien cuando se examinan microbios con ella. A los pocos minutos empieza á disminuir la rapidez de los movimientos, y en cosa de diez ó quince minutos, todos los organismos de esta clase han perecido. Se comprende, pues, bien la rápida esterilización del agua potable, cuando se la somete á la acción del espectro ultra-violeta entero de la lámpara de mercurio.

DIATOMEAS

Para el estudio de conjunto de las diatomeas no tiene objeto la luz ultra-violeta, porque estos organismos se ven muy bien con cualquier luz y sin técnica preparatoria ninguna. En cambio, para el estudio de los detalles de la valva, esta luz tiene importancia capital por su gran poder resolvente, que nos permite ver los pequeñísimos detalles de dicha valva.

Todos los microscopistas saben el interés que se ha dado á la resolución de dichos detalles (perlas, costillas, surcos, etcétera), y las larguísimas discusiones que ha habido y aun todavía hay, sobre su verdadera naturaleza. La pequeñez de estos detalles es tal, que para algunos de ellos que poseen ciertas especies de diatomeas, no se han conseguido *imágenes verdaderas*, ni aun aplicándoles los más potentes objetivos para luz visible. Entendemos por imágenes verdaderas, aquellas á cuya formación concurren por lo menos los dos primeros pares de espectros de difracción que el detalle en cuestión produce al ser atravesado por la luz (*). Se

(*) A los lectores poco familiarizados con la formación de la imagen microscópica nos permitimos recomendar la lectura de las obras del eminente micrógrafo español D. Joaquín M.ª de Castellarnau y

comprende bien por esto el interés que tiene en el estudio de estos detalles, disponer de objetivos cuyo poder resolvente es casi el doble que el de los más potentes para luz visible; lo que equivale á decir que su capacidad para formar imágenes verdaderas, es también casi el doble.

En el laboratorio hemos examinado con luz ultra-violeta las diatomeas más corrientemente empleadas como textos de objetivos, y hemos visto prácticamente comprobado lo que la teoría dice. No se reproducen las fotografías obtenidas, por no multiplicar exageradamente las láminas con figuras que puede encontrar el lector en el trabajo, tantas veces citado, del Dr. Kohler y en varios otros de los que se han escrito sobre luz ultra-violeta.

INFUSORIOS Y ROTÍFEROS

Agrupamos juntos estos organismos tan distintos, porque casi siempre viven juntos en las aguas dulces de estanques y pantanos, y también porque se comportan de igual manera cuando se alumbran con luz ultra-violeta.

De un modo general puede decirse, que son *muy* opacos á esta luz, y en la mayoría de los casos se ven en el visor uniformemente negros. Para poder diferenciar el núcleo en hélice de un *Vorticella* y distinguirlo del protoplasma interno, ha sido preciso montarlo en glicerina «Price» y comprimir mucho el ejemplar entre el porta y el cubre para reducir su espesor hasta el último límite. En los Rotíferos, sólo á du-

---

Lleopart, tituladas: *Visión microscópica* (Anales de la Sociedad Española de Historia Natural, 1885), y *Teoría general de la formación de la imagen en el microscopio* (Junta de Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas, 1911.) En ellas se explica con toda claridad la diferencia entre imágenes falsas y verdaderas, y las condiciones suficientes y necesarias para conseguir las segundas. La índole de nuestro trabajo no nos permite entrar en la explicación detallada de este importante punto de la visión microscópica, y nos tenemos que limitar á enunciar la principal condición de veracidad, sin entrar á demostrarla.

ras penas se distinguen los contornos del intestino y demás órganos internos. Se tropieza, además, con la dificultad que los reactivos fijadores corrientes, como el ácido ósmico, el líquido de Fleeming, etc., son muy opacos también á la luz ultra-violeta y aumentan, por consiguiente, la opacidad natural de los organismos en cuestión. Se ha intentado fijarlos por medio de la luz ultra-violeta misma, aprovechando su acción abiótica; pero nos hemos encontrado con que esta acción es menos enérgica para estos organismos que para los microbios, y hacía falta mucho tiempo para inmovilizarlos. El mejor resultado lo hemos obtenido añadiendo al agua que los contiene unas gotas de cloral ó de cloroformo. También el ácido de acético da resultados aceptables.

Lo que sí se puede estudiar bien son los cilios ó pestañas de la periferia de los infusorios, porque se destacan fuertemente en negro sobre el fondo brillante del campo.

CELENTÉREOS

Para el estudio de esta rama del reino animal, la luz ultra-violeta da resultados excelentes. Los tejidos de la mayoría de los celentéreos son muy transparentes á la luz visible y bastante difíciles de teñir por los colorantes artificiales. Son, además, blandos, de poca consistencia y muy delicados en estructura, por lo cual se deforman mucho por la acción de los reactivos. La luz ultra-violeta, que suprime estos últimos y diferencia por sí sola, y que permite además estudiar el tejido sin manipularlo, está indicada para el estudio de estos seres.

En laboratorio se ha trabajado bastante en esponjas, medusas y corales, de muchas de cuyas especies hay facilidad en Gijón para procurarse ejemplares frescos. La composición del mesosarco de las esponjas se pone admirablemente de manifiesto con la luz ultra-violeta, y hasta sus elementos más finos aparecen diferenciados. Véanse, como ejemplo, las

figuras 2, 3 y 6 de la lámina II, y las 3, 4, 5 y 6 de la lámina III, todas ellas tomadas de cortes por congelación, dados en ejemplares frescos acabados de pescar. La figura 2 de la lámina II pone de manifiesto los cromatocitos de la esponja, las cámaras vibrátiles y las finísimas granulaciones del protoplasma. La núm. 1, de la misma lámina, ya hemos dicho antes que está tomada para comparar lo que se ve con luz visible con lo que muestra la ultra-violeta. Las demás fotografías de las citadas láminas II y III representan diversas fases de la evolución de los óvulos de la esponja. Nótese la diferencia de opacidad entre estos óvulos y el resto del protoplasma, y nótese también cómo dicha opacidad va aumentando á medida que avanza el desarrollo del óvulo; cosa que se ve bien en la figura 5 de la lámina II, que contiene óvulos grandes y pequeños. En algunas fotografías (núm. 5, lámina II, y números 3 y 4, lámina III) se ve bien el núcleo, más claro que el protoplasma que lo envuelve, cosa que volveremos á notar en varias de las grandes células del sistema nervioso de los animales superiores. La evolución de la membrana envolvente del óvulo se puede seguir también en todas sus fases. Véase la figura 6 de la lámina II, por ejemplo, que representa óvulos cuya membrana empieza á formarse.

La figura 4, de la lámina II, representa un trozo del finísimo tegumento que cubre la superficie externa del parasol ó sombrilla de una medusa *(Carmarina parfta)*. El tegumento, en esta especie, se compone de bandas radiales, de tres á cuatro milímetros de espesor, desiguales en transparencia. La fotografía que estamos describiendo corresponde á las bandas más transparentes. A luz visible, esta preparación es absolutamente incolora y no se ven en ella detalles de ninguna clase. Con la ultra-violeta aparece el tegumento surcado por fibras granulares muy finas, entre las cuales se ven las células epiteliales.

La figura 3, de la lámina II, representa un corte fino de

un tentáculo de otra medusa *(Rhizostoma pulmo)*. En los bordes se ven, fuertemente destacadas en negro, las aglomeraciones de nematocistos, y en el centro los núcleos de las células del mesosarco.

ANIMALES SUPERIORES Á LOS CELENTÉREOS

A partir de los Celentéreos, no se puede ya decir que tal grupo de animales se estudia bien ó mal con la luz ultravioleta. La complicación de los órganos es ya tal, que algunos de ellos se muestran bien diferenciados; otros, deficientemente; y otros con exceso. Estudios posteriores dirán para cuáles órganos puede ser útil este método de investigación y para cuáles no; pero todo lo hecho hasta ahora en el laboratorio viene á confirmar las ventajas generales del método que hemos ya expuesto. A título de ejemplo, presentamos las siguientes fotografías:

Las 1, 2, 8 y 9 de la lámina III y la 1 de la lámina IV, que representan trozos de piel de larva de salamandra, en algunas de las cuales se ven las células en vías de división; la 7 de la lámina III y la 7 de la lamina IV, que muestran la formación de las vértebras caudales óseas de una larva de salamandra; las 3, 4, 5, 6, 8 y 9 de la lámina IV, que representan sangre fresca de rana; por último, la 2 de la lámina IV, que se ha obtenido de un trozo de pía-madre de medula humana, aplastado entre el porta y el cubre después de la disociación.

Estas fotografías, entresacadas de la colección general de laboratorio, no tienen otro objeto que mostrar al lector el grado de diferenciación que se puede conseguir en cada caso, sin reactivo alguno y con sólo el empleo de la luz ultra-violeta.

SISTEMA NERVIOSO

La histología fina del sistema nervioso es tal vez el problema más difícil de la técnica microscópica. Los diversos

elementos que lo componen son de estructura muy compleja y la mayoría de ellos de finura y delicadeza extraordinarias. Algunos son además muy difíciles de teñir, y sólo merced á métodos especiales se ha conseguido diferenciarlos del resto del protoplasma. Esto, y lo interesante del estudio de un sistema tan orgánicamente fundamental como es el nervioso, explica que los métodos de técnica para estudiarlo, formen la parte más extensa y á veces la casi totalidad de los tratados modernos. De aquí, que la aplicación de la luz ultra-violeta al sistema nervioso sea una de las investigaciones más interesantes. A ella se ha prestado en el laboratorio especial atención. (*). La serie de observaciones registradas por medio de la fotografía, pasa de doscientas, y de ellas hemos entresacado las que nos han parecido más interesantes. Vamos á describirlas someramente.

CIÁTICO DE RANA

La lámina V contiene cuatro fotografías de fibras nerviosas de ciático de rana, obtenidas por medio de cortes por congelación, dados en el tejido fresco, y montados en una mezcla de glicerina y agua (**). A primera vista se destacan

(*) En los trabajos sobre el sistema nervioso, ha intervenido muy directamente el Dr. D. Luis Simarro; con cuyos consejos y bajo cuya inspección, hemos trabajado constantemente. El Sr. Simarro ha hecho además, en este laboratorio, interesantísimos trabajos exclusivamente personales suyos, que es probable se publiquen en su día. Siguiendo la pauta que nos hemos impuesto, nos limitaremos por ahora á exponer los resultados de diferenciación óptica á que hemos llegado, y prescindiremos de la interpretación de los mismos.

Hemos tenido también á la vista los notables trabajos hechos con luz ultra-violeta por el Dr. D. Francisco Teilo y especialmente los titulados. «Algunas observaciones histológicas con las radiaciones ultra-violetas» y «algunas observaciones con los rayos ultra-violetas» publicados ambos en 1911.

(**) En estas preparaciones de la lámina V se ha procurado que la fibra nerviosa sufra el mínimo de alteración. El intervalo entre la muerte del animal y la obtención de la fotografía no ha excedido de

los elementos siguientes: *La membrana de Schwann* envolviendo á la fibra nerviosa. Las *extrangulaciones de* Ranvier y las *cisuras de Schmidt ó Lanterman*, cuyos cilindros-conos ó embudos, se destacan fuertemente en negro, sobre el fondo más claro de la mielina. Esta última aparece transparente, de un color grís claro en la imagen del visor; y son dignas de notarse las vacuolas ó granulaciones de distintos tamaños que constantemente se ven en su masa, tanto en las fibras muy frescas, como en las que se han fijado previamente con formol (*). En algunas fotografías se destaca también el núcleo del segmento anular. Este segmento es constantemente más obscuro que la mielina.

La *vaina de Mauthner* y las *estriaciones del cilindro-eje*: y las bandas negras, que muestra el método del nitrato de plata *(estrias de Fromann)*, no hemos conseguido diferenciarlas con la luz ultra-violeta sola. Esto parece comprobar la indicación del Dr. Cajal, de que las tales estrías pudieran ser debidas á la acción de los reactivos (**). Tratadas las fibras nerviosas del ciático de rana por los métodos de Cajal, Bielschowsky-Doinikow y Achucarro, modificados para el examen con luz ultra-violeta, hemos visto estriaciones longitudinales en el cilindro-eje; y en ocasiones también

---

media hora en ningún caso. Los cortes se han montado en una mezcla de agua y glicerina, á la que se han llevado paulatinamente para evitar las deformaciones producidas por la osmósis. Las fibras están, sin embargo, ligeramente contraídas en el sentido de su longitud.

(*) Nos abstenemos de dar nuestra opinión sobre estas particularidades de estructura por no considerarnos con competencia suficiente para ello. Cabe en lo posible que estas vacuolas sean debidas, como opina el Dr. Cajal, á la coagulación de la mielina después de la muerte. Lo que perseguinos nosotros, es señalar los elementos que se diferencian con esta técnica, y la salvedad que acabamos de hacer queda subsistente para las descripciones que siguen; dejando á los especialistas en el sistema nervioso la interpretación histológica de lo que las figuras muestran.

(**) Manual de Histología Normal y Técnica Micrográfica, 1910 Página 467.

bandas fuertemente coloreadas, que pudieran ser las estrias de Fromann; pero las reproducciones de ellas, obtenidas hasta ahora, no son lo suficientemente claras para que nos atrevamos á consignarlas aquí, si bien contamos hacerlo en otro trabajo que nos proponemos publicar más adelante como continuación de éste.

Las estrangulaciones de Ranvier y las cisuras de Lantermann han sido fotografiadas con toda claridad por el doctor Tello en su obra «Algunas observaciones con los rayos ultra-violetas», figuras 7 y 8. En estas fotografías se destacan también las vacuolas de la mielina.

MEDULA

Las figuras 2 y 3 de la lámina VI representan, respectivamente, dos cortes transversos de medula humana y de ciático de rana. La primera está tomada á 1.000 diámetros, y la segunda á 500. Nótese la diferencia de absorción entre la mielina y el cilindro-eje. Estas fotografías parece como si hubieran sido tomadas de un corte teñido artificialmente, y las fibras se ven con su aspecto de capas concéntricas tan característico, y en el centro de cada una el cilindro-eje más claro. Este aparece en algunas fibras con estructura punteada; lo que quizás pudiera interpretarse como un haz de fibrillas cortadas perpendicularmente. Tanto el ciático como la medula han sido indurados durante algunos días en formol al 10 por ciento.

La fig. 1 de la misma lámina VI representa un corte transverso de medula de cordero, con ampliación de 800 diámetros. La simple inspección de esta fotografía demuestra la enorme opacidad á la luz ultra-violeta de las células grandes del sistema nervioso. La negativa de esta fotografía está pasada. Las células, sin embargo, son tan negras que apenas impresionan la placa, y de aquí que haya sido preciso exagerar la exposición, sacrificando la reproducción de

los elementos del tejido que no son células, á trueque de poder reproducir algo del interior de éstas. Se destacan bastante bien del fondo, el nucleolo y el núcleo; éste más claro que el protoplasma de la célula, como sucede siempre en las del sistema nervioso y con frecuencia en otras que no pertenecen á él. Los detalles del protoplasma del núcleo apenas se ven por defecto de exposición. Esta opacidad de los neuronas nos ha llevado á apelar á la técnica que antes expusimos, que consiste en cortes muy delgados, glicerina pura y muy densa para montar al corte, y graduación exacta de la apertura del haz de luz incidente. En las fotografías de células de Betz, que describiremos después, se notan los resultados de esta técnica.

La figura 1 de la lámina VII (X. 500) representa un trozo disociado de la película externa de la membrana (pía madre) que envuelve á la medula de cordero. Aquí, la diferenciación es bastante completa y está en su justo medio; esto es, sin exceso ni defecto de opacidad. En general, sucede esto mismo con todas las membranas que se examinan á luz ultra-violeta. Las fibras y sus ramificaciones; los glóbulos de grasa y demás elementos que las integran, se destacan con claridad unos de otros; y nótese, que en estos tejidos, es un tanto difícil llegar al mismo resultado por los procedimientos de coloración artificial, como saben bien los que se dedican al estudio de ellos.

La figura 2 (X. 500) de esta misma lámina VII, representa un corte transversal *en parafina*, de medula humana. Se publica esta fotograffa para demostrar tangiblemente la diferencia que hay entre una preparación que ha sufrido muchas manipulaciones, como son la deshidratación, la inclusión, etc., y otras que no han sufrido casi ninguna, como son las hechas de cortes por congelación en tejidos frescos ó ligeramente indurados. Nótese la contracción de las fibras nerviosas y la desaparición en casi todas ellas del cilindroeje, que debe haber sido arrastrado en el curso de las mani-

pulaciones. Por cierto, que en algunas fibras se ve atravesada diametralmente una barrita transparente, que pudiera ser el cilindro-eje desviado de su posición normal. Si se compara esta fotografía con las 2 y 3 de la lámina VI, que ya hemos descrito, se notará enseguida la diferencia de los dos procedimientos de técnica.

El tejido del vaso ó *arteriola* que atraviesa diagonalmente al corte (fig. 2, lámina VII), ha resistido mejor las operaciones y se ve bastante bien. Compárese, sin embargo, con el vaso que representa la figura 4 de la lámina XII (método de congelación), y se notará también la diferencia.

La lámina VIII representa dos células (X. 500) de la substancia gris de la medula de vaca (región lumbar), disociadas de un trozo ligeramente endurecido en formol y montadas en glicerina pura. Aquí se ha prescindido por completo del fondo de la preparación, cuya reproducción no ofrecía interés, y nos hemos fijado exclusivamente en obtener una representación clara de la célula. Aun habiéndolo hecho así, el mucho espesor de la célula y su enorme opacidad, han dificultado la reproducción fotográfica. Esto, no obstante, la distribución del protoplasma en el cuerpo de la célula se ve en la figura 1; menos claramente en la figura 2, y bastante bien en las prolongaciones protoplásmicas. El núcleo y el nucleolo se ven, á pesar de estar en el interior de la célula Ambas fotografías son una buena demostración del poder de penetración de los objetivos monocromáticos, cuya propiedad ya describimos antes. Nótese que casi todas las prolongaciones protoplásmicas están en foco, á pesar de mediar entre ellas bastante distancia en sentido vertical.

CÉLULAS DE BETZ

Las fotografías 1, 2 y 3 de la lámina IX se han hecho para compararlas con las 5, 6 y 7 de la misma lámina, y como ejemplo demostrativo de la diferenciación que produce la

luz ultra-violeta en las células del sistema nervioso. Las seis fotografías representan células de Betz, de la corteza cerebral humana (circunvolución central anterior) y todas seis están tomadas de cortes del mismo espesor, dados en bloques ligeramente indurados en formol. Las tres primeras se han hecho con luz visible y con un objetivo apocromático. Las tres últimas, con luz del cadmio. Salvo la masa de pigmento y el contorno del nucleolo, los demás elementos no se han diferenciado en las 1, 2 y 3, por su uniforme transparencia á la luz visible; en cambio, se han diferenciado con exceso en las 5, 6 y 7, por su enorme opacidad á la luz ultra-violeta.

Esta excesiva opacidad se ha tratado de evitar con la técnica á que varias veces hemos aludido, y los resultados á que hemos conseguido llegar los muestran las fotografías 4 de la lámina IX, 1 y 2 de la X, las cuatro de la XI, las 1, 2 y 3 de la XII, las 1 y 2 de la XIII y las cuatro de la XIV, que representan células de Betz y de Purkinge á distintos aumentos, y están tomadas de cortes de 4 á 6 μ de espesor, montados en glicerina pura de distinta densidad, pero siempre de mucha, y alumbrados con un cono de luz de apertura exactamente graduada para obtener el máximo de visibilidad del detalle que se quiere reproducir de preferencia. Algo semejante se ha hecho también con el foco del objetivo. Se ha enfocado tal ó cual detalle, sin preocuparse de los demás, si bien la mucha penetración de los objetivo de cuarzo ha dado por resultado que en la mayoría de los casos, la totalidad de la célula ha resultado en foco, si no perfecto, tolerable al menos. Veamos lo que á nuestro juicio se pone de manifiesto en estas fotografías.

MEMBRANA CELULAR

La mayoría de los autores dudaba existiese una membrabrana celular externa en las células nerviosas. Nuestro his-

tólogo, Sr. Cajal, por el contrario, afirma su existencia y funda su opinión en argumentos de mucho peso (*). Era, pues, interesante ver si la luz ultra-violeta mostraba esta membrana.

No nos atrevemos á pronunciarnos por la afirmativa, y, sin embargo, cuando el corte resulta diametral á la célula, y cuando se enfoca exactamente en el borde de ésta, aparece una línea marginal muy tenue envolviendo al protoplasma, que sugiere la idea de una membrana, ó al menos, no es fácil interpretarla de otro modo. Nos hizo notar este detalle el Sr. Achucarro al examinar algunas fotografías procedentes de este laboratorio, y desde entonces hemos procurado aplicar la investigación á este importante detalle. Véase, por ejemplo, el borde izquierdo (**) y el superior derecho de la célula 2 de la lámina X, y se observará la línea á que nos referimos. Véase también el borde derecho de la célula figura 2 de la lámina XI, y mejor todavía, casi todo el contorno de la célula de Purkinje representada en la figura 3 de la lám. XII.

Desde luego se ve que esta *membrana* es atributo de la célula y no un órgano ajeno á ella, como las envolventes capsulares de algunas células, porque siempre permanece adherida al protoplasma, y cuando el tejido se contrae ligeramente, persiste sin embargo, esta adherencia. No cabe tampoco interpretarlo como un fenómeno de difracción producido por un haz de luz oblicuo, porque á más de habernos cuidado de que el alumbrado sea exactamente central, aparece lo mismo cuando se cambia la dirección del haz de luz incidente, y también cuando la posición de la célula varía dentro del campo, viéndose la tal línea, lo mismo en las zonas centrales de éste que en las marginales, y sin que su aspecto varíe. (Fig. 2, lám. X. Fig. 3, lám. XII.)

(*) S. Ramón y Cajal: *Histologie du Systeme Nerveux de l'Homme et des Vertebrees.* París, 1909, tomo I, cap. VI, págs. 151 a 155.

(**) Entiéndase la izquierda del observador que mira á la fotografía.

Para poner de manifiesto esta membrana, recomienda el Doctor Cajal el método de Nissl y el del azul de metileno de Ehrlich (ob. cit., pág. 15 y 152). Hemos tratado de aplicar estos dos métodos con luz ultra-violeta, previa modificación de la técnica para adaptarlos á ella. Los resultados conseguidos hasta ahora han sido poco concluyentes, debido á diversas causas; pero bastan para probar que el camino es bueno y puede conducir á mayor diferenciación que la luz ultra-violeta sola. No ha habido tiempo hasta ahora para examinar con esta luz células de otros tejidos en los que la membrana está más desarrollada, según parece, y es, por consiguiente, más fácil de ver.

PROTOPLASMA CELULAR

La luz ultra-violeta pone de manifiesto, desde luego, los husos de Nissl, que se destacan intensamente en negro, cual si hubieran sido teñidos con un reactivo extraordinariamente selectivo. Todas las fotografías de células de Betz pueden servir para demostrarlo. Fijándose en estos husos ó aglomeraciones, sobre todo cuando el corte es fino, se ve bien su composición granular.

En el cuerpo de la célula muestra la luz ultra-violeta otras granulaciones más finas que las anteriores y menos diferenciadas, pero siempre destacándose unas de otras con bastante claridad. En células muy aplastadas entre el porta y el cubre, se estudian bien las diversas clases de granulaciones del protoplasma, y la distinta opacidad con que aparecen podría servir, tal vez, para identificarlas y clasificarlas. Este estudio del protoplasma celular es uno de los más indicados á hacer con este método, y sería interesante aplicarlo á comprobar y complementar las observaciones de Heidenhain sobre la teoría granular (*). El colorante *rojo neutral*, em-

(*) M. Heidenhain. Plasma und Zelle. Capítulos finales del primer fascículo.

pleado por Heidenhain, puede servir para la luz ultra-violeta, porque no es demasiado opaco á ella.

Las masas de pigmento de las células de Betz son muy opacas á esta luz; pero como también lo son á la luz visible, resulta poco interesante la aplicación del método á ellas. Véanse las figuras 1, 2 y 3 de la lámina IX, hechas con luz visible, y compárense con las demás, hechas con luz ultra-violeta.

Las dos fotografías de la lámina VIII parecen mostrar el *retículo neurofibrillar,* formando una red en el cuerpo de la célula, y prolongándose en haces independientes dentro de las prolongaciones protoplásmicas y del cilindro-eje, tal y como opina Cajal (*). Contribuye á afirmar esta idea la comparación de estas fotografías con las figuras 232 y 234 de la citada obra de Cajal. De todos modos, será digno de interés tratar de resolver los haces de fibras de las prolongaciones, por medio de los monocromáticos potentes.

MEMBRANA DEL NÚCLEO

Poco podemos añadir á lo expuesto por Tello, que ha reproducido esta membrana con luz ultra-violeta en las fotografías 1 y 6 de su obra ya citada. Esta misma membrana aparece bastante clara en las células de Betz y de Purkinje (lámina IX, fig. 4; lám. X, fig. 1; lám. XIV, figs. 1 y 2), y cuando el corte es diametral al núcleo, se ve muy bien en contorno doble (lám. XI, figs. 1, 3 y 4; lám. XII, fig. 2).

PROTOPLASMA DEL NÚCLEO

Siempre que se fotografía una célula nerviosa con luz ultra-violeta, aparece el núcleo más claro que el protoplasma celular y que el nucleolo. El contraste óptico entre ambos

(*) S. Ramón y Cajal: *Manual de Histología Normal y Técnica Micrográfica,* 1910. Pág. 450 y siguientes.

protoplasmas es muy grande y parece acusar, por lo tanto, una composición bastante distinta. La reticulación nuclear y las granulaciones accesorias, se diferencian bien, y por esto, y por su relativa transparencia, el estudio del núcleo, puede complementarse quizás con resultados interesantes por medio de la luz ultra-violeta.

NUCLEOLO

Como ha observado Tello, el nucleo lo está constituído por una substancia poco transparente á esta luz, y de aquí que siempre se destaque fuertemente en negro sobre el fondo claro del núcleo. Todas las fotografías lo muestran así. En las obtenidas de cortes de poco espesor, se consigue ver la estructura interna del nucleolo, sus granulaciones y la agrupación de éstas. (Fig. 4, lám. IX; fig. 2, lám. XI).

Los cuerpos refringentes de Lache, fotografiados ya por Tello (obra citada, fig. 3) se ven con claridad en nuestras fotografías figura 1, lámina X, y figura 2, lámina XII.

Otra particularidad del nucleolo aparece en las fotografías 1 y 2 de la lámina XI. Nos referimos á una especie de aureola clara que rodea al nucleolo, que no puede atribuirse á fenómeno óptico, porque subsiste cuando varía el foco y la inclinación de la luz. No nos atrevemos á dar explicación de este detalle, bastante frecuente en las células de Betz, y nos limitamos á señalarlo y reproducirlo para que otros puedan interpretarlo.

REFLEJO ÓPTICO

Las fotografías 1 y 3 de la lámina XIII muestran un fenómeno de óptica muy curioso, que señalamos para prevenir á otros observadores contra interpretaciones erróneas, como la que se nos ocurrió á nosotros cuando por primera vez lo observamos. Este fenómeno es la masa esférica, rodeada de

una aureola más clara, que se ve debajo del nucleolo de la fotografía número 2 de la lámina XIII. Es el mismo que se ve también, aunque con menos claridad, en las dos fotografías de la lámina VIII. En un principio creímos que se trataba de un órgano ó atributo de la célula misma; pero después, merced á una indicación muy oportuna del Dr. Simarro, pudimos convencernos de que se trata de un fenómeno de reflexión óptica, producido, en opinión nuestra, por las lentes cóncavas de cuarzo del condensador, y según el Dr. Kohler, á quien consultamos sobre el caso, por la lente superior del ocular. Ello es que el reflejo en cuestión desaparece cuando se modifica ligeramente el foco del microscopio, como se ve en la fotografía número 1 de la lámina XIII, y esto parece dar la razón al Dr. Kohler; pero es el caso que desaparece también cuando, sin alterar el foco del objetivo, se sube ó se baja ligeramente el condensador á lo largo del eje óptico, y esto parece nos da la razón á nosotros. De todos modos, la mejor manera de suprimir dicho reflejo es la segunda indicada, la de mover el condensador, porque de este modo se conserva el foco de la imagen. La cantidad de luz que se pierde al alterar la posición focal del condensador es insignificante.

Se conoce el reflejo en cuestión, en que ocupa siempre el centro del campo visual y también en su aspecto especial, que es constantemente el que muestran las fotografías citadas. Aparece este fenómeno cuando las condiciones ópticas de la observación se prestan á ello, ó sea cuando se examina un objeto opaco ó casi opaco, rodeado de un fondo brillantemente alumbrado, que es el caso de las fotografías 1 y 2 de la lámina XIII.

Gijón, Agosto, 1912.

Lámina I.

Fig. 1. Instalación de luz ultra-violeta con corriente continua, tomada de la red de alumbrado. El interruptor «Simón» de la bobina está en habitación aparte. Se ve bien, á la izquierda, el exitador de chispas con sus columnas de porcelana, y la disposición de las dos mesas separadas.

Fig. 2. Instalación de luz ultra-violeta para corriente alterna trifásica. El circuito primario del transformador se ha unido á una de las fases. El transformador queda oculto por la batería de botellas de Leyden. Esta instalación es la del laboratorio del autor.

[illegible] aureola más clara, que se ve debajo del nucleolo de la fotografía número 2 de la lámina XIII. Es el mismo que se ve también, aunque con menos claridad, en las dos fotografías de la lámina VIII. En un principio creímos que se trataba de un órgano ó atributo de la célula misma; pero después, merced á una indicación muy oportuna del Dr. Simarro, pudimos convencernos de que se trata de un fenómeno de reflexión óptica, producido, en opinión nuestra, por las lentes cóncavas de cuarzo del condensador, y según el Dr. Kohler, á quien consultamos sobre el caso, por la lente superior del ocular. Ello es que el reflejo en cuestion desaparece cuando se modifica ligeramente el foco del microscopio, como se ve en la fotografía [illegible] **lámina I.** [illegible] XIII, y esto parece [illegible]

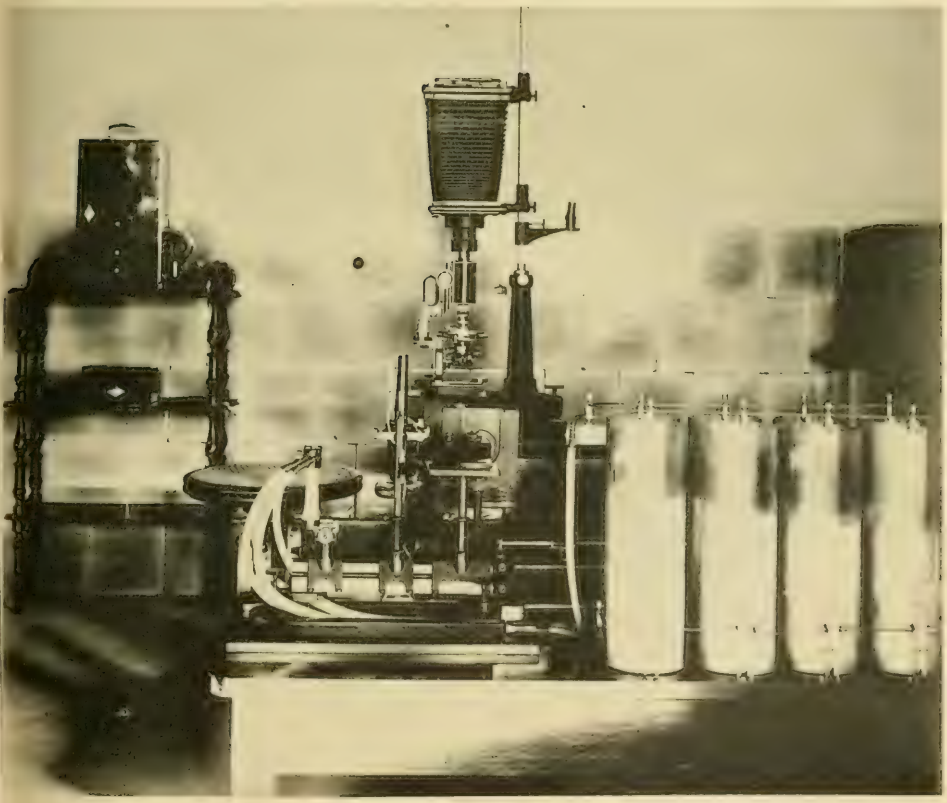
Fig. 1. Instalación de luz ultra-violeta con corriente continua, lo-[illegible] de la red de alumbrado. El interruptor [illegible] Simón de la bobina está en habitación aparte. Se ve bien, á la izquierda, el excitador de chispas con sus columnas de porcelana, y la disposición de las dos mesas separadas.

Fig. 2. Instalación de luz ultra-violeta para corriente alterna trifásica. El circuito primario del transformador se ha unido á una de las fases. El transformador queda oculto por la batería de botellas de Leyden. Esta instalación es la del laboratorio del autor.

[illegible]nificante.

Se conoce el reflejo en cuestión, en que ocupa siempre el centro del campo visual y también en su aspecto especial, que es constantemente el que muestran las fotografías citadas. Aparece este fenómeno cuando las condiciones óptimas de la observación se prestan [illegible]dio, ó sea cuando se examina un objeto opaco ó casi opaco, rodeado de un fondo brillantemente [illegible]rado, que es [illegible] caso de las fotografías 1 y 2 de la [illegible] XIII.

1



2

Fototipia de Hauser y Menet.—Madrid

Lámina II.

Fig. 1. *Pachymatisma Johonstonia. Bow.*—Corte por congelación dado en la esponja acabada de pescar; de 10 micras de espesor; montado en glicerina pura y con porta y cubre de cuarzo. Lámpara Nerst-Kohler. Luz azul monocromática. Condensador 1,00 a. n. Objetivo apocromático 4 mm. distancia focal y 0,95 a. n. Ocular compensador núm. 4. Longitud de la cámara 0,50^{m}. Placa marca C. S. Exposición 2′. X. 500.

Fig. 2. La misma preparación anterior examinada con luz ultravioleta del cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Objetivo monocromático 6 mm. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30^{m}. Placa marca C. S. Exposición 12″. X. 500.

Fig. 3. *Rizostoma pulmo.*—Corte por congelación dado en un tentáculo, procedente de un ejemplar conservado en alcohol. Espesor del corte 10 μ. Montado en glicerina y agua; en porta de vidrio U. V. y cubre de cuarzo. Condensador sin frontal á plena apertura. Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 5. Longitud de la cámara 0,24^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 4″. X. 200.

Fig. 4. *Carmarina parfata.*—Un trozo del delgadísimo tegumento que cubre la cara principal del parasol. De un ejemplar conservado en alcohol. Montado en una mezcla de glicerina y agua; en porta de vidrio U. V. y cubre de cuarzo. Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 20″. X. 500.

Fig. 5. *Cydonium gigas. O. Sch.*—Con óvulos. Ejemplar acabado de pescar. Corte por congelación de 10 μ de espesor; montado en glicerina y agua y en porta de vidrio U. V. y cubre de cuarzo.

Fotografía tomada exactamente en las mismas condiciones que la núm. 4. X. 500.

Fig. 6. *Cydonium gigas. O. Sch.*—Con óvulos más desarrollados que en la anterior. Ejemplar acabado de pescar y montado y fotografiado exactamente como en las fotografías 4 y 5. X. 500.

Láminas II.

Fig. 1. *Pachymatisma johnstonia*. Bow.—Corte por congelación dado en la esponja acabada de pescar; de 10 micras de espesor; montado en glicerina pura y con porta y cubre de cuarzo. Lámpara Nernst-Kohler. Luz azul monocromática. Condensador 1,00 a. n. Objetivo apocromático 4 mm. distancia focal y 0,95 a. n. Ocular compensador núm. 4. Longitud de la cámara 0,50^m. Placa marca C. S. Exposición 2'. X. 500.

Fig. 2. La misma preparación anterior examinada con luz ultravioleta del cadmio $\lambda = 0,275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Objetivo monocromático 6 mm. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30^m. Placa marca C. S. Exposición 12''. X. 500.

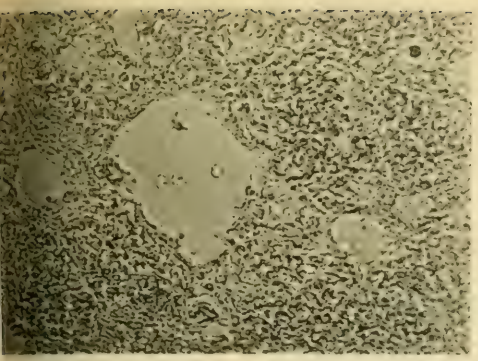
Fig. 3. *Rizostoma pulmo*.—Corte por congelación dado en un tejículo, procedente de un ejemplar conservado en alcohol. Espesor del corte 10 μ. Montado en glicerina y agua; en porta de vidrio U. V. y cubre de cuarzo. Condensador sin frontal á plena apertura. Luz de cadmio $\lambda = 0,275\ \mu$. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 5. Longitud de la cámara 0,24^m. Placa Lumière azul. Exposición 4''. X. 200.

Fig. 4. *Carmarina purpurea*.—Un trozo del delgadísimo tegumento que cubre la cara principal del parasol. De un ejemplar conservado en alcohol. Montado en una mezcla de glicerina y agua; en porta de vidrio U. V. y cubre de cuarzo. Luz de cadmio $\lambda = 0,275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30^m. Placa Lumière azul. Exposición 20''. X. 500.

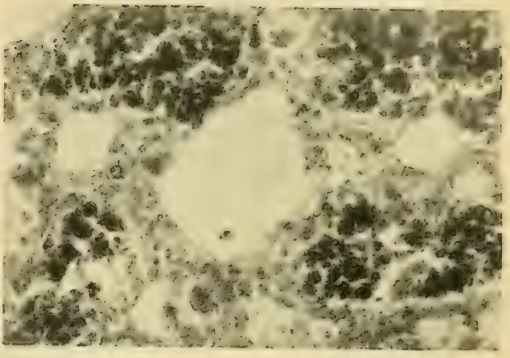
Fig. 5. *Cydonium gigas*. O. Sch.—Con óvulos. Ejemplar acabado de pescar. Corte por congelación de 10 μ de espesor; montado en glicerina y agua y en porta de vidrio U. V. y cubre de cuarzo.

Fotografía tomada exactamente en las mismas condiciones que la núm. 4. X. 500.

Fig. 6. *Cydonium gigas*. O. Sch.—Con óvulos más desarrollados que en la anterior. Ejemplar acabado de pescar y montado y fotografiado exactamente como en las fotografías 4 y 5. X. 500.

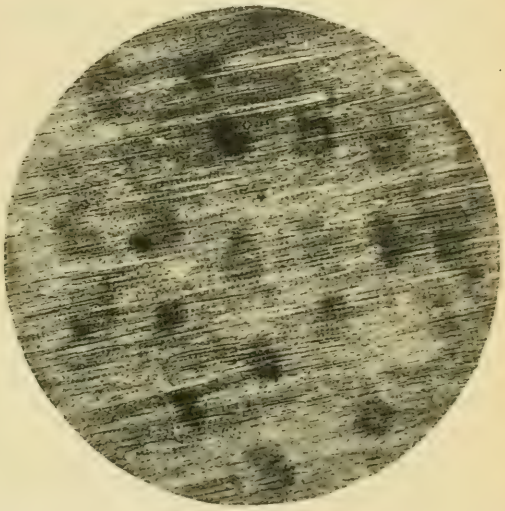


1

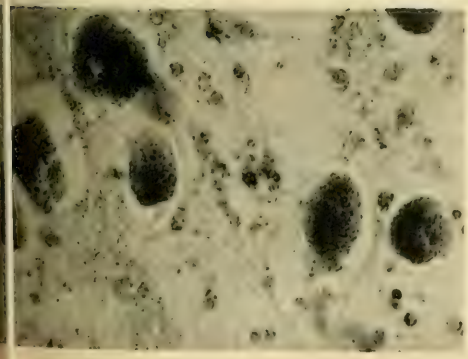


2

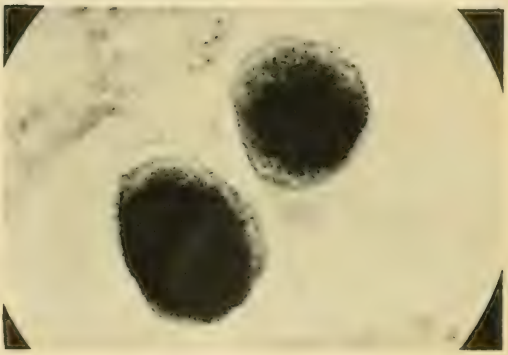
3



4



5



6

Lámina III.

Figs. 1 y 2. *Piel de larva de salamandra.*—Corte tangencial á la piel, de 8 μ de espesor, dado por congelación en un trozo de tejido fresco. Montado en glicerina y agua.

Luz de cadmio μ = 0,275 μ. Condensador sin frontal, con reducción de la apertura á 0,6. Porta-objeto de vidrio U V, y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocronático de 6 mm distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30^{m}. Placa Lumiere azul, Exposición 10″, X. 500.

Figs. 3 á 6. *Cydonium gigas. O.Sch.*—Óvulos en diversos estados de desarrollo. Nótese la mayor transparencia del núcleo respecto al resto del protoplasma. De un corte de la esponja acabada de pescar. Espesor 10 μ. Montado en glicerina y agua.

Las mismas condiciones ópticas que las núm. 1 y 2. X.500.

Fig. 7. *Larva de salamandra.*—Corte longitudinal á lo largo de la cola, mostrando la formación de las vértebras óseas.

Ejemplar conservado en formol 10 %. Corte por congelación de 8 μ de espesor montado en glicerina «Price» pura.

Las mismas condiciones ópticas que las anteriores. X.500.

Figs. 8 y 9. *Piel de larva de rana.*—Disociada sobre el porta objetos y procedente de un trozo de tejido fresco. Montura en glicerina y agua á partes iguales.

Las mismas condiciones ópticas que las anteriores. X.500.

Lámina III.

Figs. 1 y 2. Piel de larva de salamandra.—Corte tangencial á la piel, de 8 μ, de espesor, dado por congelación en un trozo de tejido fresco. Montado en glicerina y agua.

Luz de cadmio $\mu = 0,275\ \mu$. Condensador sin frontal, con reducción de la apertura á 0,6. Porta-objeto de vidrio U V, y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30^{m}. Placa Lumiere azul, Exposición 10^{m}, X. 500.

Figs. 3 á 6. Cyclonium gigas. O.Sch.—Ovulos en diversos estados de desarrollo. Nótese la mayor transparencia del núcleo respecto al resto del protoplasma. De un corte de la esponja acabada de pescar. Espesor 10 μ. Montado en glicerina y agua.

Las mismas condiciones ópticas que las núm. 1 y 2. X.500.

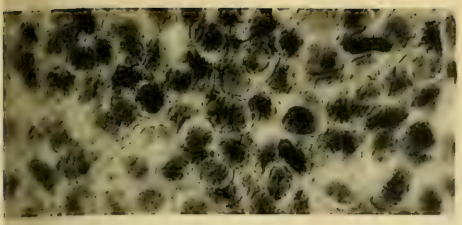
Fig. 7. Larva de salamandra. -- Corte longitudinal á lo largo de la cola, mostrando la formación de las vértebras óseas.

Ejemplar conservado en formol 10 %. Corte por congelación de 8 μ de espesor montado en glicerina «Price» pura.

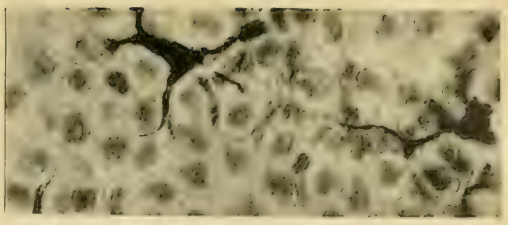
Las mismas condiciones ópticas que las anteriores. X.500.

Figs. 8 y 9. Piel de larva de rana.—Disociada sobre el porta objetos y procedente de un trozo de tejido fresco. Montura en glicerina y agua á partes iguales.

Las mismas condiciones ópticas que las anteriores. X.500.



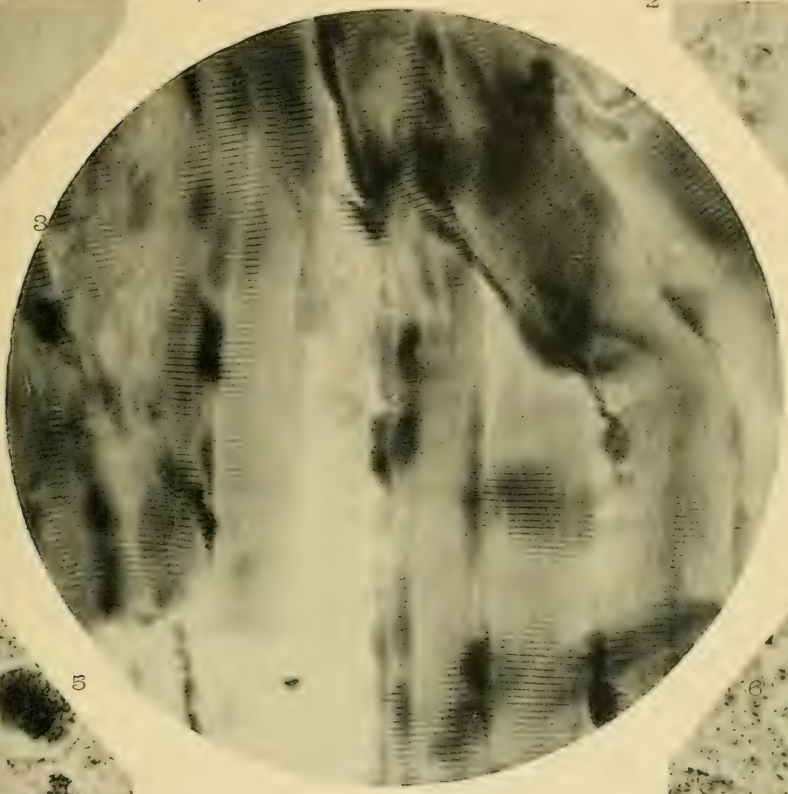
1



2

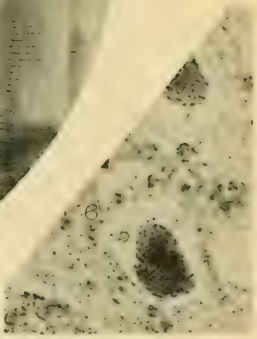
3

4

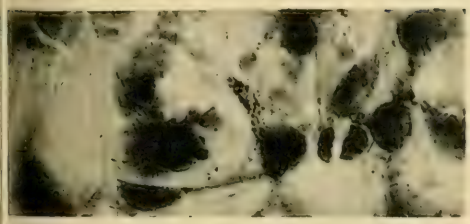


7

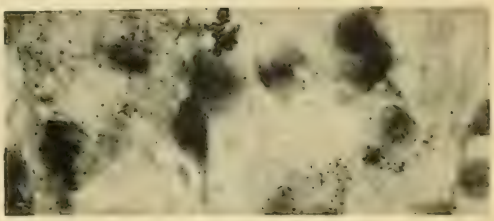
5



6



8



9

Lámina IV.

Fig. 1 *Piel de larva de salamandra.*—Corte tangencial á la piel, un poco más profundo que el de las figs. 1 y 2 de la lámina III, de 8 μ de espesor, y dado por congelación en un trozo de tejido fresco. A pesar del poco aumento, se ven en algunos puntos los estados de división celular. Montado en glicerina pura de 1,26 de densidad.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$ Condensador sin frontal y con la apertura reducida á 0,7. Porta-objeto de vidrio U V y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara, $0{,}30^{m}$. Placa Lumiere azul. Exposición 10″, X.500.

Pig. 2. *Medula humana.*—Trozo disociado de *pia-madre* montado en glicerina y agua.

Las mismas condiciones que las anteriores.

Figs. 3 á 6 y 8 á 9. *Sangre de rana.*—Sin preparación alguna. Una gota de sangre fresca puesta entre el porta y el cubre y examinada en seguida.

Las mismas condiciones ópticas que las anteriores. X. 500.

Fig. 7. *Larva de salamandra.*—Corte transversal de la cola mostrando la formación de las vértebras óseas Ejemplar conservado en formol á 10 °/₀. Corte por congelación de 8 μ de espesor, montado en glicerina «Price» pura.

Las mismas condiciones ópticas que las anteriores X.500.

Lámina IV.

Fig. 1. Piel de larva de salamandra.—Corte tangencial á la piel, un poco más profundo que el de las figs. 1 y 2 de la lámina III, de 8 μ de espesor, y dado por congelación en un trozo de tejido fresco. A pesar del poco aumento, se ven en algunos puntos los estados de división celular. Montado en glicerina pura de 1,26 de densidad.

Luz de cadmio $\lambda = 0,275$ μ. Condensador sin frontal y con la apertura reducida á 0,7. Porta-objeto de vidrio U V y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara, 0,30m. Placa Lumière azul. Exposición 10m, X.500.

Fig. 2. Medula ósea.—Trozo disociado de pie-madre montado en glicerina y agua.

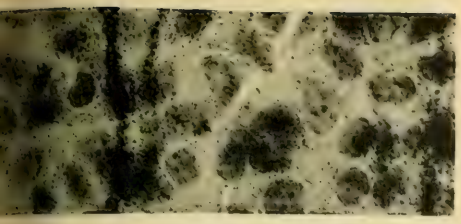
Las mismas condiciones que las anteriores.

Figs. 3 á 6 y 8 á 9. Sangre de rana.—Sin preparación alguna. Una gota de sangre fresca puesta entre el porta y el cubre y examinada en seguida.

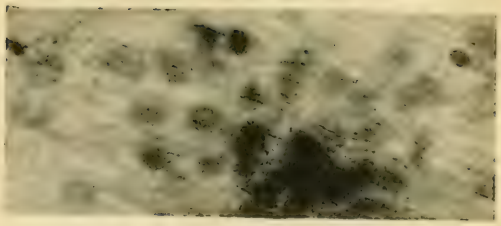
Las mismas condiciones ópticas que las anteriores. X. 500.

Fig. 7. Larva de salamandra.—Corte transversal de la cola mostrando la formación de las vértebras óseas. Ejemplar conservado en formol á 10 %. Corte por congelación de 8 μ de espesor, montado en glicerina «Price» pura.

Las mismas condiciones ópticas que las anteriores X.500.

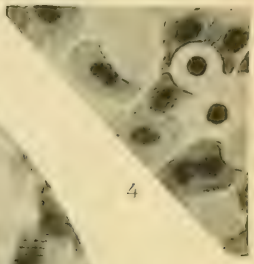


1

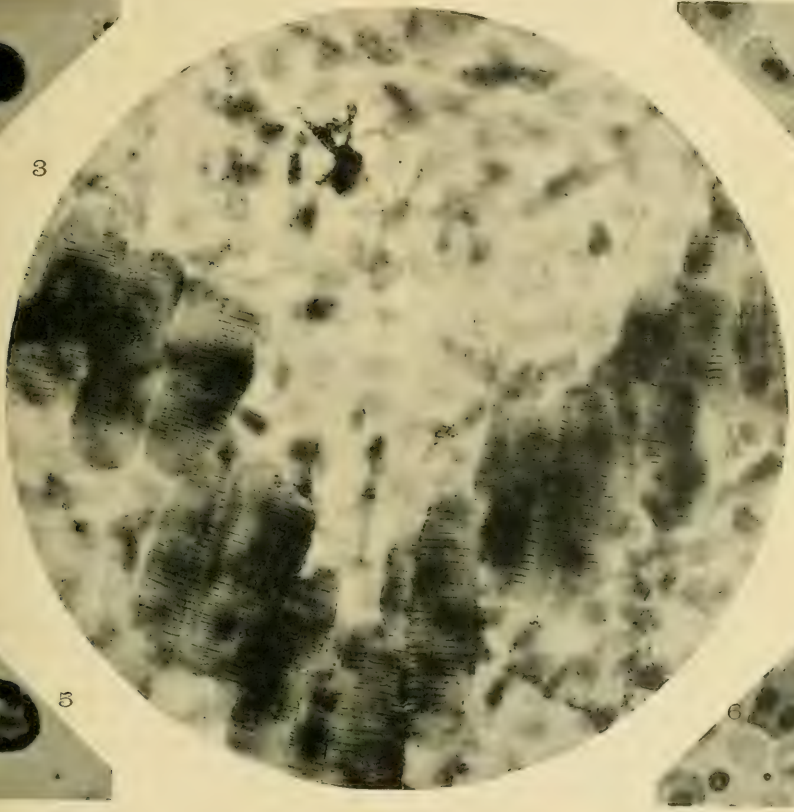


2

3

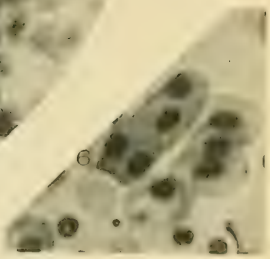


4

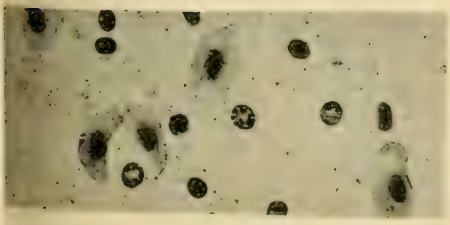


7

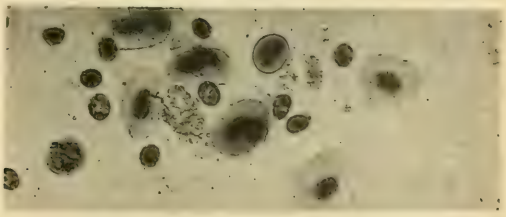
5



6



8



9

Lámina V.

Figs. 1 á 3. *Fibra nerviosa del ciático de la rana.*—Muestran las cisuras de Schmidt ó Lanterman y estrangulaciones de Ranvier. Tejido fresco, Cortes por congelación de 8 á 10 μ de espesor, disociados después por compresión débil, entre el porta y el cubre. Montado en glicerina y agua (3 de glicerina y 1 de agua.)

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$.- Condensador con una frontal y con la apertura reducida á 9,7. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 14. Longitud de la cámara $0{,}30^{m}$. Placa Lumiere azul. Exposión 40″. X. 1.600.

Fig. 4. *Fibras nerviosas del ciático de la rana.*—Disociación sobre el porta-objeto. (Esta fotografía forma parte de una serie que reproducen ensayos hechos por el Dr. Simarro.)

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal con la apertura reducida á 0,6. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara $0{,}30^{m}$. Exposición 15″ Placa Lumiere azul. X. 500.

Lámina V.

Figs. 1 á 3. Fibras nerviosas del cilíndro de la rana.—Muestran las cisuras de Schmidt ó Lantermann y estrangulaciones de Ranvier. Tejido fresco, Cortes por congelación de 8 á 10μ de espesor, disociados después por compresión débil, entre el porta y el cubre. Montado en glicerina y agua (3 de glicerina y 1 de agua.)

Luz de cadmio $\lambda = 0,275\ \mu$. Condensador con una frontal y con la apertura reducida á 9,7. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 14. Longitud de la cámara 0,30 m. Placa Lumiere azul. Exposición 40''. X. 1.600.

Fig. 4. Fibras nerviosas del cilíndro de la rana.—Disociación sobre el porta-objeto. (Esta fotografía forma parte de una serie que reproducen ensayos hechos por el Dr. Simarro.)

Luz de cadmio $\lambda = 0,275\ \mu$. Condensador sin frontal con la apertura reducida á 0,6. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30m. Exposición 15'' Placa Lumiere azul. X. 500.

1

2

3

4

Lámina VI.

Fig. 1. *Medula de cordero.*—Corte de congelación de 8 μ de espesor montado en glicerina «Price» pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal, con la apertura reducida á 0,7. Porta-objeto de vidrio U. V. Cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30 ^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 25 ″. X. 500

Fig. 2. *Medula humana.*—Corte por congelación de 8 μ de espesor, dado en un trozo conservado en formol al 10 °/₀. Montado en glicerina y agua. (2 de glicerina y 1 de agua.)

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 20. Placa Lumiere azul. Exposición 40″. X.1.000.

Fig. 3. *Ciático de rana.* – Corte por congelación de 10 μ de espesor, dado en un trozo de músculo ciático, endurecido una semana en formol al 10 °/₀. Montado en glicerina «Prlce» pura.

Las mismas condiciones ópticas que la fotografía núm. 1. X.500. Exposición 12 ″

Lámina VI.

Fig. 1. Médula de cordero.—Corte de congelación de 8 μ de espesor montado en glicerina «Price» pura.

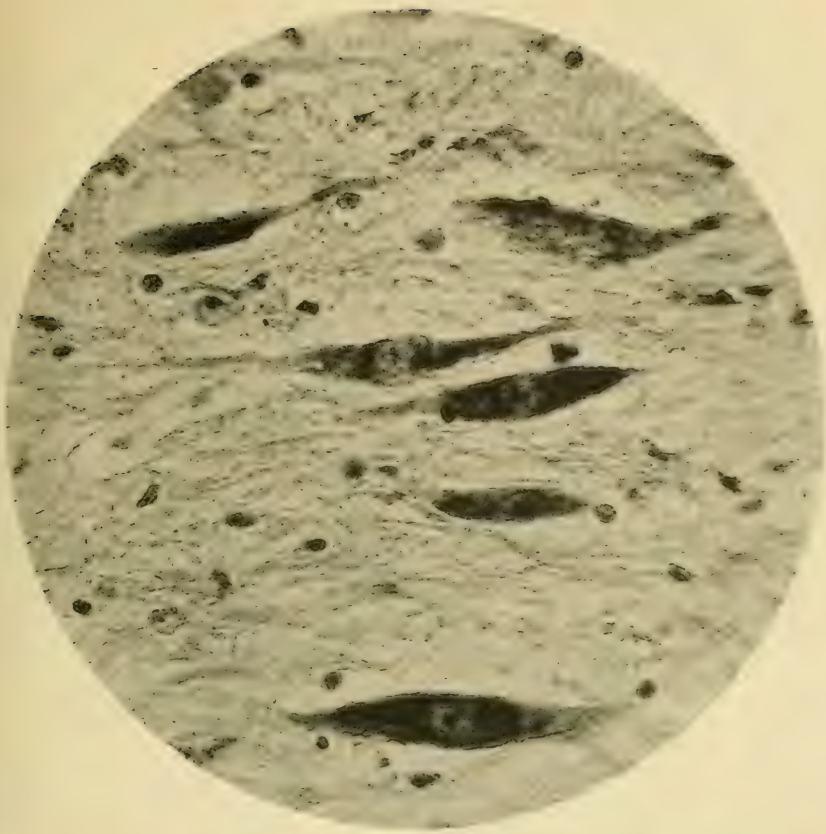
Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal, con la apertura reducida á 0,7. Porta-objeto de vidrio U. V. Cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30 m. Placa Lumiere azul. Exposición 25 ''. X. 500

Fig. 2. Médula humana.—Corte por congelación de 8 μ de espesor, dado en un trozo conservado en formol al 10 °/₀. Montado en glicerina y agua. (2 de glicerina y 1 de agua.)

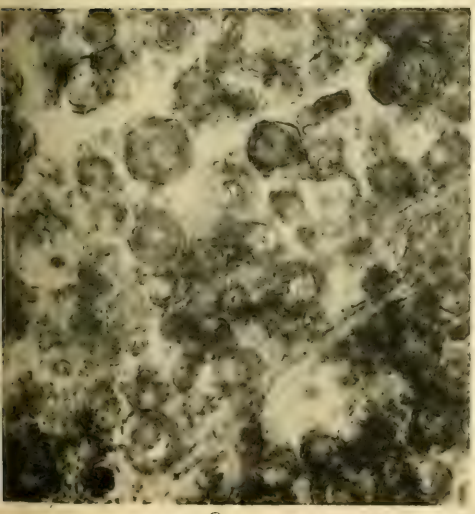
Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 20. Placa Lumiere azul. Exposición 40 ''. X.1.000.

Fig. 3. Cíclico de rana. — Corte por congelación de 10 μ de espesor, dado en un trozo de músculo cíclico, endurecido una semana en formol al 10 °/₀. Montado en glicerina «Price» pura.

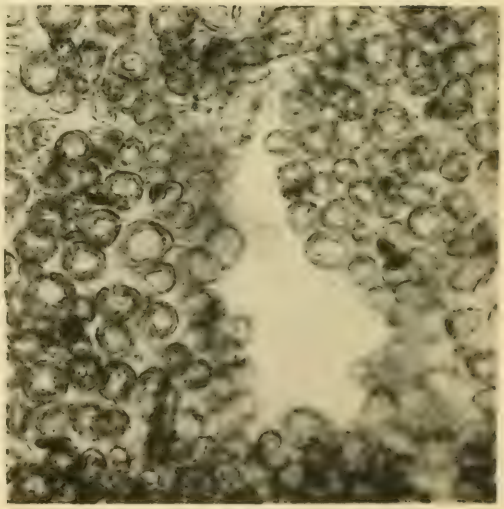
Las mismas condiciones ópticas que la fotografía núm. 1. X.500 Exposición 12 ''



1



2



3

Lámina VII.

Fig. I. *Medula de cordero*.—Un trozo de película externa; separado con pinzas del tejido fresco; montado en glicerina pura de 1,26 de densidad, y ligeramente aplastado entre porta y cubre.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal con la apertura reducida á 0,8. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo. núm. 10. Longitud de la cámara 0,30 ^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 6$''$. X. 500.

Fig. II. *Medula humana*.—Trozo en formol á 10 $^{0}/_{0}$ durante una semana; deshidratado con alcoholes y esencias; incluído en parafina: cortado á 10 μ de espesor; hidratado de nuevo y montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Compárese el aspecto con el de la figura 2 de la lámina VI.

Las mismas condiciones ópticas que la fotografía núm. 1 V.500.

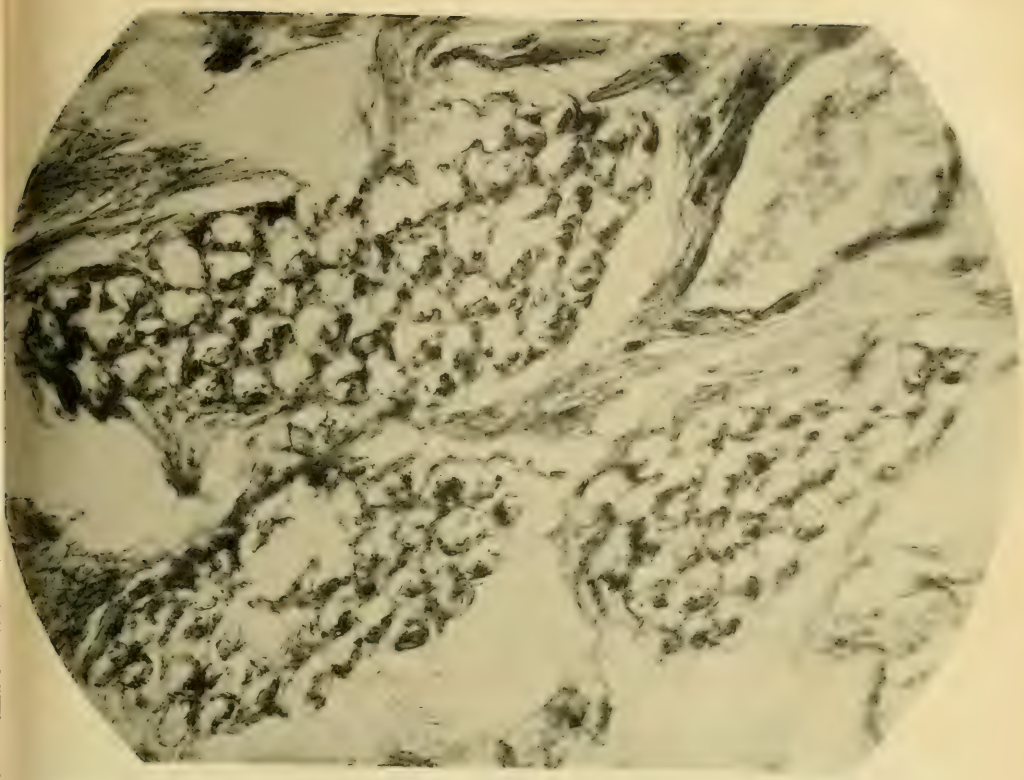
Lámina VII.

Fig. I. Médula de cordero.—Un trozo de película externa; separado con pinzas del tejido fresco; montado en glicerina pura de 1,26 de densidad, y ligeramente aplastado entre porta y cubre.

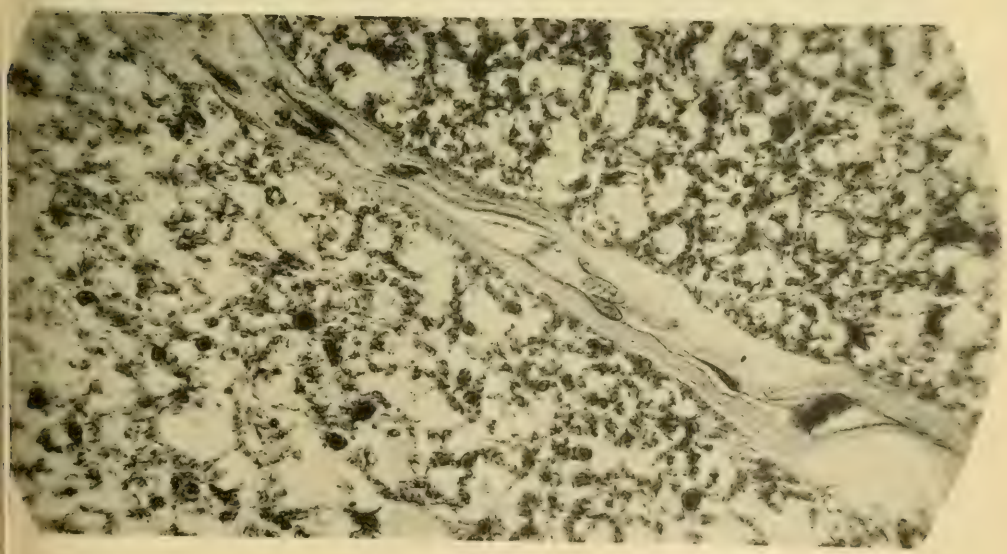
Luz de cadmio $\lambda = 0,275\ \mu$. Condensador sin frontal con la apertura reducida á 0,8. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo. núm. 10. Longitud de la cámara 0,30 m. Placa Lumiere azul. Exposición 6m. X. 500.

Fig. II. Médula humana.—Trozo en formol á 10 % durante una semana; deshidratado con alcoholes y esencias; incluido en parafina, cortado á 10 μ de espesor; hidratado de nuevo y montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Compárese el aspecto con el de la figura 2 de la lámina VI.

Las mismas condiciones ópticas que la fotografía núm. 1 V.500.



1



2

Lámina VIII.

Figs. 1 y 2. *Células nerviosas de la medula de vaca.*—Dilatación lumbar. Disociadas con agujas sobre porta-objeto. Montadas en glicerina pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal con la apertura reducida á 0,7. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. distancia frontal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara 0,30^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 20″. X. 500.

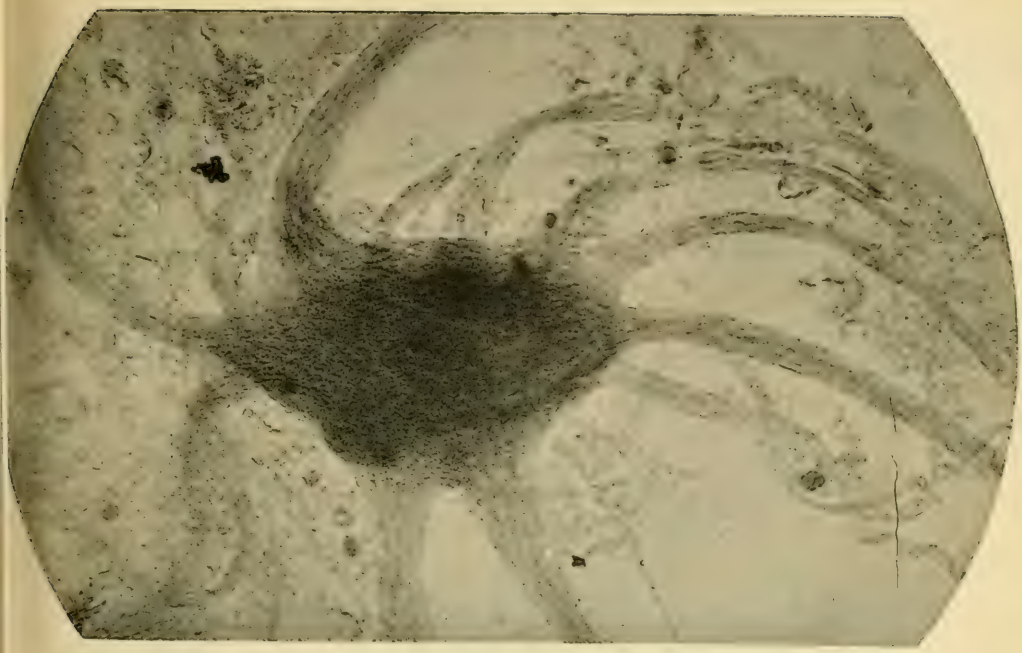
En la fig. 1, y á la derecha del núcleo, se ve el fenómeno óptico de reflexión que á primera vista parece un atributo de la célula. En la fig. 2 este mismo reflejo aparece casi en el centro de la célula, tapando al núcleo. En ambas fotografías, como en todas en que aparece este fenómeno, el reflejo ocupa exactamente el centro del campo visual.

Lámina VIII.

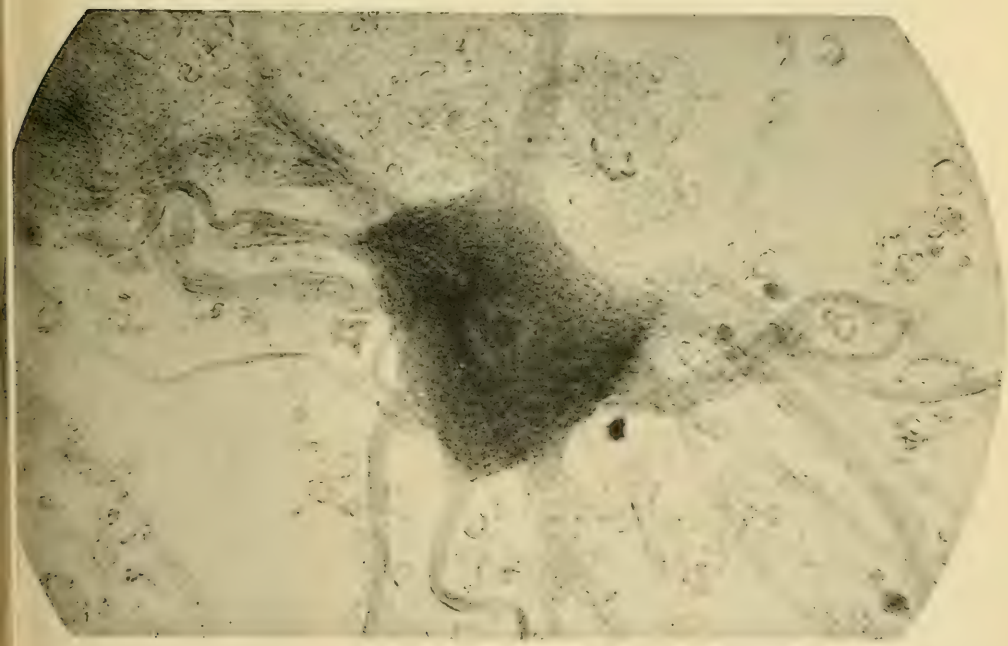
Figs. 1 y 2. Células nerviosas de la médula de vaca.—Dilatación lumbar. Disociadas con agujas sobre porta-objeto. Montadas en glicerina pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal con la apertura reducida á 0,7. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. distancia frontal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara 0,30^{m}. Placa Lumière azul. Exposición 20^{m}. X. 500.

En la fig. 1, y á la derecha del núcleo, se ve el fenómeno óptico de reflexión que á primera vista parece un atributo de la célula. En la fig. 2 este mismo reflejo aparece casi en el centro de la célula, tapando al núcleo. En ambas fotografías, como en todas en que aparece este fenómeno, el reflejo ocupa exactamente el centro del campo visual.



1



2

Lámina IX.

Figs. 1, 2 y 3. *Células de Betz.*—Corteza cerebral humana; circunvolución central anterior. Corte de 8 μ de espesor, dado por congelación en un trozo conservado en formol al 10 %, montado en glicerina, en porta de vidrio U. V. y en cubre de cuarzo. Lámpara Nerst-Kohler. Luz azul monocromática. Condensador acromático Abbe 1,00 a. n. con diafragma á 8 mm. diámetro. Objetivo apocromático 4 mm. distancia focal. Ocular núm. 4, compensador. Longitud de cámara 0,50^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 3'. X. 500.

Fig. 4. *Célula de Betz.*—Corteza cerebral humana Hemisferio derecho. Cara anterior del surco de Rolando. Trozo conservado en formol 10 %. Corte por congelación de 6 μ de espesor, montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Porta de vidrio U. V. y cubre de cuarzo. Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal y á plena apertura. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,315^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 90''. X. 1.200.

Figs. 5, 6 y 7. *Células de Betz.*—De la mima preparación que las núm. 1, 2 y 3, pero fotografiadas con luz ultra-violeta para mostrar la distinta diferenciación entre esta última y la luz visible.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condesador sin frontal y con la apertura reducida á 7. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 30''. X. 500.

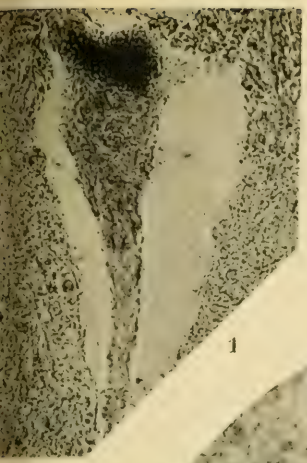
Lámina IX.

Figs. 1, 2 y 3. Células de Betz.—Corteza cerebral humana; circunvolución central anterior. Corte de 8 μ de espesor, dado por congelación en un trozo conservado en formol al 10 %, montado en glicerina, en porta de vidrio U. V. y en cubre de cuarzo. Lámpara Nernst-Kohler. Luz azul monocromática. Condensador acromático Abbe 1,00 a. n. con diafragma á 8 mm. diámetro. Objetivo apocromático 4 mm. distancia focal. Ocular núm. 4, compensador. Longitud de cámara 0,30 m. Placa Lumiere azul. Exposición 3'. X. 500.

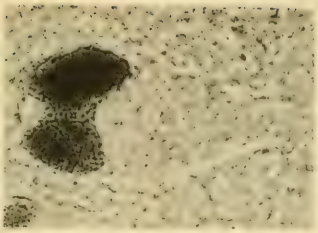
Fig. 4. Célula de Betz.—Corteza cerebral humana Hemisferio derecho. Cara anterior del surco de Rolando. Trozo conservado en formol 10 %. Corte por congelación de 6 μ de espesor, montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Porta de vidrio U V. y cubre de cuarzo. Luz de cadmio λ = 0,275 μ. Condensador sin frontal y á pleina apertura. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,315 m. Placa Lumiere azul. Exposición 90''. X. 1.200.

Figs. 5, 6 y 7. Células de Betz.—De la misma preparación que las núm. 1, 2 y 3, pero fotografiadas con luz ultra-violeta para mostrar la distinta diferenciación entre esta última y la luz visible.

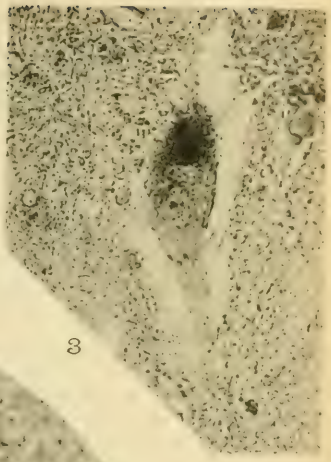
Luz de cadmio λ = 0,275 μ. Condensador sin frontal y con la apertura reducida á 7. Objetivo monocromático 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,30 m. Placa Lumiere azul. Exposición 30''. X. 500.



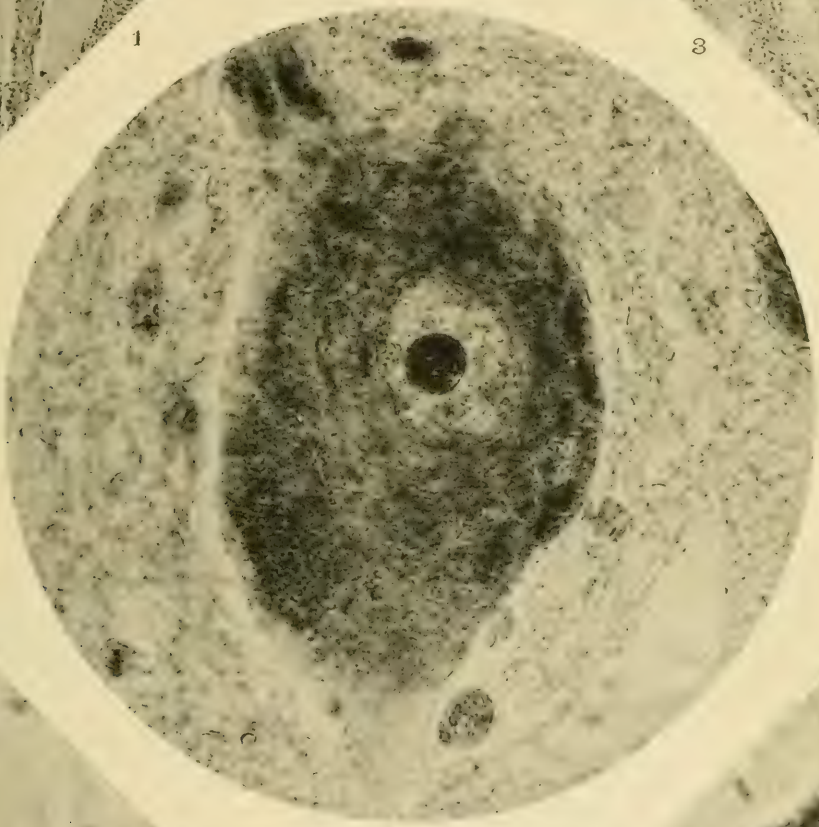
1



2

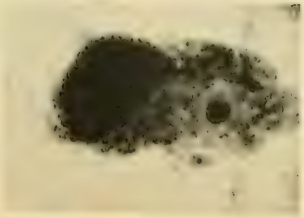


3



4

5



6

7

Lámina X.

Figs. 1 y 2. *Células de Betz.*—Corteza cerebral humana. Hemisferio derecho. Circunvolución central anterior. Cerebro entero conservado en formal 10 % durante seis meses. Mujer de 60 años. Corte por congelación, de 6 μ de espesor, montado en glicerina «Price» pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara $0{,}315^{m}$. Placa Lumiere azul. Exposición 3'. X. 1.200.

Figs. 3 y 4. *Medula humana.*—Sección transversa de algunas arteriolas. De un trozo endurecido durante 10 días en formol al 16 %. Corte por congelación, de 6 μ de espesor, montado en glicerina pura de 1,26 de densidad.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal con la apertura reducida á 0,6. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara $0{,}30^{m}$. Placa Lumiere azul. Exposición 7". X. 500.

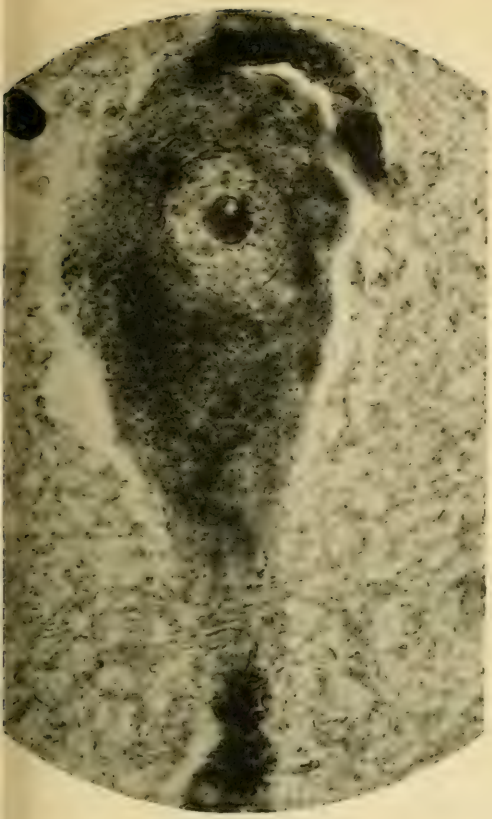
Lámina X.

Figs. 1 y 2. Células de Betz.—Corteza cerebral humana. Hemisferio derecho. Circunvolución central anterior. Cerebro entero conservado en formol 10 % durante seis meses. Mujer de 60 años. Corte por congelación, de 6 μ, de espesor, montado en glicerina «Pureza».

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena abertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara 0,315m. Placa Lumière azul. Exposición 3', X. 1.200.

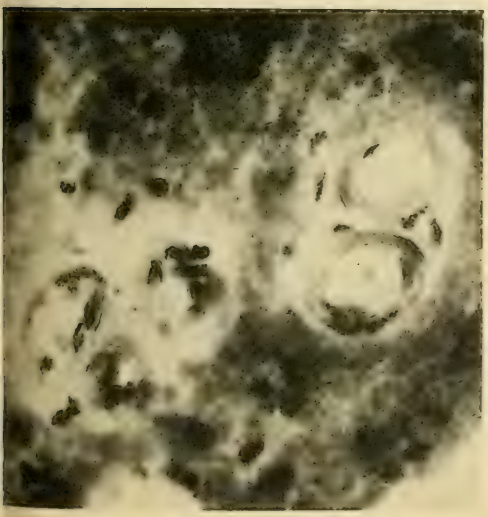
Figs. 3 y 4. Médula humana.—Sección transversa de algunas arteriolas. De un trozo endurecido durante 10 días en formol al 10 %. Corte por congelación, de 6 μ de espesor, montado en glicerina pura de 1,26 de densidad.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal con la abertura reducida á 0,6. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 6 mm. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara 0,30m. Placa Lumière azul. Exposición 7". X. 500.



1

2



3

4

Fig. 1 y 2
sesen-
t-

Lámina XI.

2. *Células de Betz.* — Corteza cerebral humana. Varón ..a y cinco años. Hemisferio derecho. Circumvolucion central an-.erior. De un cerebro entero conservado en formol á 10 % durante cuatro meses. Corte por congelación de 4 á 5 μ de espesor, montado en glicerina «Price» pura.

El foco de la fotografía núm 1 está exactamente sobre la membrana del núcleo y el de la núm. 2 sobre el borde derecho de la célula.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo número 10. Longitud de cámara $0{,}315^{m}$. Placa Lumiere azul. Exposición 80″. X. I. 200.

Fig. 3. *Célula de Purkinje* — Cerebelo humano conservado en formol al 10 % durante cuatro meses. Varón de sesenta y cinco años. Corte por congelación de 4 á 5 μ de espesor montado en glicerina «Price» pura.

La fotografía está enfocada exactamente sobre el borde de la célula.

Las mismas condiciones ópticas que las dos anteriores. X. I. 200.

Fig. 4. *Pirámide mediana.* — Corteza cerebral humana. De la misma preparación que las núm. 1 y 2 y exactamente con las mismas condiciones ópticas. X. I. 200.

El foco está exactamente sobre el borde de la membrana del núcleo.

Lámina XI.

Fig. 1 y 2. Células de Betz. — Corteza cerebral humana. Varón sesenta y cinco años. Hemisferio derecho. Circumvolución central anterior. De un cerebro entero conservado en formol á 10 % durante cuatro meses. Corte por congelación de 4 á 5 μ de espesor, montado en glicerina «Price» pura.

El foco de la fotografía núm. 1 está exactamente sobre la membrana del núcleo y el de la núm. 2 sobre el borde derecho de la célula.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo número 10. Longitud de cámara 0,315m. Placa Lumiere azul. Exposición 80". X. 1. 200.

Fig. 3. Célula de Purkinje — Cerebelo humano conservado en formol al 10 % durante cuatro meses. Varón de sesenta y cinco años. Corte por congelación de 4 á 5 μ de espesor montado en glicerina «Price» pura.

La fotografía está enfocada exactamente sobre el borde de la célula

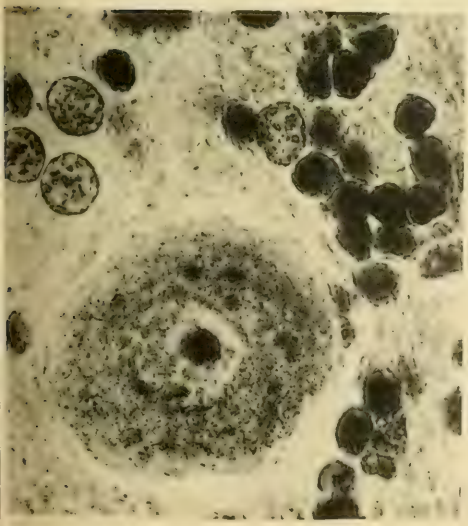
Las mismas condiciones ópticas que las dos anteriores. X. 1. 200.

Fig. 4. Piramide mediana. — Corteza cerebral humana. De la misma preparación que las núm. 1 y 2 y exactamente con las mismas condiciones ópticas. X. 1. 200.

El foco está exactamente sobre el borde de la membrana del núcleo.

1

2



3

4

Lámina XII.

Fig. 1. *Masa de pigmento de una célula de Betz.*—Corteza cerebral humana. Hemisferio derecho. Pared anterior del surco de Rolando. Varón de sesenta y cinco años. Cerebro conservado en formol al 10 % durante cuatro meses. Corte por congelación, de 6 μ de espesor, montado en glicerina «Price» pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador con frontal simple y con la apertura reducida á 6,6 Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 14. Longitud de cámara 0,30^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 80″. X. 2.000.

Fig. 2. *Núcleo de una célula de Betz.* - De la misma preparación y con las mismas condiciones ópticas que la núm. 1. X. 2.000.

Fig. 3. *Célula de Purkinje.*—Cerebelo humano, conservado cuatro meses en formol 10 %. Varón sesenta y cinco años. Corte por congelación de 4 á 5 μ de espesor montado en glicerina de 1,26 de densidad. Enfocada exactamente sobre el borde derecho de la célula.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador con frontal simple y apertura reducida á 0,8 Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 2,5 mm. distancia focal y ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara 0,315^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 3′. X. 1.200.

Fig. 4. *Vaso de la medula humana.*—Trozo endurecido en formol al 10 % durante doce días. Corte por congelación de 6 μ de espesor montado en glicerina pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal y ocular de cuarzo número 10. Longitud de cámara 0,30^{m}. Placa Lumiere azul. Exposición 8″. X. 500.

Lámina XII.

Fig. 1. Masa de pigmento de una célula de Betz.—Corteza cerebral humana. Hemisferio derecho. Pared anterior del surco de Rolando. Varón de sesenta y cinco años. Cerebro conservado en formol al 10 % durante cuatro meses. Corte por congelación, de 6 μ de espesor, montado en glicerina «Price» pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275$ μ. Condensador con frontal simple y con la apertura reducida á 0,6 Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 14. Longitud de cámara 0,30 m. Placa Lumiere azul. Exposición 80 m. X. 2.000.

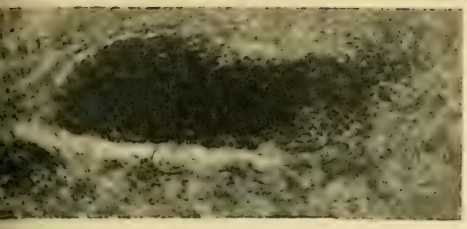
Fig. 2. Núcleo de una célula de Betz. – De la misma preparación y con las mismas condiciones ópticas que la núm. 1. X. 2.000.

Fig. 3. Célula de Purkinje.—Cerebelo humano, conservado cuatro meses en formol 10 %. Varón sesenta y cinco años. Corte por congelación de 4 á 5 μ de espesor montado en glicerina de 1,26 de densidad. Enfocada exactamente sobre el borde derecho de la célula.

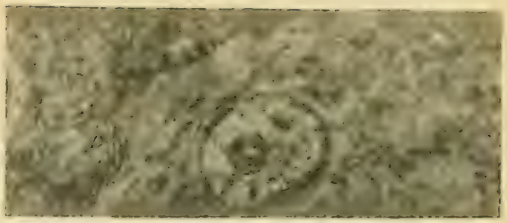
Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275$ μ. Condensador con frontal simple y apertura reducida á 0,8 Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre objeto de cuarzo. Objetivo monocromático 2,5 mm. distancia focal y ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de cámara 0,315 m. Placa Lumiere azul. Exposición 3 m. X. 1.200.

Fig. 4. Vaso de la médula humana.—Tronco cubrecido en formol al 10 % durante doce días. Corte por congelación de 6 μ de espesor montado en glicerina pura.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275$ μ. Condensador sin frontal á plena apertura. Porta-objeto de vidrio U. V. y cubre-objeto de cuarzo. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal y ocular de cuarzo número 10. Longitud de cámara 0,30 m. Placa Lumiere azul. Exposición 8 m. X. 500.

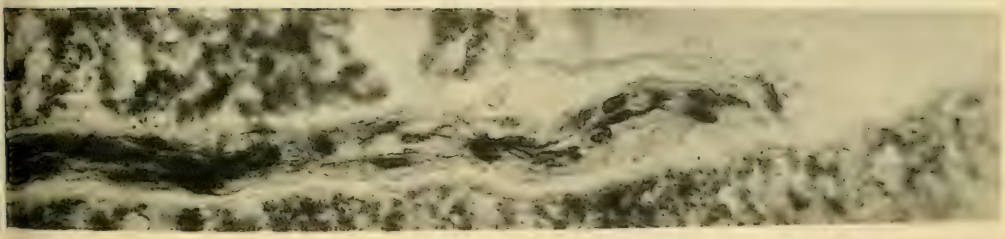


1



2

3



4

Lámina XIII.

Fig. 1. *Célula de Betz.* — Corteza cerebral humana. Hemisferio derecho. Pared anterior del surco de Rolando. Corte por congelación de 10 μ de espesor montado en glicerina pura. La célula se ha separado del tejido por medio de ligeras sacudidas sobre el cubre. Obtenido el corte de un trozo de cerebro conservado al formol 10 % se ha sometido dicho corte á la acción de una disolución de azul de metileno al 0,5 por mil y durante cinco minutos.

Luz de cadmio $\lambda = 0{,}275\,\mu$. Condensador sin frontal á plena apertura y ligeramente desenfocado. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,315. Placa Lumiere azul. Exposición 3'. X. I. 200.

Fig. 2. La misma célula de la fotografía anterior, pero con una ligera variación en el foco de condensador y objetivo para hacer aparecer el fenómeno óptico de reflejo que se ve inmediatamente debajo del nucleolo. El mismo resultado se obtiene poniendo el condensador exactamente en foco sobre el objeto, y dejando sin alterar el foco del objetivo.

Fig. 3. *Corteza cerebral humana.* — Circunvolución central anterior. Hemisferio izquierdo. Corte por congelación de 6 μ de espesor, dado en un trozo conservado en formol al 10 % y sometido (el corte) á la siguiente técnica (modificación del método de Achucarro).

15 minutos en:		Agua destilada.....	10 c. c.
		Disolución saturada en frío .... de tanino.....	20 gotas:
5	íd.	íd. Agua destilada	10 c. c.
		Nitrato de plata amoniacal.	12 gotas.
10	íd.	íd. Formol 10 %	

Un ligero lavado en agua destilada pura entre líquido y líquido. Montado en glicerina pura de 1,26 de densidad.

Fotografía obtenida exactamente con las mismas condiciones ópticas que las núms. 1 y 2. X. I. 200.

Fig. 4. El mismo método y la misma preparación que la anterior. Células piramidales pequeñas. X. I. 200.

Lámina XIII.

Fig. 1. Célula de Betz. — Corteza cerebral humana. Hemisferio derecho. Pared anterior del surco de Rolando. Corte por congelación de 10 μ de espesor montado en glicerina pura. La célula se ha separado del tejido por medio de ligeras sacudidas sobre el cubre. Obtenido el corte de un trozo de cerebro conservado al formol 10 % se ha sometido dicho corte á la acción de una disolución de azul de metileno al 0,5 por mil y durante cinco minutos.

Luz de cadmio λ = 0,275 μ. Condensador sin frontal á plena apertura y ligeramente descentrado. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuatro núm. 10. Longitud de la cámara 0,315. Placa Lumiere azul. Exposición 3'. X. I. 200.

Fig. 2. La misma célula de la fotografía anterior, pero con una ligera variación en el foco de condensador y objetivo para hacer aparecer el fenómeno óptico de reflejo que se ve inmediatamente debajo del nucleolo. El mismo resultado se obtiene poniendo el condensador exactamente en foco sobre el objeto, y dejando sin alterar el foco del objetivo.

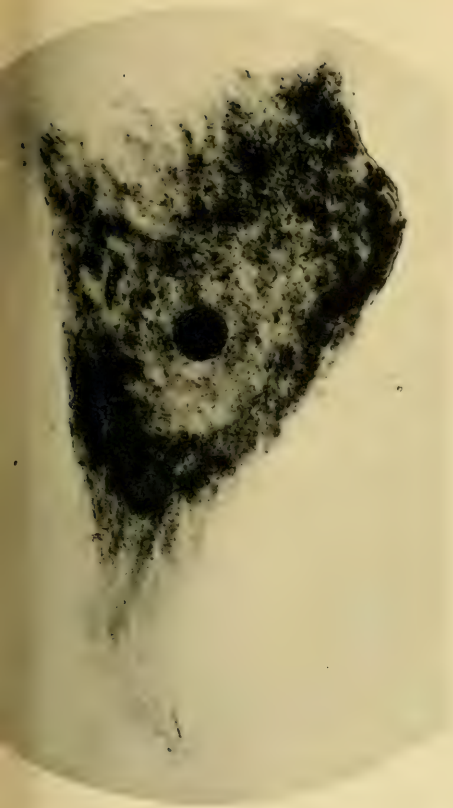
Fig. 3. Corteza cerebral humana. — Circunvolución central anterior. Hemisferio izquierdo. Corte por congelación de 6 μ de espesor, dado en un trozo conservado en formol al 10 % y sometido (el corte) á la siguiente técnica (modificación del método de Achucarro).

15 minutos en:	Agua destilada.....	10 c. c.	
	Disolución saturada en frío		
	de tanino.....	20 gotas:	
5 id.	id. Agua destilada	10 c. c.	
	Nitrato de plata amoniacal.	12 gotas.	
10 id.	id. Formol 10 %		

Un ligero lavado en agua destilada pura entre líquido y líquido. Montado en glicerina pura de 1,26 de densidad.

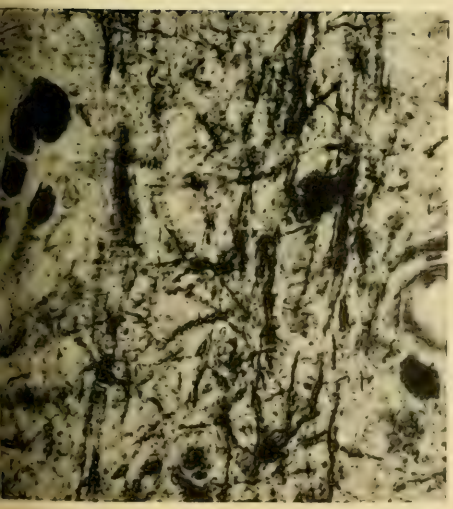
Fotografía obtenida exactamente con las mismas condiciones ópticas que las núms. 1 y 2. X. I. 200.

Fig. 4. El mismo método y la misma preparación que la anterior. Células piramidales pequeñas. X. I. 200.

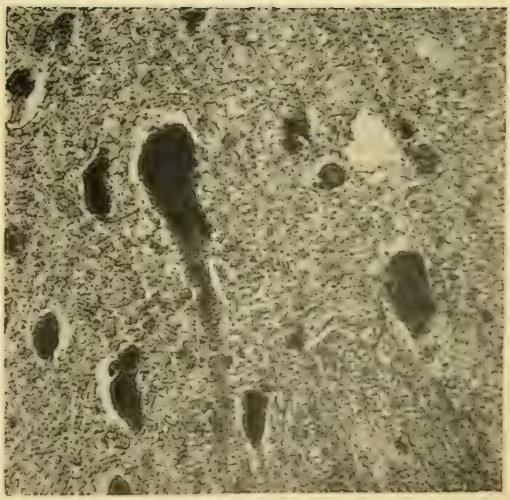


1

2



3



4

Lámina XIV.

Fig. 1 y 2. *Células de Betz.*—Corteza cerebral humana. Hemisferio izquierdo. Circunvolución central anterior. Mujer de sesenta años. De un trozo reciente, conservado en formol á 10 %. Corte por congelación de 5 μ de espesor montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Porta de vidrio U. V. Cubre de cuarzo. Luz de cadmío $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Condensador sin frontal á plena apertura. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara $0{,}315^{m}$. Placa Lumiere azul. Exposición 3'. X. I. 200

Fig. 3 y 4. *Células de Betz.*—Corteza cerebral humana. Hemisferio izquierdo. Circunvolución central anterior. Mujer de sesenta años. Trozo reciente, en formol á 10 %. Corte por congelacióu de 5 μ de espesor, montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Porta de vidrio U. V. Cubre de cuarzo. Luz de cadmio de $\lambda = 0{,}275\ \mu$. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo número 10. Longitud de cámara $0{,}30^{m}$. Exposición 30''. Placa Lumiere azul. X. 500.

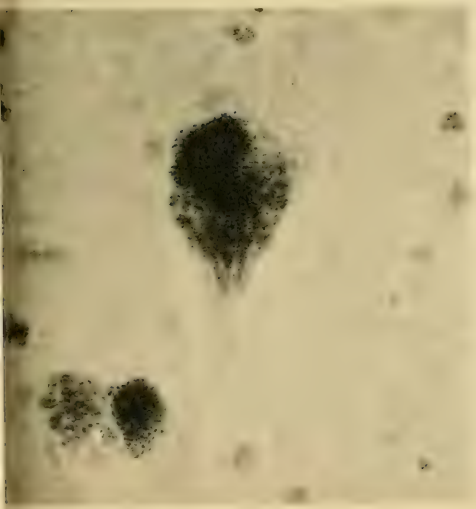
Lamina XIV.

Fig. 1 y 2. Células de Betz. — Corteza cerebral humana. Hemisferio izquierdo. Circunvolución central anterior. Mujer de sesenta años. De un trozo reciente, conservado en formol á 10 %. Corte por congelación de 5 μ, de esposor montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Porta de vidrio U. V. Cubre de cuarzo. Luz de cadmio λ=0,275 μ. Condensador sin frontal á plena apertura. Objetivo monocromático de 2,5 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo núm. 10. Longitud de la cámara 0,315 m. Placa Lumiere azul. Exposición 3'. X. 1. 200.

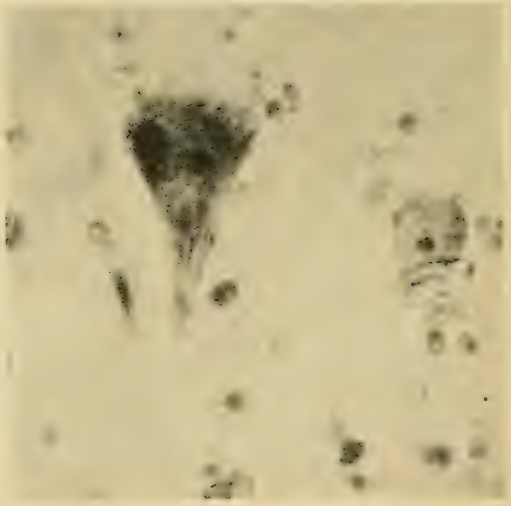
Fig. 3 y 4. Células de Betz.—Corteza cerebral humana. Hemisferio izquierdo. Circunvolución central anterior. Mujer de sesenta años. Trozo reciente, en formol á 10 %. Corte por congelación de 5 μ de esposor, montado en glicerina pura de 1,26 de densidad. Porta de vidrio U. V. Cubre de cuarzo. Luz de cadmio de λ = 0,275 μ. Objetivo monocromático de 6 mm. distancia focal. Ocular de cuarzo número 10. Longitud de cámara 0,30 m. Exposición 30''. Placa Lumiere azul. X. 500.

1

2



3



4

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Págs.

XXXIV.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia novena..... 725

XXXV.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia décima..... 748

XXXVI.—Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkoswki (continuación), por *B. Cabrera*..... 775

XXXVII.—Geometría analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades (continuación), por *Modesto Domínguez Hervella*..... 785

XXXVIII.—La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopía, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912 (conclusión), por *Domingo de Orueta*..... 804

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NUMERO 11.
MAYO DE 1913.

Smithsonian Institution
FEB 7 1928
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1913

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXIX. — Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia undécima.

SEÑORES:

Anunciamos, al terminar la conferencia precedente, que íbamos á explicar y á demostrar en la de hoy la llamada *identidad* de Poisson.

Se trata de un nuevo símbolo que es una combinación de otros símbolos que ya conocemos, los *paréntesis* de Poisson.

El paréntesis de Poisson, se refiere, como vimos en la anterior conferencia, á dos funciones cualesquiera φ y ψ, que ambas son funciones de las variables

$$q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k.$$

Pueden contener, además, otra variable, t, que en los problemas á que vamos á aplicar esta teoría, representa el tiempo.

Mas, por ahora, de esta variable prescindimos. Podrá entrar en φ y en ψ, pero la consideraremos como si fuera una constante.

Así en el organismo, por decirlo asi, de operaciones que constituyen estos símbolos, prescindimos por el momento de la variable t, ateniéndonos tan solo á las p y á las q.

El paréntesis de Poisson sólo comprende, como acabamos de indicar, dos funciones φ y ψ.

FEB 11

Y el nuevo símbolo, que es una *complicación de paréntesis*, se refiere á tres funciones siempre de las q y de las p.

El nuevo símbolo de que tratamos es éste

$$(f, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) = 0$$

que vamos á demostrar que, en efecto, es idénticamente igual á cero.

Expliquemos cada uno de sus términos.

Consideremos el primero

$$(f, (\varphi, \psi)).$$

En rigor, este no es un nuevo símbolo, porque el paréntesis interior (φ, ψ) ya sabemos lo que significa: lo hemos explicado con toda minuciosidad.

Es la expresión

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right) + \ldots\ldots + \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right). \qquad (1)$$

Y esta expresión, efectuando las derivaciones que se indican en ella con relación á las p y á las q, lo cual es fácil, puesto que las funciones φ y ψ son funciones conocidas de las p y de las q; esta expresión, repetimos, efectuando en ellas las operaciones indicadas, no es otra cosa que una función de las variables p y q, de forma perfectamente determinada. Así que, si la representamos, para abreviar, por f_1, podremos escribir

$$(\varphi, \psi) = f_1 (q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t);$$

y ponemos entre las variables la t, porque en los problemas de Mecánica, á que hemos de aplicar esta teoría, hay que

tener en cuenta, dentro del símbolo, esta variable, aunque por el momento, como hemos dicho, no hemos de utilizarla.

Con esto el símbolo total, que es la superposición de dos paréntesis, toma una forma ya conocida, pues poniendo en $(f, [\varphi, \psi])$ en vez del paréntesis interior (φ, ψ) la función f_1 que representa, tendremos

$$(f, (\varphi, \psi)) = (f, f_1).$$

Pero el paréntesis de las (f) se desarrolla lo mismo que el paréntesis interior de este modo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial f_1}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\right) + \ldots\ldots$$

que sustituyendo en vez de f y f_1 sus valores, resulta una expresión de las p, las q y en todo caso de t.

La misma explicación que hemos dado para el primer término de la identidad, podríamos dar para el segundo y para el tercer término, de modo que sustituyendo los paréntesis interiores por las funciones que representan, la identidad queda reducida á la suma de tres paréntesis sencillos

$$(f, f_1) + (\varphi, \varphi_1) + (\psi, \psi_1) = 0.$$

El símbolo de que se trata puede recordarse fácilmente, observando que resulta de sustituciones circulares de las tres funciones, f, φ, ψ aplicadas al primer término.

En efecto, dicho símbolo es este

$$[f, (\varphi, \psi)] + [\varphi, (\psi, f)] + [\psi, (f, \varphi)] = 0,$$

y si escribimos las tres funciones que entran en el primer símbolo por su orden

$$f, \quad \varphi, \quad \psi$$

resultará

$$\varphi, \quad \psi, \quad f$$

por una primera sustitución circular, y

$$\psi, \quad f, \quad \varphi$$

por otra nueva sustitución circular.

Ya sabemos que la sustitución circular consiste en correr cada letra un lugar, por ejemplo hacia la izquierda, y hacer que pase la primera letra al último lugar.

El orden que marcan las tres líneas del pequeño cuadro anterior es precisamente el de las tres funciones en los tres términos de la identidad.

Veamos ahora cómo está formado el desarrollo de este primer miembro.

Consideremos el primer término de la identidad.

Todos los términos del desarrollo que representa el paréntesis interior (φ, ψ), como se ve en (1), se componen del producto de dos derivadas primeras de las funciones φ y ψ.

Consideremos, por ejemplo, la derivada φ.

El desarrollo (1) será una función *lineal de las derivadas de* φ con relación á las p y á las q; de modo que ordenando por relación á dichas derivadas de φ y poniendo primero todas las que se refieren á las q y después las que se refieren á las p, el desarrollo (1) podrá escribirse de esta manera:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}+\ldots\ldots+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}+$$
$$+\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\ldots\ldots+\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}.$$

Todos los paréntesis son derivadas de ψ y, por lo tanto, funciones perfectamente determinadas de las p y las q. Podremos representar abreviadamente estos coeficientes por la letra A con el mismo subíndice que lleva cada paréntesis en su interior. Es decir, por la serie

$$A_1, A_2 \ldots\ldots A_k, A_{k+1}, A_{k+2} \ldots\ldots A_{2k},$$

con lo cual, el símbolo del *paréntesis* se convierte en el *símbolo* A. Es decir

$$(\varphi, \psi) = A(\varphi) = A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \ldots\ldots + A_k \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} +$$
$$+ A_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + A_{k+2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \ldots\ldots + A_{1k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}.$$

Si para abreviar, como hemos hecho antes, representamos por f_1 todo este desarrollo, tendremos

$$(f, [\varphi, \psi]) = (f, f_1) = (f, A[\varphi]) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial f_1}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \right) + \ldots\ldots$$

Pero respecto á este desarrollo de (f, f_1) podemos repetir lo que hace un momento decíamos respecto al desarrollo (1). También será una función lineal de las derivadas primeras de f_1, sus coeficientes serán derivadas primeras de f que, como son funciones de las p y las q podrán representarse por $B_1, B_2 \ldots$ de modo que el paréntesis exterior aceptará una forma simbólica que puede expresarse por B, y tendremos

$$(f, [\varphi, \psi]) = (f, A[\varphi]) = B(A[\varphi]).$$

En suma, los paréntesis dobles corresponden á operaciones superpuestas de los símbolos A y B.

Otro tanto pudiéramos repetir para el segundo y el tercer término de la identidad de Poisson.

Y ahora consignemos una observación fundamental.

Al hacer el desarrollo, todos los términos contienen una derivada segunda de una de las tres funciones f, ψ, φ.

En efecto; el primer paréntesis (el interior) se compone de términos, que son el producto de dos derivadas primeras.

Al aplicar el segundo paréntesis (el exterior) hay que diferenciar de nuevo estos productos, luego cada uno de ellos

dará una derivada primera por una derivada segunda y habrá que multiplicar ambos términos por una derivada primera.

De suerte que todos los términos se compondrán del producto de dos derivadas primeras y una derivada segunda.

Y vamos á demostrar inmediatamente, aplicando el lema de la conferencia anterior, que todas las derivadas segundas desaparecen; luego desaparecen todos los términos de la identidad.

En efecto, fijémonos en las derivadas segundas de f.

En el símbolo en cuestión

$$(f, [\varphi, \psi]) + (\varphi, [\psi, \quad]) + (\psi, [f, \varphi]) = 0,$$

los únicos términos que pueden dar derivadas segundas para f, son, evidentemente, el segundo y el tercero. El primero no puede dar mas que derivadas primeras de esta función f, porque, como hemos visto

$$(f, [\varphi, \psi]) = (f, f_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial f_1}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\right) + \ldots\ldots$$

Y en efecto, solo derivadas primeras entran para f. La f_1 es independiente de f, no contiene mas que φ y ψ.

Consideremos, pues, el segundo y el tercer término de la identidad:

$$[\varphi, (\psi, f)] + [\psi, (f, \varphi)].$$

En estos términos, sí; entran, evidentemente, segundas derivadas de f, como se veria haciendo el desarrollo, operación inútil, porque el resultado se ve desde luego. La f está dentro del paréntesis interior y se diferencia una vez con relación á las p y á las q; pero está dentro del paréntesis to-

tal ó exterior, luego se diferencia de nuevo y resultan derivadas segundas de f, que son precisamente las que se anulan, porque los términos en que están contenidas se destruyen dos á dos, como vamos á ver desde luego.

Hemos dicho que los términos que dan las segundas derivadas son

$$[\varphi, (\psi, f)] + [\psi, (f, \varphi)],$$

en que el último término puede transformarse sencillamente por una de las propiedades, que hemos demostrado respecto á los paréntesis sencillos.

En efecto, vimos que alterando el orden de las funciones, la expresión cambió de signo. Luego, el paréntesis sencillo de dicho último término dará

$$(f, \varphi) = -(\varphi, f),$$

y sustituyendo tendremos

$$[\varphi, (\psi, f)] + [\psi, -(\varphi, f)].$$

Otra propiedad, también demostrada, dice, que cambiando el signo á una de las funciones cambia el signo de la expresión ó del símbolo; luego sacando el signo — del paréntesis sencillo, que representa la segunda función del paréntesis exterior, se obtendrá

$$[\psi, -(\varphi, f)] = -[\psi, (\varphi, f)],$$

y sustituyendo de nuevo en el conjunto de los dos símbolos, éste se convierte en

$$[\varphi, (\psi, f)] - [\psi, (\varphi, f)].$$

Pero, según explicamos antes, el símbolo $[\varphi, (\psi, f)]$ no es otra cosa que el símbolo compuesto $A\,[B\,(f)]$ en que los coeficientes A_1, A_2... son las derivadas de φ con relaciones á

q y á p, las primeras positivas y las segundas negativas; y los coeficientes B_1, B_2... son las derivadas de ψ también con relación á q y á p, positivas las primeras y negativas las segundas.

Ahora bien; el segundo término, con estas mismas notaciones, es decir $[\psi, (\varphi, f)]$, puesto que la φ y la ψ están invertidas á su vez, será evidentemente $B\,[A\,(f)]$.

Luego los dos términos que dan las únicas derivadas segundas de f tomarán esta forma:

$$[\varphi, (\psi, f)] - [\psi, (\varphi, f)] = A\,[B\,(f)] - B\,[A\,(f)],$$

y hemos demostrado que la expresión que representa un símbolo de esta clase *no contiene derivadas segundas.*

Del mismo modo demostraríamos que la identidad de Poisson no contiene derivadas segundas de φ, y que tampoco contiene derivadas segundas de ψ, y como dicha identidad no puede contener mas que derivadas segundas, si éstas se anulan todo el símbolo es idénticamente nulo, *que es, precisamente, lo que nos proponíamos demostrar.*

***

Claro es que la proposición puede demostrarse directamente con sólo desarrollar los tres términos de la identidad, y ver que todos los términos del desarrollo se destruyen unos con otros.

Pero esta demostración, mejor dicho, esta comprobación, es enojosa por lo larga, y casi nos atreveríamos á decir que es vulgar.

La demostración de Goursat, que es la precedente, no solamente es sencilla, sino que se puede decir, que es elegante é ingeniosa.

A su vez la identidad de Poisson demuestra con igual sencillez y elegancia un teorema importante del admirable matemático francés, como vamos á ver desde lugo.

***

Teorema de Poisson sobre la integración de las ecuaciones del movimiento.—Dicho teorema, que lleva también el sello de la elegancia matemática, no es tan *decisivo* como á primera vista pudiera creerse.

Si dos funciones de las variables p y q y de t, son integrales primeras de las ecuaciones del movimiento, aplicándoles el símbolo del paréntesis se obtiene una nueva integral primera.

Más claro:

Sean

$$\varphi(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) = a$$

$$\psi(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) = b$$

dos integrales primeras de las ecuaciones de Hamilton, para el movimiento de los sistemas materiales, en los problemas de Mecánica. Es decir: para las ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1_1 2 \ldots\ldots k \ (D),$$

cuya significación hemos explicado tantas veces, advirtiendo que los segundos miembros son funciones conocidas en cada caso de la función H, que es

$$H = K - U, \text{ siendo } K = \Sigma p_i q'_i - T,$$

si las fuerzas fictícias tienen una potencial; y

$$H = T - U,$$

si no entra el tiempo en las encuaciones de los enlaces.

Recuérdese, además, que a y b son dos constantes y que se llama *integral primera* una expresión como la φ ó ψ, que cuando en ella se sustituyen los valores de las integrales de *(D)*, es decir, los valores de p y q en función del tiempo, éste desaparece de las ecuaciones $\varphi = a$, $\psi = b$ las cuales se reducen á identidades.

Recordado esto, el *teorema se expresa*, como antes decíamos, de este modo: si

$$\varphi = a$$
$$\psi = b$$

son dos integrales primeras, sustituyéndolas en el paréntesis é igualando á otra constante arbitraria c, *la expresión que representa*

$$(\varphi, \psi) = c$$

será una tercera integral primera.

Y fíjense bien mis alumnos en la sencillez suprema, y al parecer, en la admirable fecundidad de esta proposición.

Porque parece, á primera vista, que el problema de la integración de las ecuaciones de Hamilton está resuelto en absoluto, ó por lo menos, para la mayor parte de los casos.

Y, en efecto: se supone que dos integrales primeras $\varphi = a$, $\psi = b$, son conocidas.

Pero el símbolo del paréntesis significa operaciones sencillísimas, elementales, en suma, diferenciaciones con relación á p y q de φ y ψ; luego siempre podremos obtener la expresión en p y q de (φ, ψ).

Si á esta función de las variables p y q la llamamos λ tendremos la tercera integral primera

$$\lambda = c.$$

Y combinando del mismo modo una de las anteriores ó las dos, tendremos dos nuevas integrales primeras

$$(\varphi, \lambda) = d, \ (\psi, \lambda) = d'.$$

Y combinando éstas á su vez, siempre en el paréntesis sencillo, con los integrales anteriores, tendremos, por virtud del teorema, tantas integrales primeras como queramos; tantas como sean precisas para la integración total del sistema (D).

Si por este medio obtenemos $2k$ integrales, el problema de la integración queda resuelto, como ya hemos explicado en otra ocasión.

Porque, en efecto, supongamos que por este procedimiento hemos obtenido las $2k$ integrales primeras

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) = a_1 \\ \varphi_2(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{2k}(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k, t) = a_{2k} \end{array}\right\} (\varphi),$$

pues el problema está resuelto, porque tenemos $2k$ ecuaciones de las que podemos deducir las funciones $q_1, q_2 \ldots q_k$ $p_1, p_2 \ldots p_k$, que son también en número $2k$.

Es decir, que hallaremos

$$\begin{array}{l} q_1 = F_1(t_1, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{2k}) \\ q_2 = F_2(t, a, a_2 \ldots\ldots a_{2k}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k = F_k(t, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{2k}) \\ p_1 = G_1(t, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{2k}) \\ p_2 = G_2(t, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{2k}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k = G_k(t, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{2k}) \end{array}$$

Y así obtendremos las variables que determinan la posición del sistema en cada instante en función del tiempo y de $2k$ constantes arbitrarias $a_1, a_2 \ldots\ldots a_{2k}$.

Bien decíamos, que el sistema (φ) de $2k$ integrales primeras constituían la solución del problema.

Pero es más; la solución parece que es absoluta y completa porque la condición de conocer dos integrales primeras $\varphi_1 = c_1$, $\varphi_2 = c_2$ para después, por combinaciones sucesivas, dentro del paréntesis de Poisson, obtener $2k$ integrales primeras, esta condición, repetimos, en la mayor parte de los problemas de Mecánica que se estudian, ó en una gran parte, por lo menos, está satisfecha *á priori*, puesto que en gran número de problemas, *á priori* se conocen dos integrales primeras, á saber: la de las fuerzas vivas y la que da el teorema de las áreas.

Natural es, según esto, que asalte la ilusión al que por primera vez estudia estas cuestiones, de que el teorema de Poisson, que hemos enunciado, y que vamos á demostrar, resuelve en absoluto, ó en grandísima parte, al menos, los problemas de Mecánica comprendidos en las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Desgraciadamente no es así. El teorema de Poisson tiene gran importancia; pero no tan grande ni tan decisiva como pudiera imaginarse.

Y una primera duda asalta á poco que se fije la atención en el enunciado del teorema mismo.

Porque si de dos integrales se deduce una tercera, y de dos de estas tres primeras otra cuarta, y así sucesivamente, como el teorema es siempre exacto y siempre aplicable, el proceso no terminará nunca ni nunca cesaremos de encontrar integrales primeras.

Mas como las ecuaciones *(D) no pueden tener infinitas integrales primeras,* para armonizar con la exactitud del teorema esta imposibilidad lógica, deberán verificarse una de estas dos cosas.

O que al aplicar este método del paréntesis que hemos explicado llegue un momento en que el resultado sea una identidad

$$\text{constante} = \text{constante}$$

ó que las nuevas integrales que obtengamos coincidan con las anteriormente obtenidas.

Y en efecto, esto es lo que sucede en la práctica; y aquí asalta la duda y el temor de que el método no sea tan eficaz como parece.

Porque ó podemos obtener identidades, ó podrán repetirse las integrales antes de haber obtenido $2k$ integrales primeras.

Con lo cual, el método podrá dar, como en efecto da, en muchos casos nuevas integrales, pero en otros muchos casos resulta ilusorio, puesto que da integrales ya obtenidas ó da identidades.

Los autores citan ejemplos de ambos casos, que no podemos reproducir aquí, porque sería penetrar resueltamente en campo que no es de esta asignatura.

Harto hacemos con dedicar varias conferencias á exponer métodos de integración, que en interés de la enseñanza de la Física Matemática, creemos conveniente exponer ó recordar al menos.

Y pasemos ya á la demostración del teorema de Poisson, que sean cuales fueren sus deficiencias tiene alto valor lógico y hasta me atrevería á decir sentido artístico.

***

Decíamos, que debemos demostrar porque éste es el teorema, que si

$$\varphi = c_1 \text{ y } \psi = c_2$$

son dos integrales primeras de las ecuaciones del movimiento, siendo naturalmente y en general la φ y la ψ funciones conocidas de $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_2\, p_2 \ldots\ldots p_k, t$, también será integral primera la expresión

$$(\varphi, \psi) = c_3$$

siendo c_3 una constante.

En efecto, hemos demostrado que la condición para que una función cualquiera f sea integral primera de las ecuaciones de Hamilton era que se tuviese idénticamente, es decir, destruyéndose unos términos con otros,

$$(f, H) + \frac{df}{dt} = 0,$$

y ya recordarán mis alumnos el sentido de esta fórmula: el paréntesis significa operaciones bien definidas sobre f, que es una función de p y q y sobre H, que es también una función conocida; la que sirve *á priori* para formar los segundos miembros de las ecuaciones canónicas.

Además, como en f podrá entrar el tiempo t, claro es que $\frac{\partial f}{\partial t}$ también expresará una operación bien definida sobre una función conocida f y se convertirá en esta parte en una función de p, q, t.

La ecuación, expresa que todos los términos se destruyen unos con otros sin dar valores determinados á las cantidades que la expresión contiene, y que idénticamente resulta,

$$0 = 0.$$

Pues bien; recordado esto, diremos: Puesto que φ y ψ son integrales particulares, deberán cumplir con la condición anterior y tendremos:

$$(\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \qquad (\psi, H) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

Apliquemos ahora la identidad de Poisson á las tres funciones H, φ, ψ y resultará

$$(H, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, H)) + (\psi, (H, \varphi)) = 0.$$

Y sustituyendo los valores anteriores de

$$(\varphi, H) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{y} \quad (\psi, H) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

y recordando que

$$(H, \varphi) = -(\varphi, H),$$

y que, por lo tanto,

$$(H, \varphi) = -(\varphi, H) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

tendremos

$$(H, (\varphi, \psi)) + \left(\varphi, -\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0;$$

y cambiando todos los signos, ó invirtiendo, que da lo mismo, donde creamos esto último preferible,

$$((\varphi, \psi), H) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) = 0.$$

Pero hemos demostrado que

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right)$$

luego tendremos por último

$$((\varphi, \psi), H) + \frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} = 0;$$

que es, precisamente, la condición general para que una función de las p, q, t que en este caso es (φ, ψ) igualada á una constante sea una integral primera.

Si para abreviar representamos por f este paréntesis, se convierte la ecuación precedente en

$$(f, H) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Queda, pues, demostrado el teorema de Poisson, con una gran sencillez.

Y el teorema no cae nunca en defecto; lo que hay es, que á veces, pierde su fecundidad.

Porque en ocasiones no da un absurdo, lo que da es una identidad, y otras veces da, en efecto, una integral primera, pero que de nada nos sirve, porque ya la conocíamos.

*
* *

Todavía citaremos un caso particular en que se simplifican los resultados precedentes.

Si H no contiene t, lo que sucede en particular cuando los enlaces no contienen el tiempo y cuando las fuerzas ficticias tienen una función de fuerzas, ó sea una potencial U, independiente de t, en este caso tendremos $H = h$, siendo h una constante; ó bien poniendo por H su valor,

$$T - U = h$$

es una integral de las ecuaciones del movimiento, puesto que expresa el principio de las fuerzas vivas.

O más claro, T hemos visto que es una función de las p y q. U también es una función de las q, p; la t no entra, luego tenemos una relación constante para todos los instantes del movimiento entre las funciones p y q que determinan la posición del sistema.

En resumen,

$$H = c$$

es una integral primera que se determina *a priori*.

Si conociéramos otra integral primera

$$\varphi(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_{2k}, t) = a,$$

en que a sea otra constante, el teorema de Poisson por la combinación de las dos integrales H y φ nos da una nueva integral,

$$(H, \varphi) = b. \qquad (b)$$

Pero hay más, y ésta es la nueva simplificación. Puesto que $\varphi = a$ es una nueva integral primera, satisfará á la condición á que toda integral primera debe satisfacer, que es, como sabemos,

$$(\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

de donde deducimos

$$(H, \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

luego la integral *(b)* no es otra cosa que la derivada de φ con relación al tiempo.

En suma, en este caso particular, si $\varphi = a$ es una integral su derivada con relación al tiempo $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ será otra integral primera.

Tendremos, pues, que si

$$\varphi = a$$

es por hipótesis una *integral primera*,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a_1$$

será otra *integral primera*.

Y por la misma razón, partiendo de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ se demuestra que su derivada es otra integral primera y así sucesivamente.

En resumen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^3} \ldots\ldots$$

serán todas *integrales primeras.*

Si de este modo obtuviéramos $2k$ integrales primeras el problema quedaría resuelto.

Pero aquí pueden ocurrir todos los casos de excepción que indicábamos.

Que un coeficiente diferencial y los que le siguen sean cero, ó que obtengamos integrales ya obtenidas.

En el afán de buscar simplificaciones ocurre que acaso sería una el no entrar la variable t en la integral primera φ.

Pero lo que en este caso sucede es que el método es ilusorio, porque si φ no contiene t, se reduce á cero $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ y la ecuación

$$(\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

se reduce á su vez á

$$(\varphi, H) = 0,$$

que debe ser una identidad y no una solución, es decir, otra nueva integral primera, porque

$$(\varphi, H) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ ó } (\varphi, H) = 0$$

es una *identidad*, pues representa la condición para que φ sea una integral.

* * *

Diversos matemáticos han procurado hacer más eficaz el teorema de Poisson y á este propósito citaremos el teorema de Bertrand, que no podemos desarrollar aquí, á fin de no

dar á estas digresiones, puramente matemáticas, un desarrollo desproporcionado con el objeto de las presentes lecciones.

Nuestros oyentes ó nuestros lectores pueden consultar el teorema de Bertrand en diversas obras; por ejemplo, en la Mecánica de Laurent y en la muy extensa obra de Cálculo diferencial é integral del mismo autor.

Y sigamos estudiando las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Son, como hemos dicho varias veces, ecuaciones *diferenciales simultaneas de 2k funciones* $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k$ *y de una sola invariable independiente t.*

Están puestas bajo la forma canónica, ó si se quiere emplear otro adjetivo muy usado, bajo la forma *normal.*

Es decir, que están despejados en un miembro todos los coeficientes diferenciales con relación al tiempo que son p', q'.

Y pertenecen, además, al tipo de las ecuaciones *canónicas de Hamilton.* Los segundos miembros son funciones conocidas de p, q, t, *que se derivan de una sola función H.*

Insisto en estos pormenores, porque en el estudio de la Física Matemática se encuentran tantas clases de ecuaciones diferenciales, que no es extraño que algunos alumnos se sientan un tanto desorientados; y lo primero, y perdóneseme lo vulgar de la observación, en la enseñanza y en la ciencia, lo mismo que en el mar y aun en la vida, es *orientarse.*

Por eso voy á consagrar la última parte de esta conferencia á una clasificación, que está en todos los libros de cálculo; pero que yo no sé si estará en la memoria de mis alumnos, y que creo conveniente recordar, para que en cada instante sepan á qué punto del cálculo diferencial é integral les ha conducido este ó aquel problema de Física Matemática; en qué punto, repito, de la enmarañada selva de ecuaciones diferenciales tienen que buscar soluciones, para aplicarlas luego á los problemas reales de la Física.

Perdóneseme, pues, esta digresión, que no es más que una lista ó un índice de problemas, que en las obras dedicadas á la enseñanza del cálculo se encuentran con pequeñas variantes de colocación ó de orden.

*
* *

La Física experimental puede obtener en algunos problemas *relaciones finitas* entre los parámetros, que definen cada fenómeno natural, porque el método experimental da para cada *valor finito* de una variable el *valor finito* de la función que de ella depende.

Por ejemplo: para cada presión de un gas su volumen.

Todas estas relaciones de los parámetros físicos, en un gran número de casos determinan funciones empíricas definidas por tablas, ó como se dice en lenguaje moderno, *por conjuntos.*

Si en estas materias no fuera peligroso generalizar, yo diría que en la Física las fórmulas matemáticas aparecen desde luego por valores finitos de las variables.

Son fórmulas matemáticas, que vienen á sintetizar cuadros numéricos por interpolación.

Todo esto ya lo explicamos hace tiempo.

En cambio, la Física Matemática, por regla, general no empieza sus estudios por ecuaciones finitas, sino por ecuaciones diferenciales.

Y digamos de paso, que hoy en el ultramodernismo, el empleo de las *ecuaciones diferenciales* está en tela de juicio.

Pero no adelantemos las ideas.

De la *ciencia clásica* tratamos.

Con las mismas reservas que antes me atreveré á decir, que las ecuaciones diferenciales son la nota característica de la Física Matemática *clásica* y *moderna*, no de la *modernísima.*

De aquí la importancia de esta teoría del cálculo integral para todos los problemas de la Física Matemática.

Y esto justifica las palabras que voy á pronunciar con este motivo, como antes decía, para la mejor orientación de mis alumnos.

Ya saben todos ellos, que una ecuación diferencial es una relación, no sólo entre las variables y las funciones para valores finitos en general de unas y otras, sino una relación entre las variables, las funciones y los coeficientes diferenciales.

Por eso se llaman ecuaciones diferenciales.

Expresan, en cada momento, *la ley infinitesimal de variación;* no la relación entre las *magnitudes ya formadas,* sino la ley, en un instante infinitamente pequeño, de sus cambios ó variaciones. Por eso se adaptan admirablemente al método hipotético de la Física Matemática.

Saben también mis alumnos, que las ecuaciones diferenciales se clasifican en primer lugar por el mayor orden del coeficiente diferencial que contienen.

Si sólo contienen coeficientes diferenciales de primer orden, de *primer orden serán las ecuaciones* diferenciales.

Si contienen coeficientes diferenciales de *segundo orden,* es decir, si expresan, no leyes primeras de variación, *sino leyes de variación de estas mismas leyes de variación,* las ecuaciones diferenciales serán de segundo orden.

Y así tendremos:

Ecuaciones diferenciales de tercer orden, de cuarto orden y en general del orden n.

Generalmente en la Física Matemática las ecuaciones diferenciales que se presentan son de *segundo orden.* Por ejemplo: de segundo orden son, por regla general, las ecuaciones de la Mecánica, aunque por artificios especiales se reduzcan á ecuaciones diferenciales de primer orden.

Y prescindimos del caso en que sean de tercer orden, en el que, como dice M. Poincaré, se eliminan las *coordena-*

das parásitas; mas éstos son otros problemas muy hondos.

De tales familias de ecuaciones diferenciales, por ahora no vamos á fijarnos más que en las ecuaciones diferenciales de *primer orden.* Prescindamos de todas las demás.

*
* *

Clasifiquemos, pues, las ecuaciones diferenciales de *primer orden.*

Las ecuaciones diferenciales de primer orden se clasifican, ó si se me permite la palabra, se subclasifican en razón al número de funciones y al número de variables independientes.

Y de aquí resulta una multitud de ecuaciones diferenciales de primer orden, y una multitud de problemas y de teorías, que por sí solas pueden agotar la vida de un matemático.

Señalemos para la orientación de mis alumnos los grupos principales.

1.° Tenemos, en primer lugar, la ecuación diferencial de *primer orden, con una variable independiente y una función,* y en que el coeficiente diferencial sólo contiene la variable independiente.

El tipo es éste:

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

de donde

$$y = \int f(x)\,dx + \text{constante}.$$

Son las más sencillas de todas; son las que dan origen á la integración más elemental, á la que se da el nombre de *cuadratura,* sin duda porque la integral puede representar un área.

Así en los demás problemas de integración, se cree obtener un triunfo enorme, y, en efecto lo es, cuando se reduce una integración á cuadraturas.

Y se enuncia el resultado como algo que expresa la resolución más elemental y sencilla de un problema de integración.

Y, sin embargo, ese problema es inmenso.

Ya lo decíamos en este mismo curso. Puede muy bien suceder, y en rigor debe ser lo más frecuente, que en un caso cualquiera, escogido á capricho, el símbolo

$$y = \int f(x)\,dx + c,$$

no exprese ninguna función ni tampoco de las que conocemos, ni combinación que pueda especificarse de estas funciones; sino que este símbolo signifique una función completamente nueva para los matemáticos, función cuyas propiedades tendrán que estudiar sobre el símbolo que la define.

Para comprender inmediatamente todo lo que este símbolo puede representar, basta que recordemos la teoría de las funciones elípticas y la teoría de las funciones avelianas. Y sin acudir á mayores generalidades, indiquemos las teorías que se comprende que existan, de ecuaciones diferenciales de primer orden, definidas de este modo

$$y = \int F(x, y_1, y_2 \ldots\ldots y_n)\,\partial x,$$

estando determinadas en función de x las cantidades $y_1, y_2 \ldots y_n$ por esta serie de ecuaciones implícitas

$$\varphi_1(x, y_1) = 0, \varphi_2(x, y_1) = 0 \ldots\ldots \varphi_n(x, y_n) = 0.$$

Las avelianas no son más que un caso particular de este tipo.

2.° Todavía en las ecuaciones diferenciales de primer

orden de una variable independiente y de una función, cabe otro caso: que el coeficiente diferencial contenga la función y la variable independiente.

El tipo es éste:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, v).$$

Tanto esta clase de ecuaciones diferenciales, como la precedente, se sabe que definen, no una curva en particular, sino una familia de curvas, por decirlo así, cada una de las cuales corresponde á un valor particular de la constante arbitraria de la integración.

3.° En vez de considerar dos variables, podemos considerar tres y tendremos, como primer tipo, en este caso, el de las ecuaciones *en diferenciales totales*

$$dz = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy,$$

en que los coeficientes de dx y dy no contienen más que las variables independientes x, y.

Dicho tipo corresponde, por decirlo de esta manera, al tipo primero

$$dy = f(x)\, dx.$$

Pero aquí aparece ya un problema previo, y es el de averiguar si realmente la ecuación diferencial es integrable; porque si la ψ y la φ no cumplen con ciertas condiciones, no lo será.

4.° Las ecuaciones de diferenciales totales para el caso de dos variables independientes pueden presentar otro tipo más general que el anterior, pues puede suceder que los coeficientes de dx y dy contengan no sólo las variables x, y, sino la misma función z que se busca; y tendremos este nuevo tipo

$$dz = \varphi(x, y, z)\, dx + \psi(x, y, z)\, y,$$

que corresponde por analogía al caso segundo, que es aquel en que en el coeficiente diferencial entra, no sólo la variable independiente, sino la función, es decir

$$dy = f(x, y)\, dz.$$

Claro es que el tipo precedente puede tener otra forma, suponiendo que no se haya despejado dz de la ecuación diferencial

$$\alpha(x, y, z)\, \partial z = \beta(x, y, z)\, \partial x + \gamma(x, y, z)\, \partial y:$$

dividiendo por α, este tipo se reduce al anterior.

5.° Suponiendo que el número de variables independientes sea superior á dos, tendremos las ecuaciones diferenciales totales de una función de un número cualquiera de variables independientes, que ofrecerán dos tipos según que entren en los coeficientes de dx, dy, etc., ... sólo las variables independientes ó éstas y la función.

Si llamamos x, y, u, v ..... á las variables independientes, tendremos estas dos formas, que son generalización de las anteriores:

$$dz = \alpha(x, y, u \ldots\ldots)\, dx + \beta(x, y, u \ldots\ldots)\, dy + \\ + \gamma(x, y, u \ldots\ldots)\, du + \ldots\ldots$$

$$dz = \alpha(x, y \ldots\ldots z)\, dx + \beta(x, y \ldots\ldots z)\, dy + \\ + \gamma(x, y \ldots\ldots z)\, du + \ldots\ldots$$

También aquí cabe que exista ó no una integral, y habrá que estudiar previamente las condiciones de integrabilidad.

6.° Dentro del grupo general de las ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir, de aquellas en que no entran más que coeficientes diferenciales de este orden primero, cabe una clasificación por el número de variables; pero como las variables pueden ser independientes ó pueden ser fun-

ciones de variables independientes, se puede ir aumentando el número de unas ú otras.

Hasta llegar á este punto sólo hemos aumentado el número de las variables independientes, y por eso no hemos establecido más que una ecuación para cada caso, porque no teníamos más que *una función,* que llamábamos z.

Pero ahora, partiendo del tipo primero, podemos dejar una sola variable independiente x, y aumentar el número de funciones ó de incógnitas, por decirlo así, á saber de funciones desconocidas, y tendremos el sistema de ecuaciones *difc-renciales simultáneas.*

Por ejemplo, para fijar las ideas. Supongamos que el número de funciones son tres y, z, u y una variable única x.

Todas estas ecuaciones diferenciales se pueden reducir por regla general al siguiente sistema típico ó á la siguiente forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\,(y, z, u, x),$$

$$\frac{dz}{dx} = \beta\,(y, z, u, x),$$

$$\frac{dn}{dx} = \gamma\,(y, z, u, x),$$

que se suelen escribir generalmente de este modo:

$$\frac{dy}{\alpha} = \frac{dz}{\beta} = \frac{dn}{\gamma} = \frac{dx}{1}$$

aunque se adopta una notación más cómoda para el caso de muchas variables.

Si llamamos x, y, z, á las funciones, t á la única variable independiente y X, Y, Z á los segundos miembros, tendremos:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{dt}{1}.$$

También se emplean otras notaciones análogas que explicaremos cuando llegue el caso.

7.° Y aquí empiezan *las ecuaciones en diferenciales parciales*, que son aquellas en que existe, por ejemplo, una sola función y diversas variables independientes, que para fijar las ideas supondremos que son dos.

La ecuación es única y en ella no entra la diferencial total, sino las derivadas parciales de la función única con relación á las variables independientes. De donde resulta este tipo

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

y llamando p y q á las derivadas parciales de z

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Si el número de variables independientes es mayor y designamos siempre por z la función y las variables independientes por $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, tendremos como tipo general de este caso, la siguiente ecuación en diferenciales parciales:

$$f\left(z, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

ó representando por p_1, p_2 las derivadas parciales

$$f(z, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n) = 0.$$

Dicho caso se enlaza naturalmente con el de las ecuaciones diferenciales totales, sólo que en aquéllas entra la diferencial total y ésta no aparece en las ecuaciones diferenciales parciales.

8.° El tipo precedente comprende á su vez otro particular importantísimo, que es aquel en que las *derivadas no entran más que bajo forma lineal.*

Es decir, que la f es la más sencilla posible: es una función lineal de las p.

Y entonces, llamando $X_1, X_2, \ldots\ldots$ á los coeficientes de las derivadas parciales, tendremos este tipo de ecuaciones diferenciales parciales y lineales:

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots\ldots + X_n p_n = Z$$

en que las X, Z son, en general, funciones de la función z y de las variables independientes. Así, escribiendo tales ecuaciones diferenciales en forma más desarrollada, tendremos:

$$X_1 (z, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 (z, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} +$$

$$+ \ldots\ldots + X_n (z, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z (z, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n).$$

Caso particular que comprende otro caso aún más sencillo, que es aquel en que la función f no sólo es lineal en las p, sino que es homogénea; es decir, que falta el segundo miembro, y tendremos esta forma:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots\ldots + X_n \partial x_n = 0.$$

Ecuaciones diferenciales que se enlazan íntimamente con las ecuaciones del tipo 6.°, cuya forma hemos visto que es, modificando un tanto las notaciones,

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial x_n}{X_n} = \frac{\partial_1}{1}.$$

Cosa extraña, porque parecen dos casos extremos.

En este último las funciones son muchas y la variable independiente una sola, t; en el de las ecuaciones en difrencia les parciales sucede lo contrario: la función es una sola, z, y

las variables independientes son muchas; y, sin embargo, el enlace es estrechísimo entre ambos problemas.

La explicación consiste, y no podemos hacer otra cosa que apuntar la idea, en las constantes arbitrarias que contienen las ecuaciones diferenciales simultáneas.

9.° Generalizando los tipos precedentes por el aumento en el número de variables y de funciones, deberíamos considerar ecuaciones diferenciales en que entrasen, no una diferencial total de una sola función, sino varias, dependiendo de diversas variables independientes.

Y aun otro caso, en que las ecuaciones diferenciales comprendiesen las derivadas parciales, no de una función, sino de diversas funciones con relación á diversas variables independientes.

Y por último en el mismo sentido se pudieran generalizar las ecuaciones diferenciales simultáneas.

10. Por último, cada uno de los casos precedentes da lugar á muchas series de tipos de ecuaciones diferenciales; porque, por ejemplo, las derivadas pueden presentarse bajo formas implícitas.

Así, para fijar las ideas y en el caso más sencillo, en el tipo segundo, en vez de tener

$$\frac{dy}{dx} = f(x, z),$$

puede presentarse esta ecuación diferencial bajo la forma

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Claro es, que esta forma se reduce á la anterior, despejando $\frac{dy}{dx}$; pero fácilmente se dice «*que se despeja* una cantidad contenida en una función»; lo difícil es llegar á efectuar la operación indicada.

No ya siendo φ una función transcendente, sino siendo algebraica puede afirmarse, sin género alguno de pesimismo, que la ciencia ignora, en general, la solución de este problema para ecuaciones algebráicas de grado superior al cuarto ó al quinto y aun en este último la solución se presenta bajo forma de funciones elípticas.

Pero en Matemáticas se procede del modo siguiente, y es natural que así se proceda.

Se considera como un triunfo al intentar resolver un problema de orden superior, cuando se reduce á otro problema de orden inferior, aunque éste no se sepa resolver.

Así, por ejemplo, es un gran triunfo en los problemas de ecuaciones diferenciales, reducir la integración á cuadraturas, aunque no se sepan hallar estas cuadraturas.

Para concluir la presente conferencia diremos que, después de la gran familia de las ecuaciones diferenciales de primer orden, vienen las de órdenes superiores: las de segundo orden, tercer orden y, por último, las del orden u.

Y si á la complicación del orden se agrega:

Primero. La de ser varias las funciones.

Segundo. La de ser muchas también las variables independientes.

Tercero. La de presentarse bajo formas implícitas las funciones, las variables y las derivadas, tendremos una serie interminable de problemas, una complicación inmensa y un océano infinito cuyos horizontes límites ni siquiera se vislumbran.

Pero todas estas son cuestiones ajenas á nuestro objeto.

Mis alumnos pueden consultar, aun antes que las Memorias especiales de los maestros, y como obras de totalidad y de preparación, las siguientes:

El curso de Análisis del Mr. Jordan, que es una obra extensa y digna del insigne matemático.

El gran curso de Análisis de Mr. Laurent, que comprende nueve volúmenes.

El curso de Análisis de Mr. Humbert, no tan extenso como los anteriores, pero que es un modelo de método y claridad.

El curso de Análisis matemático de Mr. Goursart, obra muy completa, muy bien escrita, y pudiéramos decir muy á la moderna.

Obra, también moderna, como que la segunda edición es del año 1912, es el curso de Análisis infinitesimal de la Vallée Poussin.

Citaré todavía, aunque no está terminada, por sus méritos y por la consideración que merece su ilustre autor, el Tratado de Análisis de Picard.

Pero no terminaría tan fácilmente, á poco que continuara, aun sin salir de las obras francesas, estos pequeños apuntes bibliográficos, si no me decidiera á poner bien pronto punto final.

Y cuenta que no cito, por haber quedado incompletas, otras obras sobre estas mismas materias, como el cálculo diferencial integral de Mr. Bertrand.

Antes se decía: Tratado de cálculo diferencial é integral; ahora se dice casi siempre: curso de Análisis.

Citaremos, sin embargo, para concluir, la obra quizás más extensa de ecuaciones diferenciales, que es la titulada *Theory of differential equations*, por Andrew Russell Forsyth De esta obra, ó de parte de ella, se ha hecho recientemente una traducción al alemán.

Y para dar fin definitivamente, y sólo sobre ecuaciones diferenciales parciales, recomendamos el estudio de los dos tomos de Mr. E. Goursat sobre integración de ecuaciones en diferenciales parciales de primero y de segundo orden.

Con lo dicho concluyo esta pequeña lista de obras, que recomiendo al estudio de mis alumnos, sin atreverme á penetrar en las Memorias y trabajos especiales de los gran-

des maestros, como Poincaré, Painlevé, Volterra y otros.

Estas bibliografías son con frecuencia peligrosas, porque por extensas que sean, siempre asalta el remordimiento de haber omitido nombres ilustres. Uno he omitido: el de Jacobi; pero es que precisamente del teorema que lleva su nombre he de ocuparme en la Conferencia inmediata.

XL. — Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia duodécima.

SEÑORES:

Bien comprendo que en las Conferencias de este curso, al menos en las que llevo hasta hoy explicadas, más he tratado cuestiones de análisis puro, como ahora se dice, ó de cálculo diferencial é integral, como antes se decía, que no cuestiones concretas de Física Matemática, que es la materia propia de nuestra asignatura.

Y el caso es que las Conferencias que me restan, presentarán, probablemente, el mismo carácter.

Las razones que he tenido para consagrar al análisis abstracto una buena parte del presente curso, las he expuesto ya en otras Conferencias.

Si la enseñanza de las matemáticas puras hubiera alcanzado en España la extensión y la profundidad que yo quisiera, una gran parte de lo que voy explicando podría omitirse por sabido.

Pero aunque yo reconozco que, de algunos años á esta parte, ha mejorado extraordinariamente en nuestra patria la enseñanza de la Ciencia matemática, por las nuevas materias que se enseñan y por la gran competencia y el gran entusiasmo del profesorado, aun así no creo temerario suponer que una buena parte de mis alumnos, de mis oyentes, y más tarde de mis lectores, no habrán estudiado ó no habrán profundizado al menos algunos problemas matemáticos de los que voy explicando ó tendré que explicar en lo sucesivo.

Pero hay otra razón aún más honda que justifica, á mi modo de ver, plenamente la predilección que en este año voy dando á ciertas cuestiones de las matemáticas abstractas.

*
* *

Cada ciencia tiene su método, sus medios de exposición y de investigación, su arsenal, pudiéramos decir también, para las grandes batallas que la razón humana riñe siempre con lo desconocido.

La Física Experimental tiene sus gabinetes, su material de investigación, sus aparatos especiales, que constantemente se renuevan y se perfeccionan, y el físico necesita conocerlos, manejarlos fácilmente, y en cierto modo plegarlos y domesticarlos, á fin de hacerlos aptos para los fines á que se destinan.

No le basta al físico tener ciertas ideas directrices, un plan de trabajos, un programa de investigaciones; necesita conocer prácticamente y necesita dominar todo el material que emplea en sus labores.

Y necesita estar dotado, pudiera agregarse, de especial habilidad, someter los fenómenos materiales á los artificios del método experimental; que artificios son como pueden serlo los del cálculo y los de las fórmulas matemáticas.

Nadie extrañaría en un curso de Física Experimental el que consagrase el profesor algunas lecciones al manejo práctico de los aparatos de gabinete y al estudio de sus propiedades y de su potencia para medir, pesar y someter á observación los fenómenos del mundo inorgánico.

Pues bien; la Física Matemática también tiene su método de investigación. Con ser Física Matemática es, en cierto modo, Física Experimental muchas veces; sólo que sus medios predilectos de investigación son las fórmulas, los cálculos, las ecuaciones diferenciales, como decíamos en otra Conferencia.

Hay en el gabinete del físico medios materiales para analizar los fenómenos; pues en la Física Matemática bien puede decirse, sin que esto sea jugar del vocablo, que el análisis matemático los analiza á su manera.

Y si en Física Experimental es preciso conocer á fondo los aparatos que van á emplearse, tan necesario es conocer en Física Matemática las ecuaciones diferenciales, pongo por caso, que expresan la ley de un fenómeno, y, además, sus métodos de integración.

Así es, que en la Física Matemática clásica se ha dado siempre una importancia excepcional al estudio de las cuestiones del análisis puro, y muy particularmente á los métodos de integración.

Al abrir cualquier libro de la Física Matemática clásica, más se creyera haber abierto un libro de matemáticas abstractas, que no de Física propiamente dicha.

Y no se olvide que en el conjunto de mis Conferencias, y hasta donde me alcancen las fuerzas y el tiempo, yo pretendo ir esbozando la enciclopedia de la Física Matemática clásica y de la Física Matemática moderna.

Y si aquélla concedía á las cuestiones de análisis la extraordinaria importancia que la naturaleza de los problemas exigía en aquella época, yo tengo que hacer otro tanto al reseñar la historia de la Física Matemática en los dos tercios primeros del siglo precedente.

* * *

Pero no se crea tampoco que este alarde matemático sea inútil para el estudio de la Física Matemática del día, que, como ya veremos en el momento oportuno, y como ya he apuntado en otras ocasiones, las matemáticas puras, tanto y más dominan en las nuevas hipótesis, que dominaban en la hipótesis mecánica, que fué el nervio de la Física Matemática en el primer período de su desarrollo.

Si hay memorias, libros y conferencias modernas en que la masa de cálculos parece escasa, es porque, ó se omiten por sistema, ó al final de las conferencias se agrupan tales desarrollos de cálculo para despejar la marcha de las ideas fundamentales y la exposición de los resultados.

Sirva de ejemplo el admirable libro de Lorentz sobre los electrones.

Pero como el orden de los sumandos no altera la suma, tanto da esparcir los cálculos en el texto, como reunirlos al final en forma escueta, aunque ocupen la mitad del volumen.

Aun así y todo, la forma en que la Física Matemática moderna emplea el cálculo, por lo mismo que es materia importantísima, no es para tratarla de paso.

Todas estas reflexiones no tienen por objeto mas que justificar en cierto modo las extensas explicaciones de mis últimas Conferencias, y justificar á la vez la oportunidad y aun la necesidad de las teorías en que voy á ocuparme en ésta y en las Conferencias siguientes.

***

De la clasificación que hicimos en la Conferencia anterior vamos á tomar, por ahora, sólo dos tipos.

El séptimo, que se refiere á las ecuaciones en diferenciales parciales conteniendo una función y diversas variables independientes.

La forma general era ésta:

$$f\left(z, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

z representa la función, y $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ las variables independientes.

En la función f entraban la función z, las variables independientes $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$, y las derivadas de z con relación á estas variables independientes.

El segundo tipo que vamos á considerar es el sexto, que se refiere á las ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden conteniendo diversas variables independientes y una sola función.

Representando por y, z, u las funciones simultáneas, que para simplificar las reduciremos á tres, y por x la variable independiente, deberemos tener tres relaciones entre las tres funciones, la variable independiente y las derivadas de dichas tres funciones con relación á dicha variable independiente; y despejando de estas tres ecuaciones las tres derivadas, obtendremos las formas canónicas ó normales de las ecuaciones diferenciales de primer orden de diversas funciones y una sola variable independiente.

Por ejemplo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha(z, y, u, x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \beta(z, y, u, x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma(z, y, u, x).$$

Estas son, volvemos á repetirlo, las dos clases de ecuaciones diferenciales que vamos á considerar al exponer el teorema de Jacobi.

En suma:

1.° Ecuaciones diferenciales de primer orden de una función y diversas variables independientes.

Y 2.° Ecuaciones diferenciales de primer orden *simultáneas* de diversas funciones y una sola variable independiente.

Se invierten, por decirlo así, los términos: en las de diferenciales parciales, una función y diversas variables independientes.

En las simultáneas, una sola variable independiente y diversas funciones.

Pero como hemos de aplicar ambos tipos á las ecuaciones de la Mecánica, vamos á cambiar las notaciones para uno y otro caso.

Primero. Consideremos la ecuación en diferenciales parciales.

A la función la llamaremos V, y á las variables independientes, suponiendo, para simplificar, que se reducen á cuatro, las llamaremos q_1, q_2, q_3, t.

De manera que la ecuación f que antes considerábamos, con las nuevas notaciones tomará esta forma:

$$f\left(V, q_1, q_2, q_3, t \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, \frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0.$$

Y aun vamos á introducir una simplificación. Vamos á suponer que en f no entra la función V, sino únicamente las variables independientes q_1, q_2, q_3, t.

Además, supondremos que se despeja el coeficiente diferencial $\frac{\partial V}{\partial t}$, y de este modo el primer miembro toma esta forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right) = 0 \qquad (J).$$

No hemos escogido tampoco á capricho la letra H para significar la función que resulta al despejar el coeficiente diferencial $\frac{\partial V}{\partial t}$. Ya veremos por qué escribimos H.

La forma (J) es, pues, la que vamos á considerar en la demostración del teorema indicado.

Es una ecuación diferencial de primer orden, puesto que no entran mas que primeras derivadas; contiene cuatro variables independientes p_1, p_2, p_3, t; no entra la función V por sí, sino en las derivadas, y, además, hemos despejado la derivada relativa á t.

Tal es el tipo de la ecuación en diferenciales parciales de primer orden de Jacobi á la que vamos á aplicar el teorema anunciado.

Segundo. También vamos á cambiar las notaciones en las ecuaciones diferenciales simultáneas, porque las que vamos á considerar son precisamente las que se refieren á la forma canónica de Hamilton.

Y no considerando, para simplificar, mas que seis funciones, las llamaremos $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$. La variable independiente la designaremos por t.

De modo que, puestas bajo la forma normal, tendríamos:

$$\frac{dq_1}{\partial t} = \alpha_1 (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t) \qquad \frac{dp_1}{\partial t} = \beta_1 (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t)$$

$$\frac{dq_2}{\partial t} = \alpha_2 (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t) \qquad \frac{dp_2}{\partial t} = \beta_2 (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t)$$

$$\frac{dq_3}{\partial t} = \alpha_3 (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t) \qquad \frac{dp_3}{\partial t} = \beta_3 (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t)$$

Pero como hemos de hacer aplicación á las ecuaciones de la Mecánica, no hay que olvidar que las funciones α y β no son cualesquiera, sino que se obtienen por la derivación de una función H con relación á las p y á las q.

Así, las seis ecuaciones precedentes toman esta forma sencillísima:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

$$\frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3} \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3}$$

ó abreviadamente, y haciendo variar i de 1 á 3,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Este es el tipo de ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden que vamos á considerar.

Y es claro que, en el caso general, la de Jacobi no tiene cuatro variables independientes q_1, q_2, q_3, t, sino, además de la t, k variables independientes. Es decir, q_1, $q_2 \ldots q_k$, t; y las de Hamilton no tienen seis funciones $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$, sino $2k$; ó sean, $q_1, q_2 \ldots q_k, p_1, p_2 \ldots p_k$, y, además, la variable t.

Pero como la demostración del teorema de Jacobi es la misma para ambos casos, siguiendo puntualmente el método de las notaciones de Mr. Appell, al primer caso nos atenemos.

Y ahora, para que la explicación sea todo lo clara posible, recordemos algunas ideas relativas á las ecuaciones en diferenciales parciales, que se aplican á la ecuación de Jacobi que vamos á examinar.

*
* *

Por lo regular, en todo problema de matemáticas hay una cuestión previa, y es la de conocer *si el problema será ó no posible.*

Suponiendo que lo sea, hay otra segunda cuestión, y es la de averiguar si el problema tiene *una solución única ó tiene varias.*

Así, por ejemplo, las ecuaciones de primer grado, suponiendo que no sean incompatibles ó indeterminadas, no tienen mas que una solución.

Una ecuación algebraica del grado n tiene forzosamente n raíces reales ó imaginarias.

Una ecuación trascendente puede tener infinitas soluciones; y estas ideas, que son bien conocidas de mis alumnos, podemos aplicarlas á las ecuaciones diferenciales.

Resolver una ecuación diferencial es buscar funciones de las variables independientes, que la ecuación diferencial ó

el sistema de ecuaciones diferenciales contengan; funciones tales que, sustituídas en las ecuaciones del sistema, las reduzcan á identidades.

Y aquí se presentan las mismas cuestiones que antes indicábamos.

En primer lugar, si el problema es posible, es decir, si la ecuación ó las ecuaciones son integrables.

En segundo lugar, si la solución es única ó si existen varias soluciones.

Empecemos por el tipo de la ecuación en diferenciales parciales que antes considerábamos, y que era éste:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right) = 0 \qquad (J)$$

Resolver esta ecuación diferencial es buscar una expresión de V en función de las q y de t que, sustituída en la ecuación precedente, la satisfaga.

Es decir, que diferenciando este valor

$$V = V(q_1, q_2, q_3, t)$$

con relación á t y después con relación á q_1, q_2, q_3, y sustituyendo todas estas expresiones en *(J)*, con lo cual el primer miembro sólo contendrá las cuatro variables independientes q_1, q_2, q_3, t, será preciso, para que V sea una solución, que todas estas cantidades se destruyan entre sí, quedando el primer miembro reducido á cero para que se tenga

$$0 = 0.$$

Pero, suponiendo que el problema sea posible, hay que ver si existen varias soluciones, porque respecto á las ecuaciones diferenciales podemos repetir lo que antes decíamos de las ecuaciones ordinarias.

La ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$ no tiene una solución única. S para y se encuentra por una cuadratura la función

$$y = \int f(x)\, dx = \varphi(x),$$

que sustituída en la ecuación diferencial la satisface, esta solución no es única, puesto que todos los valores de y de esta forma

$$y = \varphi(x) + C,$$

siendo C una constante arbitraria, son otras tantas soluciones de la ecuación diferencial propuesta.

No hay una solución, hay infinitas, que, geométricamente, constituyen un sistema de curvas.

Del mismo modo, la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

no tiene una solución única, sino infinitas soluciones, puesto que la integral

$$\varphi(x, y, C) = 0$$

contiene una constante arbitraria.

Todo esto es elemental; lo saben mis alumnos, y sólo lo recuerdo porque en la enseñanza conviene ir enlazando lo más elemental con lo más elevado, de una manera gradual y lenta que no haga difícil ó imposible la subida.

Generalizando, pues, tales ideas, diremos que la ecuación en diferenciales parciales *(J)*, que es la que vamos á estudiar, tiene diferentes soluciones, y la función V puede tener diferentes formas, satisfaciendo todas ellas á la ecuación diferencial.

Puede tener, dejando aparte el problema de las soluciones singulares, soluciones particulares, que serán *casos particulares* de la *solución general.*

Pues entre las soluciones particulares hay una importantísima, fundamental, la única, por el pronto, que nos interesa, que es la que se llama *integral completa,* y que contiene tantas constantes arbitrarias, como hay variables independientes.

De modo que su forma es:

$$V = V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3, h).$$

Es decir, que V es función, naturalmente, de las cuatro variables independientes q_1, q_2, q_3, t, y de cuatro constantes arbitrarias, a_1, a_2, a_3, h.

Existe, por último, una integral general, la más general posible, que contiene, no ya *constantes arbitrarias*, sino *funciones arbitrarias.*

Y esto no debe extrañarnos en las ecuaciones diferenciales parciales, porque, naturalmente, ocurre, y así se demuestra, que las soluciones generales de estas ecuaciones deben contener funciones arbitarias.

Por ejemplo, supongamos un caso particular

$$A\frac{\partial V}{\partial x} + B\frac{\partial V}{\partial y} + C\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

en que V es la función, x, y, z las variables independientes, y A, B, C funciones de estas variables independientes, pero no de la fuución V.

Pues yo digo, sin profundizar el problema, que aun en este caso sencillísimo deben aparecer funciones arbitrarias.

Porque, en efecto, sea V_1 una solución de la ecuación precedente, es decir, que se tiene idénticamente:

$$A(x, y, z)\frac{\partial V_1}{\partial x} + B(x, y, z)\frac{\partial V_1}{\partial y} + C(x, y, z)\frac{\partial V_1}{\partial z} = 0.$$

Si V_1 es una solución, es evidente que cualquier función arbitraria de V_1 también lo será.

Es decir, que representando por ψ una función arbitraria,

$$\psi(V_1)$$

será una solución de la ecuación diferencial.

Sustituyamos y tendremos

$$A\frac{\partial[\psi(V_1)]}{\partial x}+B\frac{\partial[\psi(V_1)]}{\partial y}+C\frac{\partial[\psi(V_1)]}{\partial z}=0;$$

ó efectuando las diferenciaciones, y observando que ψ es función de V_1, y V_1 función de x, y, z, resultará

$$A\frac{\partial\psi}{\partial V_1}\frac{\partial V_1}{\partial x}+B\frac{\partial\psi}{\partial V_1}\frac{\partial V_1}{\partial y}+C\frac{\partial\psi}{\partial V_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}=0,$$

y sacando $\frac{\partial\psi}{\partial V_1}$, factor común,

$$\frac{\partial\psi}{\partial V_1}\left[A\frac{\partial V_1}{\partial x}+B\frac{\partial V_1}{\partial y}+C\frac{\partial V_1}{\partial z}\right]=0.$$

Y como V_1 es solución de la ecuación diferencial, el paréntesis es nulo y resulta la identidad

$$0=0.$$

Si esto sucede para una ecuación tan sencilla como la que hemos considerado, fácilmente podremos preveer que, si al integrar ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen constantes en las integrales, al integrar ecuaciones en diferenciales parciales es natural que aparezcan funciones arbitrarias.

Y claro es que puede seguirse el método inverso, como en todas las obras de cálculo; problema que se estudia con el título de *formación de ecuaciones diferencias*. Se parte de ecuaciones finitas con funciones arbitrarias; se diferencia según convenga, y se eliminan dichas funciones arbitrarias de modo que no quede rastro de ellas en las ecuaciones diferenciales: y así las integrales contenían funciones arbitra-

rias que no contienen las ecuaciones diferenciales propuestas. Baste con este recuerdo sobre una teoría que mis alumnos conocen seguramente.

Además, en las ecuaciones diferenciales hay, como antes indicamos, otras soluciones, á que se da el nombre de singulares.

Mas todas éstas son cuestiones ajenas á nuestro objeto, y sólo las recuerdo para ir orientando á mis alumnos.

De las soluciones particulares, de las soluciones generales, de las soluciones singulares y de las *soluciones completas*, sólo en estas últimas hemos de fijarnos, porque son las únicas que tienen relación directa con el teorema de Jacobi.

Como hemos dicho antes, estas expresiones de V son soluciones de la ecuación diferencial y contienen cuatro constantes arbitrarias; de modo que su forma será:

$$V = V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3, h).$$

Sea dicho en términos generales.

Mas para nuestro caso sólo necesitamos considerar tres constantes arbitrarias a_1, a_2, a_3, tantas como funciones, que para simplificar hemos supuesto que eran también tres q_1, q_2, q_3.

La cuarta constante h, de la cual no vamos á hacer uso, podemos suponer que es *aditiva*, ó llámese *adicional*.

Y en este caso la integral completa tendrá esta forma:

$$V = V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3) + h.$$

Tal es la forma que consideraremos para la integral completa, y en el teorema, como hemos dicho, y como vamos á ver, no entrará para nada la constante h.

En resumen, hemos de considerar una ecuación en diferenciales parciales puesta bajo esta forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right) = 0 \qquad (J)$$

en la que V es la función y q_1, q_2, q_3, t las variables independientes. No entra en la ecuación la función V, sino sus cuatro derivadas con relación á las variables independientes q_1, q_2, q_3, t.

Y, por último, se ha despejado con relación á una de las derivadas parciales, á saber, con relación á $\frac{\partial V}{\partial t}$.

En rigor, á esta forma pueden reducirse las ecuaciones diferenciales de una función y diversas variables independientes, y en esto se funda el método de integración de Jacobi; pero nosotros prescindimos de todas estas cuestiones: casi pudiera decirse que consideramos las cuestiones inversas. Más claro: no la integración de ecuaciones diferenciales por ecuaciones diferenciales ordinarias, ó, como nosotros las llamamos, ecuaciones diferenciales simultáneas; sino precisamente el problema inverso: integración de las simultáneas de Hamilton por la integración en diferenciales parciales de Jacobi.

Para nuestro teorema, que pronto vamos á enunciar, no necesitamos, según hemos dicho, integrar con toda su generalidad la ecuación de Jacobi, sino únicamente obtener una *integral completa* tal como la hemos definido,

$$V = V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3) + \text{constante} \qquad (V)$$

Este valor de V sustituído en (J), la convierte en una identidad. En primer lugar, como la V no entra mas que por derivadas, la constante adicional desaparece; y como (V) es una solución de (J), la satisfará *idénticamente*. Es decir que, por sí, desparecerán las q, las a y la variable t y quedará la identidad

$$0 = 0.$$

Siento insistir en estas pequeñeces; pero á veces las dudas de los alumnos dependen de no fijarse bien en ellas.

Pequeñeces como son, para el principiante pueden convertirse en montañas insuperables, si no se hace cargo de su pequeñez.

Quiero significar con esto, que me refiero al adverbio *idénticamente* y que en él fijo la atención. Una cosa es que en una ecuación haya que dar ó puedan darse valores á ciertas cantidades para que la ecuación quede satisfecha, y otra cosa es que la ecuación por sí, sin introducir en ella ninguna modificación, sea una identidad ó esté *idénticamente* satisfecha.

Por ejemplo:

$$a\,x + b = 0$$

no es una identidad, es una *ecuación* que podrá quedar satisfecha dando á a, b, x valores convenientes.

En cambio,

$$-a\,\frac{b}{a} + b = 0$$

es una identidad. Para todos los valores imaginables de a, b, siempre da $0 = 0$.

Otro ejemplo:

$$\text{sen}\,(a + x) - \text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,b \cos a = 0$$

tampoco es una identidad. Para que quede satisfecha es preciso dar á a, b, x ciertos valores.

En cambio, si ponemos en vez de x la cantidad b, el resultado

$$\text{sen}\,(a + b) - \text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,b \cos a = 0,$$

á pesar de que no entran mas que transcendentes, que al parecer complican la ecuación, se sabe que es *una identidad*.

Dentro de la forma transcendente puede decirse que la a y b se destruyen. Por eso, sea cual fuere el valor de a y el de b, la ecuación queda siempre satisfecha, y este es el ca-

rácter fundamental de *las identidades: el de quedar satisfechas para todos los valores de las cantidades á que se refieren.*

Por eso, las identidades, como tales identidades, mientras no se combinen con otras ecuaciones, no pueden utilizarse para despejar incógnitas.

En la ecuación trigonométrica anterior no podremos obtener ni el valor de a ni el de b, porque todos los valores imaginables de estas cantidades satisfacen á la igualdad.

Las fórmulas de Green y Stockes, que estudiamos en otro curso, como entonces decíamos, pertenecen á la categoría de las identidades. El segundo miembro es el primero puesto bajo otra forma.

Pues bien; la integral completa (V) satisface de este modo á la ecuación (J), convirtiéndola en una identidad, que quedará satisfecha sea cuales fueren los valores que demos arbitrariamente á q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3.

Comprendido esto, pasemos á las ecuaciones canónicas de la Mecánica.

*
* *

Supongamos, para simplificar la escritura y los cálculos, y sin que esto disminuya la fuerza de los argumentos que vamos á emplear, ni aminore su generalidad; supongamos, repito, que el problema de Mecánica admite talesenlaces que las variables independientes q_1, q_2 ..... q_n se reducen á tres.

A tres se reducirán las nuevas funciones que hemos introducido p_1, p_2, p_3, y las ecuaciones de la Mecánica, para este caso, puestas bajo la forma canónica conocida, serán las siguientes, las cuales se reducen á seis, como sabemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_1},\quad \dfrac{dq_2}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_2},\quad \dfrac{dq_3}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_3} \\ \dfrac{dp_1}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_1},\quad \dfrac{dp_2}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_2},\quad \dfrac{dp_3}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_3} \end{array}\right\} \quad (D)$$

en las que H es una función de forma perfectamente conocida *á priori* de las p, q y t, ó sea,

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t).$$

Estas ecuaciones, que generalmente se llaman ecuaciones diferenciales ordinarias, y que nosotros hemos llamado simultáneas, constituyen por sí solas, ó, mejor dicho, dan materia para diversas teorías y métodos de integración, aunque en verdad, ninguno sea definitivo é infalible.

No pretendemos explicarlos; nos basta con recordar los métodos llamados de *existencia de las integrales*, debidos en su origen á Cauchy y perfeccionados después.

Por desgracia, no abarcan el problema en general, pues suponen que los segundos miembros son funciones holomorfas, si se trata de variables imaginarias, ó, en suma, que son funciones que puedan desarrollarse por la serie de Taylor en series convergentes.

Cuando los segundos miembros cumplen con estas condiciones, el método de Cauchy es aplicable; pero se circunscribe, por decirlo de este modo, á regiones limitadas de las diferentes funciones y de la variable independiente.

Obtenidas estas integrales, que algunos autores llaman *locales*, puede aplicarse al resultado otra teoría, que se designa con el nombre de *prolongación de la serie de Taylor*, ampliando la región primitiva.

Pero aun aquí el problema se complica por la presencia de los *puntos singulares*.

Hace años, en el Ateneo de Madrid, al explicar un curso sobre funciones de variables imaginarias, acudí á imágenes simbólicas de esta teoría, presentando superpuestas una serie de dobles hojas unidas como los pisos de una casa, y para facilitar el paso de unos á otros, por rectas paralelas al eje de las z, alrededor de las que podían construirse en los puntos singurales, algo así como escaleras de caracol.

uniendo estos diferentes niveles del sistema. Símbolo extraño, pero, á mi entender, clarísimo y sugestivo.

Mas ésta no es clase de Matemáticas puras, y debo limitarme al recuerdo de aquellas Conferencias.

Otras teorías se enlazan con el problema de la integración de ecuaciones simultáneas ó de ecuaciones diferenciales ordinarias, como es la teoría de los multiplicadores de Jacobi, la teoría de los grupos, la de las transformaciones infinitesimales; todas ellas representan esfuerzos prodigiosos á veces de los grandes matemáticos, sin que ninguno de ellos triunfe por completo de las insuperables dificultades de este problema, verdaderamente enorme.

Nos limitaremos, pues, á dos indicaciones generales:

Primera. Integrar el sistema (D) de ecuaciones diferenciales simultáneas ú ordinarias es buscar los valores de p y de q en función del tiempo y de seis constantes arbitrarias las a y las b.

Es decir:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 (t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \\ q_2 &= \alpha_2 (t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \\ q_3 &= \alpha_3 (t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \\ p_1 &= \beta_1 (t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \\ p_2 &= \beta_2 (t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \\ p_3 &= \beta_3 (t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \end{aligned}\right\} \quad (Y)$$

Expresiones tales, de las q y las p, que, sustituídas en las ecuaciones (D), las satisfagan idénticamente. O de otro modo: que hecha esta sustitución, t y las constantes han de desaparecer por sí, sin necesidad de darles valores particulares, reduciéndose unas con otras, y convirtiéndose las ecuaciones en identidades:

$$0 = 0.$$

La forma de las ecuaciones (Y) es la forma genuina y

general de las integrales más generales del sistema (D).

Las seis variables p y q han de ser funciones de t y deben contener seis constantes arbitrarias, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, porque en el instante inicial los valores de las p y de las q deben poder escogerse arbitrariamente; y como cualquier instante puede ser el instante inicial, también podrían determinarse estas constantes a, b por la condición de que para $t = t_0$ las p y las q tuvieran valores arbitrarios.

Todo esto se demuestra en la teoría de las ecuaciones diferenciales simultáneas; pero ni la teoría ni la demostración hemos de reproducirlas aquí.

Recordaré, sin embargo, á los alumnos la analogía entre este caso y otros aún más elementales.

Por ejemplo, en las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$dy = f(x)\,dx,\ dy = t(x, y)\,dx,$$

la integral general representa un sistema de curvas, y por eso contiene una constante arbitraria en uno y en otro caso, de los dos ejemplos citados; constantes que se determinan fijando un punto por el cual pase determinada curva.

Por ejemplo, la curva que pase por el punto cuyas coordenadas sean x_0, y_0, y como el punto es arbitrario (como lo es la constante de la integración), se dice que para un valor arbitrario de la variable independiente, por ejemplo, x_0, la función y ha de tomar un valor también arbitrario, y_0.

Pues bien; la condición inicial que antes fijábamos para la integración de las ecuaciones diferenciales simultáneas, no es mas que la generalización de este caso particular que hemos citado.

Si considerásemos el espacio de siete dimensiones, diríamos que un punto A estaba definido por siete coordenadas q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t, y que para el valor t_o podíamos tomar arbitrariamente los valores de las otras seis coordenadas; de modo que era hacer pasar una curva de este espacio superior por un punto determinado á voluntad.

Esto mismo puede explicarse de otro modo, considerando sólo seis coordenadas dependientes de un parámetro t.

Como no tenemos tiempo para tratar estas cuestiones, lo que precede debe considerarse únicamente como un símbolo propio para fijar las ideas en estas teorías, en que la intuición sensible falta, á veces, para ayudar al análisis.

Resulta, de todas maneras, que integrar las ecuaciones simultáneas, ó sean las canónicas de Hamilton, es, como antes explicábamos, buscar para $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ funciones de t y de seis constantes arbitrarias que satisfagan á dichas ecuaciones diferenciales.

***

En resumen, el *teorema de Jacobi*, que explicaremos en la conferencia inmediata, considera á la vez:

1.° La ecuación de Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right) = 0$$

que es una ecuación en diferenciales parciales de primer orden de una función V, y de cuatro variables independientes q_1, q_2, q_3, t, advirtiendo que la función V no entra en la expresión diferencial mas que por sus derivadas; lo cual siempre puede hacerse, dicho sea entre paréntesis, por una transformación elemental del análisis.

2.° Las seis ecuaciones diferenciales ordinarias, ó, si se quiere, simultáneas

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

que son las ecuaciones de la Mecánica para el caso $k = 3$.

Contienen estas ecuaciones seis funciones $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ y una variable independiente t que es el tiempo.

Estas ecuaciones, es decir, la de Jacobi y las de Hamilton,

en el fondo del análisis, constituyen un problema único.

Y así, para resolver la ecuación en diferenciales parciales por el método de Jacobi, se puede acudir á las ecuaciones de Hamilton.

Y recíprocamente, y éste es nuestro caso, porque lo que á nosotros nos interesa es integrar las ecuaciones del movimiento, que son las ecuaciones de diversos problemas de la Física Matemática; para integrar las de Hamilton se puede acudir á las ecuaciones en diferenciales parciales de Jacobi.

Tal correlación entre unos y otros problemas no deja de causar cierta extrañeza a los principiantes; porque, en rigor, la ecuación (J) y las ecuaciones (H) expresan problemas distintos.

En la ecuación de Jacobi, como hemos dicho tantas veces, la función es una, V, y las variables son cuatro, q_1, q_2, q_3, t.

Y en las ecuaciones de Hamilton las funciones son seis, $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$, y la variable independiente una sola, t.

Pero esta duda se resuelve fácilmente, como ya veremos.

Por otra parte, ha de confesarse que causa. más que sorpresa, cierta desilusión, apoyar los métodos para resolver las ecuaciones simultáneas en las ecuaciones diferenciales parciales, y buscar las soluciones de éstas en la integración de las ecuaciones simultáneas.

Es algo así como un círculo vicioso.

Y es que todas estas teorías son inmensamente difíciles y, como castillejos de cartas, necesitan apoyarse unas en otras.

Esto, á pesar de los grandes esfuerzos y de los prodigios de ingenio de una larga serie de admirables matemáticos.

No todo está resuelto en la Física Matemática, aunque logre reducir sus problemas á problemas de la ciencia pura.

Que en la ciencia pura, como en la ciencia aplicada, más son los nubarrones obscuros que los rayos de luz vibrante.

XLI. — Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowsky.

POR B. CABRERA.

(Continuación.)

CAPITULO V

LAS ECUACIONES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO Y LOS FENÓMENOS EN LOS CUERPOS EN MOVIMIENTO

49. Tanto como aplicación del cálculo vectorial que nos ha ocupado en los anteriores capítulos, como por vía de introducción á la teoría del espacio de Minkowski, juzgamos conveniente intercalar el presente capítulo, destinado á obtener las ecuaciones generales del campo electromagnético, y demostrar que cuando se las aplica á los cuerpos en movimiento, conducen á resultados contradictorios. Esta incapacidad para contener los fenómenos en cuestión ha puesto en evidencia, que el cuadro dentro del cual aquellas ecuaciones pretendían encerrar la naturaleza, es demasiado estrecho, y la índole misma de aquellas contradicciones ha señalado la dirección en la cual era menester ensancharlo. Por eso conceptuamos el medio más apropiado por vencer la resistencia que encuentran en los principiantes las extraordinarias ideas que hemos de exponer en los siguientes capítulos, poner ante todo de manifiesto el origen de las mismas.

50. *Campo eléctrico.*—Dos cuerpos electrizados, de dimensiones despreciables comparadas con su distancia, se atraen ó repelen en razón inversa del cuadrado de esta última y proporcionalmente á dos coeficientes característicos de

la electrización de cada uno de dichos cuerpos, á los que se denomina *cargas eléctricas*. Además, la naturaleza del medio en que se encuentran sumergidos, influye mediante otro factor, llamado *poder inductor específico*.

Esta ley, formulada primeramente por Coulomb en su primera parte, encuentra su demostración experimental en la conformidad de los resultados por ella previstos con los hechos observados, mejor que en los propios experimentos instituídos para comprobarla directamente.

La expresión vectorial que traduce su enunciado será

$$(a) \qquad \vec{\varphi} = \frac{e e'}{K r^2} \vec{r^0},$$

donde $\vec{\varphi}$ es la fuerza que se ejerce sobre cada uno de los cuerpos, e y e' sus cargas eléctricas, r la distancia y K el poder inductor específico. El argumento $\vec{r^0}$ lo supondremos dirigido desde el cuerpo e, que admitimos ejerce la acción hacia aquel que la sufre, e'. Así, cuando los signos de e y e' son iguales $\vec{\varphi}$ tiende á aumentar r, mientras que lo contrario ocurre si dichos signos son opuestos.

En la expresión anterior conviene separar el factor e' de todos los restantes, pues si en el mismo punto colocásemos otro cuerpo con carga e'' la acción que sufriría sería siempre el producto de e'' por el conjunto de dichos factores. De otro modo, así como e' hemos dicho que caracteriza al cuerpo electrizado,

$$\vec{E} = \frac{e}{K r^2} \vec{r^0}$$

define el resto de las condiciones del sistema.

Cuando sobre el mismo cuerpo e' actúan varios, $e_1, e_2 \ldots\ldots$, cada uno de ellos ejercerá su acción particular, definida por

una fórmula análoga á la (a), y la fuerza total que solicita á e' será

$$\vec{\Phi} = e' \Sigma \vec{E_i} = \vec{E} e'.$$

El vector $\vec{E}$, que nos permite calcular la acción total que sufre un cuerpo electrizado cualquiera colocado en el punto en cuestión, sin más que multiplicarle por su carga, se denomina *campo eléctrico*.

Se comprende que para conocer $\vec{E}$ se necesita saber el valor y la situación de las distintas cargas eléctricas, á más del valor de K que caracteriza al medio. En lo que llevamos dicho, hemos supuesto que las cargas eléctricas se encontraban situadas en cuerpos de dimensiones despreciables. No siempre es esto exacto, ó por lo menos, no siempre es cómodo atenerse á tal supuesto; pero es fácil pasar al caso en que el cuerpo que determina la acción tiene dimensiones finitas, tan grandes como se quieran, y cada uno de sus puntos está electrizado con cargas distintas. Podemos siempre dividirle en porciones suficientemente pequeñas para que en cada una de ellas el estado eléctrico sea uniforme, en cuyo caso podremos escribir

$$e = \rho d V,$$

siendo ρ una función en general continua. La analogía de esta definición de ρ con la de una densidad de materia hace que se le denomine densidad eléctrica.

El valor del campo será entonces la suma de los vectores que corresponden á cada una de dichas porciones infinitamente pequeñas, de forma que

$$\vec{E} = \int \frac{\rho d V}{K r^2} \vec{r^0}$$

Hasta aquí nada hemos dicho respecto al valor de K.

Claro es que, siendo característico del medio, puede en general ser variable de un punto á otro, y además demuestra la experiencia que en los medios anisótropos tiene valores definidos por un triple tensor simétrico. Pero tanto en el primero como en el segundo caso, la fórmula que hemos dado para $\vec{\varphi}$ no es exacta, de suerte que, implícitamente, hemos supuesto la homogeneidad é isotropía absolutas del medio, hipótesis que continuaremos admitiendo salvo advertencia en contrario. Por otra parte, la experimentación únicamente nos permite hallar la relación de los valores de K para dos medios distintos, de suerte que podremos fijar arbitrariamente su valor absoluto para un medio particular, y, según sea el adoptado, tendremos un sistema particular de unidades de medidas. En adelante supondremos que en el vacío $K = 1$, con lo cual, en definitiva,

$$\vec{E} = \int \frac{\rho\, dV}{r^2} \vec{r^0}.$$

Si recordamos lo dicho en el capítulo III (párrafo 26), se deduce: primero, que $\vec{E}$ admite una función potencial φ tal que

$$\vec{E} = \text{grad}\, \varphi,$$

y segundo, que entre ρ y $\vec{E}$ existe la relación

$$\text{(I)} \qquad 4\pi\rho = \text{div}\, \vec{E},$$

que es la primera ecuación fundamental del campo electromagnético.

Antes de pasar adelante insistamos un poco sobre la significación física de las magnitudes que en ella figuran. Tres distintas teorías se han formulado para ello: en la más antigua se supone que ρ es la medida de una entidad física,

la electricidad, capaz de ejercer acciones á distancia obedeciendo á las leyes de Coulomb, mientras que $\vec{E}$ es una entidad meramente analítica, útil para el cálculo de los fenómenos, pero que por sí misma nada representa. Más tarde Faraday, y luego Maxwell, dando forma analítica á estas ideas, adoptaron el criterio completamente opuesto; según ellos, $\vec{E}$ mide una deformación real del medio, deformación que se manifiesta por atracciones y repulsiones entre ciertos lugares del espacio, donde se encuentran localizadas ciertas particularidades de dicha deformación medidas por div. $\vec{E}$, cuyo valor numérico se designa por ρ. Así ρ es pura y simplemente una función analítica de $\vec{E}$· un invariante del vector $\vec{E}$. Dicho se está que ρ define aqui también una realidad física, pero realidad subordinada á $\vec{E}$; modo particuiar de ser de $\vec{E}$, como el torbellino es un modo particular del ser del movimiento del flúido.

Para Maswell la distribución de ρ en el espacio es, en general, continua, sin que exista limitación alguna para el valor de la integral de dicha magnitud dentro de las regiones en que ρ no sufre ninguna discontinuidad. Esta hipótesis implicita de Maxwell, consecuencia natural del concepto secundario de ρ, ha sido contradicha por la experiencia. Esta ha demostrado que ρ únicamente es diferente de cero en porciones limitadas y pequeñísimas del espacio, cumpliéndose, además, para todas ellas, la condición de que la integral de dicha función para cada una de estas porciones es una constante universal. De esta suerte, la noción de las cargas eléctricas como magnitudes fundamentales, en el sentido de la teoría clásica, se ha impuesto, pero no por ello ha desaparecido la noción del campo en la forma que le dió Maxwell. La nueva teoría ha venido á ser como una fusión de los dos puntos de vista clásicos. Sin embargo,

conviene adelantar que la teoría fundada en el principio de relatividad, tiende á aproximarse más á las ideas primitivas.

51. *Campo magnético.*—Es sabido que los experimentos de Biot y Savart, referentes á la acción que las corrientes ejercen sobre un pequeño imán colocado en sus proximidades, pueden interpretarse, según demostró Laplace, suponiendo que cada uno de los elementos de longitud dl del conductor ejerce sobre cada polo del imán una fuerza cuyo módulo es

$$\frac{I\,dl\,\text{sen}\,(\vec{I}\;\vec{r}^{\,0})}{c\,r^2}\,m,$$

donde I es la intensidad de la corriente, r la recta que une el elemento con el polo de imán m, y C un coeficiente de proporcionalidad. El argumento es perpendicular al plano $I\,r$, y dirigido de tal suerte, que $\vec{I}$, $\vec{r}^{\,0}$ y dicho argumento tienen la misma posición relativa que los ejes coordenados fundamentales que hemos elegido. Así resulta inmediatamente para expresión vectorial de dicha acción

$$\vec{dF} = \frac{m\,dl}{c\,r^2}\,\left|\vec{I}\;\vec{r}^{\,0}\right|.$$

Existe en esta fórmula, como en la de Coulomb, un factor m dependiente del imán empleado para realizar el experimento y un conjunto de otros varios factores que es independiente de dicho imán, y al cual llamaremos *intensidad del campo magnético* del elemento de corriente

$$\vec{dH} = \frac{dl}{c\,r^2}\,\left|\vec{I}\;\vec{r}^{\,0}\right|.$$

En esta fórmula podemos reemplazar en vez de $\vec{I}$ la densidad de corriente $\vec{i}$, ligada á ella por la relación $\vec{I} = \vec{i}\,ds$,

donde ds es la sección del conductor. Además, teniendo en cuenta que $ds \cdot dl$ es el elemento de volumen dV del conductor, podemos escribir en general, efectuando la integración sobre todo el volumen ocupado por las corrientes,

$$\vec{H} = \int \frac{\left| \vec{I} \; \vec{r^0} \right|}{c\, r^2} dV.$$

Comparando esta fórmula con la obtenida en el capítulo III (párrafo 32), se reconoce inmediatamente que $\vec{H}$ es vector solenoidal, de suerte que en todo el espacio se cumplirá la condición

$$\text{II} \qquad \operatorname{div} \cdot \vec{H} = 0,$$

que constituye la segunda ley de Maxwell.

52. *Relaciones entre los campos eléctrico y magnético.*— En segundo lugar, se reconoce que

$$(a) \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}$$

igualdad que vamos á generalizar. En efecto, esta fórmula exige que

$$\operatorname{div} \vec{i} = 0,$$

condición que se cumple sólo en casos muy especiales, entre los cuales se encuentran, evidentemente, los experimentos que nos han conducido á la ecuación discutida. Para comprobar tal aserto, veamos qué significa físicamente la indicada condición: $\vec{i}$ es la cantidad de electricidad que atraviesa la unidad de superficie en la unidad de tiempo, de suerte que si trazamos una superficie cualquiera en el espacio, la canti-

dad total de electricidad perdida en el interior de este volumen será igual al fiujo del vector $\vec{i}$ á través de dicha superficie; esto es,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_s \vec{i}\, \vec{ds}.$$

Pero en virtud del teorema de Gauss

$$\int_s \vec{i}\, \vec{ds} = \int_V \operatorname{div} \vec{i}\, dV,$$

luego

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0,$$

de donde, teniendo en cuenta que esta igualdad es independiente del volumen á que se extiende la integración,

$$\operatorname{div} \vec{i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

que nos dice que para que se cumpla la condición $\operatorname{div} \vec{i} = 0$ es necesario que en todos los puntos del espacio $\rho = \text{const.}$

En todos los casos en que se trate de corrientes permanentes, como en los experimentos de Biot y Savart, se cumple esta circunstancia; pero en general ρ es variable en cada punto del espacio, á pesar de lo cual se produce un campo magnético idéntico al de las corrientes permanentes. La acción sobre la aguja magnética de la corriente de carga ó descarga de un condensador es un hecho conocido desde muy antiguo, y, sin embargo, ρ no permanece constante. Otro ejemplo importantísimo es el campo engendrado por un conductor electrizado en movimiento, campo previsto por Maxwell y determinado primeramente por Rowland; eviden-

temente, en los puntos del espacio que el conductor abandona $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$, y en aquellos otros donde llega $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$.

Según esto, la ecuación (a) no contiene la ley completa que investigamos; falta en ella algún término que compense la incompatibilidad experimental señalada. Ahora bien: lo dicho hace presumir el término en cuestión. Si, en efecto, derivamos la ecuación I respecto del tiempo

$$4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

de suerte que

$$\operatorname{div} \left(\vec{i} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Se reconoce que el vector $\vec{i} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ es solenoidal en todo caso, y, por consiguiente, parece natural sustituir en (a) $\vec{i}$ por $\vec{i} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Por lógica que sea la generalización que acabamos de realizar, es necesaria una comprobación experimental directa, habida cuenta de que se trata de una ley fundamental. Esta prueba la suministran los varios experimentos realizados para determinar el campo magnético engendrado por una carga eléctrica en movimiento.

Recordemos que, en virtud del teorema de Stockes,

$$\int_s \operatorname{rot} \vec{H}\, \vec{ds} = \int_c \vec{H}\, \vec{dl},$$

donde la integral del segundo miembro se refiere á una curva cualquiera cerrada, y la del primero á cualquier superficie

que tiene esta curva por contorno. Pero si reemplazamos rot $\vec{H}$ por su valor,

$$\int_C \vec{H}\,\vec{dl} = \int_s \frac{4\pi}{c}\left(\vec{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{\partial t}\right)\vec{ds}.$$

Consideremos, en particular, una carga eléctrica e, que se mueve con la velocidad constante $\vec{V}$. Tomemos para C una

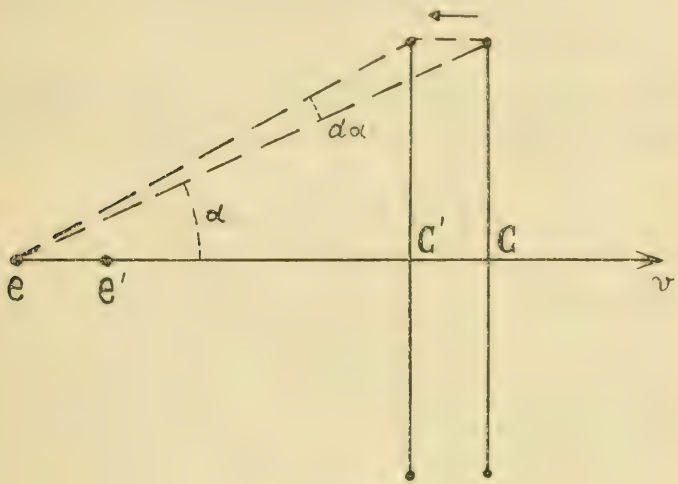


Figura 19.

circunferencia, cuyo centro esté sobre V y cuyo plano sea perpendicular á dicha línea: s será el círculo correspondiente. Inmediatamente se reconoce que para este caso particular $\vec{i} = 0$; de suerte que la integral del segundo miembro se convierte en

$$\int \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{ds} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\,\vec{ds}.$$

Mas $\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\,\vec{ds}$ es la variación que sufre el flujo eléc-

trico á través de C, debido al movimiento de e. Como aquí sólo influye el movimiento relativo, podemos suponer que, en vez de moverse e en el sentido de la flecha, lo hace C en dirección opuesta, pasando á C'. Para un corrimiento igual á Vdt, la variación del fiujo será igual al que atraviesa la superficie barrida por la línea C, suponiendo que e permanece estacionario. Su valor es

$$\frac{e}{4\pi r^2} \operatorname{sen} \alpha \cdot 2\pi r \operatorname{sen} \alpha \cdot V.$$

Por otra parte, por razón de simetría, $\vec{H}$ será constante en todos los puntos de C, de suerte que

$$\int_C \vec{H}\, \vec{dl} = \vec{H}\, 2\pi r \operatorname{sen} \alpha$$

de suerte que

$$H = \frac{ev}{4\pi c r^2} \operatorname{sen} \alpha$$

y, por consiguiente,

$$\vec{H} = \frac{e}{4\pi c r^2} \left| \vec{V}\, \vec{r^0} \right|,$$

fórmula que confirman todas las medidas experimentales.

Si se compara este valor de $\vec{H}$ con la fórmula de Laplace, se reconoce que una carga eléctrica en movimiento engendra el mismo campo que un elemento de corriente para el cual $\vec{i}\, dV = \vec{e}V$. Esta consideración consiente eliminar el concepto de densidad de corriente, reemplazándole por el de cargas eléctricas en movimiento, sustitución que permite introducir la teoría de los electrones en esta clase de fenómenos. Resulta, pues, que

$$\vec{i} = \frac{e}{dV}\vec{V} = \rho\vec{V},$$

III $$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\vec{V}\right)$$

que es la tercera ecuación de Maxwell.

53. Los experimentos de Faraday y Henry, que pusieron de manifiesto la inducción electromagnética, se sintetizan corrientemente en el enunciado siguiente: siempre que un conductor cerrado esté colocado en un campo magnético de intensidad variable, en dicho conductor se engendra una fuerza electromotriz, cuyo valor está definido en dirección y sentido por la fórmula

$$\int_C \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \frac{1}{c}\,\vec{H}\,\vec{ds}.$$

Esta ecuación liga una integral lineal referida á una curva cerrada, con una integral de superficie correspondiente á una cualquiera de las que admiten por contorno la línea C. Si no atendiéramos mas que á la parte analítica de la igualdad transcrita, haciendo caso omiso de su interpretación física, aplicando el teorema de Stockes al primer miembro, se convertiría en esta otra

$$\int_s \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \text{rot}\,\vec{E}\right)\vec{ds} = 0,$$

que se cumple para todas las superficies del mismo contorno, de suerte que es equivalente á la

(a) $$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Pero esta aplicación del teorema de Stockes tropieza con una dificultad de orden físico; el vector $\vec{E}$ tiene una signifi-

cación perfectamente definida en el interior del conductor donde se desarrollan las corrientes inducidas; pero no podemos afirmar lo mismo cuando nos salimos de él, y dicho se está que la aplicación del teorema en cuestión supone implícitamente la existencia del vector en todo el espacio. Si, pues, damos á la ley general de la inducción la forma (*a*), formulamos una hipótesis: fuera de los cuerpos conductores se produce también una fuerza electromotriz de inducción, cuando el campo magnético varía. Pero esto no basta, siendo indispensable completar la hipótesis haciendo ver qué fenómenos puede engendrar dicha fuerza en tales condiciones.

Si se tiene en cuenta que la fuerza electromotriz pone en movimiento las cargas eléctrícas en el seno de los conductores, parece natural admitir que dicha magnitud es idéntica al campo eléctrico. De otra manera: un campo magnético variable, engendra un campo eléctrico determinado por la ecuación (*a*), campo que en los aisladores determina idénticos fenómenos que los campos electrostáticos ordinarios, mientras en los conductores producen la corriente eléctrica.

La comprobación más inmediata de la hipótesis en cuestión es demostrar que un cuerpo electrizado, situado en un campo magnético variable, sufre una acción que le pone en movimiento, igual en módulo y argumento al valor de $\vec{E}$, deducido de (*a*), que sería, aplicando un teorema conocido del cálculo vectorial,

$$\vec{E} = -\int \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} r^0 \right| \frac{d\lambda}{cr^2}.$$

Esta comprobación fué intentada primeramente por Lodge, que obtuvo resultados positivos, siquiera fuesen meramente cualitativos. Posteriormente, Cremieu hubo de intentar una comprobación más perfecta, pero no logró denunciar acción alguna, á pesar de que los métodos puestos en práctica parecían irreprochables. Si se compara la fórmula anterior con

la del campo magnético de una corriente que hemos escrito más arriba, se reconoce que el campo eléctrico exterior engendrado por una bobina cilíndrica indefinida, está dado por la misma fórmula, con el signo cambiado, que el campo magnético de una corriente rectilínea indefinida:

$$\vec{E} = -2\left(\frac{s}{ca}\right)\left|\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\,\vec{a}^{0}\right|$$

donde $\vec{a}$ es el vector distancia del eje de la bobina al punto donde se determine el campo. Como $H = 4\pi n_1 i$, siendo n_1 el número de vueltas de hilo por unidad de longitud é i la intensidad de corriente, si suponemos que i crece proporcionalmente al tiempo partiendo de cero, $\frac{\partial H}{\partial t} = 4\pi n_1 \frac{i}{t}$;

de suerte que el módulo de $\vec{E}$ será

$$E = \pi 8 \frac{s n_1 i}{cat}.$$

Así, pues, midiendo E con un electrómetro, y todas las magnitudes que figuran en el segundo miembro, puede comprobarse la legitimidad de la hipótesis formulada. Tal es, en sus grandes líneas, el método puesto en práctica por Cremieu con resultados negativos, según hemos dicho.

Posteriormente J. M. Kuehne ha señalado una causa de error en los experimentos de Cremieu, y repitiéndolos, previa su eliminación, ha logrado demostrar la exactitud de la fórmula estudiada. De esta suerte queda experimentalmente demostrada la fórmula

$$\text{IV} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

que constituye la cuarta ecuación del campo electromagnético.

(Continuará.)

XLII. — Geometría Analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades.

Por Modesto Domínguez Hervella.

(Conclusión.)

Caso 2.° Si los factores están en un mismo meridiano de distinto lado del eje real, y tomamos colatitudes positivas será

$$\alpha' - \beta' = \pi^{\pi}, \quad \cos(\alpha' - \beta') = -1,$$
$$\cos\beta' = -\cos\alpha', \quad \operatorname{sen}\beta' = -\operatorname{sen}\alpha'$$

y la fórmula (13) se convierte en

$$1_{\beta\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'-\pi} = -1 + (\cos\alpha + \cos\beta) \times$$
$$\times \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\,(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\alpha'}{1 + \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$
$$= -1 + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \times$$
$$\times \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha'\right)}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

y suprimiendo el factor común $2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ queda

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'-\pi} = -1 + 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \times$$
$$\times \left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha'\right)$$

y finalmente

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'-\pi} = \cos(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \times$$
$$\times \left(\sqrt{-1} \cos \alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \operatorname{sen} \alpha'\right) = 1_{(\alpha-\beta)|\alpha'} \qquad (15)$$

Al mismo resultado se llega poniendo $-\beta$ en lugar de β en la fórmula (14), es decir, suponiendo negativa la colatitud del segundo factor, comprobándose una vez más que

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'-\pi} = 1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{-\beta|\alpha'}.$$

Si $\alpha > \beta$, la colatitud $\alpha - \beta$ es positiva, lo cual indica que el producto está en el semimeridiano del factor $1_{\alpha|\alpha'}$.

Si $\beta > \alpha$ es negativa la colatitud del producto y ésta se encuentra en el semimeridiano opuesto α', ó sea el de longitud $\beta' = \alpha' - \pi$.

En resumen, *cuando los dos factores están en un mismo meridiano, de distinto lado del eje, el producto está en el semimeridiano de mayor colatitud.*

Si se ponen los factores bajo la forma $1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{-\beta|\alpha'}$, la suma de las colatitudes es $\alpha - \beta$, y la fórmula (14) se convierte en la (15).

Caso 3.º $\alpha = \beta$. Las colatitudes de los factores son iguales. Las fórmulas (9) y (10) se convierten en

$$\cos \mu' = \frac{\operatorname{sen} \alpha (\cos \alpha' + \cos \beta')}{\operatorname{sen} \alpha \sqrt{2 [1 + \cos(\alpha' - \beta')]}} = \frac{2 \cos \frac{\alpha' + \beta'}{2} \cos \frac{\alpha' - \beta'}{2}}{2 \cos \frac{\alpha' - \beta'}{2}} = \cos \frac{\alpha' + \beta'}{2}$$

$$\operatorname{sen} \mu' = \frac{\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \beta')}{\operatorname{sen} \alpha \sqrt{2 [1 + \cos(\alpha' - \beta')]}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha' + \beta'}{2} \cos \frac{\alpha' - \beta'}{2}}{2 \cos \frac{\alpha' - \beta'}{2}} = \operatorname{sen} \frac{\alpha' + \beta'}{2}$$

Resulta que $\mu' = \frac{\alpha' + \beta'}{2}$, es decir, que *el producto de los*

factores que tienen igual calatitud está en el plano bisector del ángulo de los meridianos de los factores.

En este caso, el paralelógramo esférico se reduce á un rombo, y sus arcos diagonales son bisectores de los ángulos.

Caso 4.° $\alpha + \beta = \pi$. Las colatitudes son suplementarias; $\cos \beta = - \cos \alpha$, $\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \alpha$, y la fórmula (13) se reduce á $1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\pi-\alpha|\beta'} = -1$ á causa del factor $\cos \alpha + \cos \beta$ que ahora es igual á cero; pero en los casos en que el denominador sea cero, podrá la fracción tener otro valor. Para averiguar qué casos son éstos, introduzcamos en el denominador la condición $\alpha + \beta = \pi$, y se reduce á

$$1 - \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos (\alpha' - \beta') = \operatorname{sen}^2 \alpha \, [1 + \cos (\alpha' - \beta')].$$

La condición $\operatorname{sen}^2 \alpha \, [1 + \cos (\alpha' - \beta')] = o$ se satisface con $\operatorname{sen} \alpha = o$ ó $\cos (\alpha' - \beta') = -1$. Si $\operatorname{sen} \alpha = o$ será $\alpha = o$ y $\beta = \pi$ ó $\alpha = \pi$ y $\beta = o$; en uno y otro caso los dos factores son $+1$ y -1 y su producto es -1.

Si $\cos (\alpha' - \beta') = -1$ será $\alpha' - \beta' = \pi$; hemos visto en el 2.° caso que introduciendo en la fórmula 13 esta condición se encuentra en el numerador y en el denominador el factor común $2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$ y suprimiéndolo, se llega á la fórmula (15), que no tiene denominador. Si en ella se introduce la condición $\alpha + \beta = \pi$ ó $\alpha - \beta = \pi - 2\beta$, se obtiene el producto

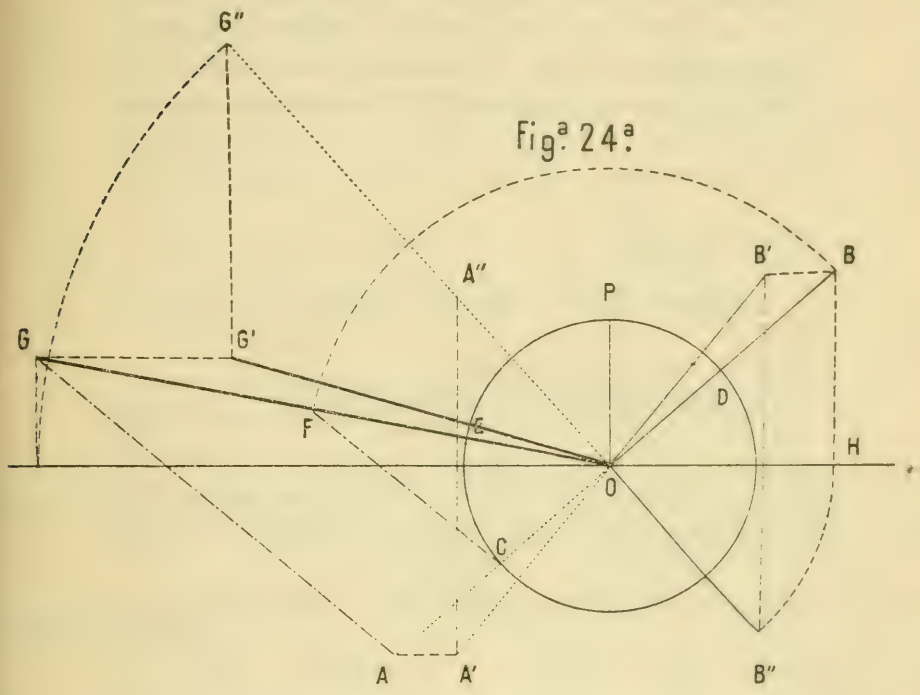
$$1_{\pi-\beta|\alpha'} \times 1_{\beta|\alpha'-\pi} = \cos (\pi - 2\beta) + \operatorname{sen} (\pi - 2\beta) \times$$
$$\times \left(\sqrt{-1} \cos \alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \operatorname{sen} \alpha'\right) = 1_{\pi-2\beta\,\alpha'}.$$

Los dos factores forman un diámetro de la esfera por estar en prolongación inversa uno de otro; por consiguiente, están en un mismo meridiano y en distintos semimeridianos, de modo que, refiriendo los dos factores á un mismo semimeridiano, esto es, á la misma longitud α', los factores pue-

den ponerse bajo la forma $1_{\pi-\beta|\alpha'} \times 1_{-\beta|\alpha'}$ y en virtud del primer caso se suman las colatitudes y el producto será $1_{\pi-2\beta|\alpha'}$.

Para la construcción gráfica de este producto, hagamos girar al meridiano de los dos factores alrededor del eje un ángulo $-\alpha'$ para que coincida con el principal.

Consideremos los dos factores $OA = a_{\pi-\beta}$, $OB = b_{-\beta}$



(fig. 24). Trazada la circunferencia de radio $OP = 1$, las colatitudes serán medidas por los arcos $PC = \pi - \beta$ $PD = -\beta$ negativo, porque se refiere al semimeridiano que contiene el factor $a_{\pi-\beta}$.

Ahora el paralelógramo esférico se reduce á la semicircunferencia de meridiano CPD y se obtiene la dirección del vector producto, llevando, á partir del punto C, la colatitud PD ó desde el punto D la colatitud PC.

Así se obtiene el punto E del vector producto. Si se hace girar el triángulo OPB en su plano alrededor del punto O, hasta que el lado OP coincida con OC, tomando la posición OCF; si se tira AG paralela á CF hasta encontrar á OF ó su prolongación, será OG la magnitud del producto; $PE = \pi - 2\beta$ su colatitud, y si HOA'' es la longitud del meridiano de los factores, ésta será la del producto, en el semimeridiano del factor OA que tiene mayor colatitud que OB.

Si se quieren las proyecciones del producto OG, que está en el meridiano principal, lo haremos girar alrededor de OP hasta que llegue al meridiano OA''; sus proyecciones serán:

$$OG'' = ab \operatorname{sen}(\pi - 2\beta)\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha'\right)$$

sobre el ecuador.

$$OG' = ab\cos(\pi - 2\beta) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(\pi - 2\beta)\cos\alpha')$$

sobre el meridiano principal.

Las proyecciones de los factores, son

$$\left.\begin{aligned} OA' &= a\left[\cos(\pi - \beta) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(\pi - \beta)\cos\alpha'\right] \\ OB' &= b\left[\cos(-\beta) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha'\right] \end{aligned}\right\} \text{sobre el meridiano principal}$$

$$\left.\begin{aligned} OA'' &= a\operatorname{sen}(\pi - \beta)\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha'\right)\Big] \\ OB'' &= b\operatorname{sen}(-\beta)\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha'\right)\Big] \end{aligned}\right\} \text{sobre el ecuador,}$$

siendo OB' y OB'' prolongaciones inversas de OA' y OA''.

Si además de ser

$$\alpha + \beta = \pi \text{ y } \alpha' - \beta' = \pi \text{ es } \alpha = \beta \text{ será } \alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{\pi}{2}$$

y la fórmula (15) será:

$$1_{\frac{\pi}{2}}\Big|_{\alpha'} \times 1_{\frac{\pi}{2}}\Big|_{\alpha' - \pi} = 1 + 0\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha'\right) = +1.$$

Resumiendo todo lo relativo al caso en que $\alpha + \beta = \pi$, vemos que, en general, *el producto de dos factores cuyas colatitudes son suplementarias es —1 con tal que los dos factores no estén en un mismo meridiano*. En este caso particular, los factores tienen direcciones opuestas; es decir, que coinciden con un mismo diámetro de la esfera, y el producto está en el semimeridiano de mayor colatitud. Si éstos son iguales, el diámetro que contienen los factores está en el ecuador, y el producto es $+1$.

47. De todo lo demostrado en estos casos particulares, se deduce que el producto de dos factores, situados en el ecuador, es negativo si no son opuestos y positivo si lo son; de modo que

$$\left(\pm\sqrt{-1}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)\left(\pm\sqrt{-1}\right) = -1$$

$$\left(+\sqrt{-1}\right)\left(-\sqrt{-1}\right) = \left(+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)\left(-\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right) = +1$$

Este resultado nos va á servir para averiguar qué condiciones se necesitan para que la multiplicación sea distributiva, sin dejar de ser como lo hemos definido.

Para que lo sea, se necesita que los nueve términos que resultan de multiplicar los tres términos de la expresión

$$1_{\alpha|\alpha'} = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha'\right)$$

por los de

$$1_{\beta|\beta'} = \cos\beta + \operatorname{sen}\beta\left(\sqrt{-1}\cos\beta' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\beta'\right)$$

den una suma igual á la de la fórmula (13)

Para mayor comodidad, reduzcamos á binomios los factores, poniendo

$$\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\alpha' = A,$$

$$\sqrt{-1}\cos\beta' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\beta' = B.$$

Los factores serán

$$1_{\alpha|\alpha'} = \cos\alpha + A \operatorname{sen}\alpha,$$
$$1_{\beta|\beta'} = \cos\beta + B \operatorname{sen}\beta.$$

En el caso particular en que $\alpha' - \beta = \pi$, los dos vectores ecuatoriales AB son opuestos, su producto será $+1$. Sin perjuicio de volver á este caso, vamos á considerar lo más general; que AB no son opuestos; por consiguiente, su producto es -1.

Si la operación es distributiva, será, teniendo en cuenta que $AB = -1$

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'} = \cos\alpha\cos\beta + A \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + B\cos\alpha \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta =$$
$$= \cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\left(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta'\right) +$$
$$+ \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\left(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\operatorname{sen}\beta'\right).$$

Igualando esta expresión con la fórmula (13), se tienen las tres ecuaciones

$$-1 + \frac{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha'-\beta')} = \cos(\alpha+\beta)$$
$$\frac{(\cos\alpha + \cos\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta')}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha'-\beta')} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta',$$
$$\frac{(\cos\alpha + \cos\beta)(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha'-\beta')} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\operatorname{sen}\beta'$$

La primera de estas ecuaciones se puede poner bajo la forma

$$\frac{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha'+\beta')} = 1 + \cos(\alpha+\beta).$$

Poniendo bajo la forma de producto el numerador y el

segundo miembro, y suprimiendo el factor $2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ queda

$$\frac{2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha'-\beta')}=1. \quad (16).$$

Las otras dos ecuaciones, con la misma modificación de $\cos\alpha+\cos\beta$, se pueden reemplazar por

$$\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\beta')}{1+\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha'-\beta')}$$
$$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta'; \quad (17)$$

$$\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')}{1+\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha'-\beta')}$$
$$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\operatorname{sen}\beta', \quad (18)$$

Dividiendo estas dos últimas por la (16), y la (18) por la (17),

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\beta')}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta'\\ \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\operatorname{sen}\beta',\end{aligned}\right\}(19)$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\beta'}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\alpha'+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta'}.$$

Quitando denominadores se destruyen dos términos:

$\text{sen}^2 \alpha \cos \beta \text{ sen } \alpha' \cos \alpha'$, y otras dos, $\text{sen}^2 \beta \cos \alpha \text{ sen } \beta' \cos \beta'$, y queda $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta, \cos \alpha \text{ sen } \alpha' \cos \beta' + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \beta \cos \alpha' \text{ sen } \beta' = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \beta \text{ sen } \alpha' \cos \beta' + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \alpha \cos \alpha' \text{ sen } \beta'$ suprimiendo el factor común $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$,

$$\cos \alpha \text{ sen } \alpha' \cos \beta' + \cos \beta \text{ sen } \beta' \cos \alpha' = \cos \beta \text{ sen } \alpha' \cos \beta' + \cos \alpha \text{ sen } \beta' \cos \alpha'$$

$$\cos \alpha (\text{sen } \alpha' \cos \beta' - \text{sen } \beta' \cos \alpha') = \cos \beta (\text{sen } \alpha' \cos \beta' - \text{sen } \beta' \cos \alpha')$$

$$\text{sen } (\alpha' - \beta') (\cos \alpha - \cos \beta) = 0$$

y restableciendo el factor suprimido se tendrá la condición

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta (\cos \alpha - \cos \beta) \text{ sen } (\alpha' - \beta') = 0$$

que se satisface con

$$\text{sen } \alpha = 0, \ \text{sen } \beta = 0, \ \cos \alpha = \cos \beta, \ \text{sen } (\alpha' - \beta') = 0$$

La cuarta condición se satisface con $\alpha' - \beta' = o$ ó con $\alpha' - \beta' = \pi$; de modo que aquí está comprendido el caso particular que hemos aplazado, y no hay necesidad de tratarlo separadamente, porque ya vemos que si $\alpha' - \beta' = \pi$, la operación es distributiva. En uno y otro caso, los dos factores están en un mismo meridiano. Si $\text{sen } \alpha = o$ ó $\text{sen } \beta = o$, uno de los dos factores está en el eje real, positivo si $\alpha = o$ ó $\beta = o$, y negativo si $\alpha = \pi$ ó $\beta = \pi$, y el factor que ocupa esta posición está en todos los meridianos, y, por consiguiente, están los dos factores en un mismo meridiano. Este puede tomarse por meridiano principal, y sabemos que en él la multiplicación es distributiva; por lo tanto, es suficiente cualquiera de las condiciones

$$\text{sen } \alpha = 0, \ \text{sen } \beta = 0 \quad \text{ó} \quad \text{sen } (\alpha' - \beta') = 0.$$

Veamos si lo es la condición $\cos \alpha = \cos \beta$, que se satisface con $\beta = \alpha$ ó con $\beta = -\alpha$.

La ecuación (16), haciendo en ella $\beta = \alpha$, se convierte en

$$\frac{2}{1 + \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos(\alpha' - \beta')} = 1$$

ó

$$2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos(\alpha' - \beta') = 2$$

ó sea

$$\operatorname{sen}^2 \alpha [\cos(\alpha' - \beta') - 1] = 0,$$

que se satisface con $\operatorname{sen} \alpha = 0$ ó $\alpha' - \beta' = 0$. En uno y en otro caso los factores están en un mismo meridiano.

Si $\beta = -\alpha$, la citada ecuación (16) se reduce á

$$\frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos(\alpha' - \beta')} = 1,$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos(\alpha' - \beta') = \cos^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha [1 - \cos(\alpha' - \beta')] = 0$$

que también se satisface con $\operatorname{sen} \alpha = 0$ ó con $\alpha' - \beta' = 0$.

Vemos, pues, que la condición $\cos \beta = \cos \alpha$ no es suficiente, y que *la única condición necesaria y suficiente para que la multiplicación sea distributiva es que los dos factores estén en un mismo meridiano.*

48. Supongamos el caso en que uno de los factores es el monomio $a_{\alpha|\alpha'}$ y el otro el polinomio,

$$b_{\beta|\alpha'} + c_{\gamma|\alpha'} + d_{\delta|\alpha'} + \ldots\ldots$$

Se hacemos girar el meridiano principal un ángulo α', todas las longitudes habrán disminuído la cantidad α'; quedan los sumandos, la suma y el otro factor en el nuevo meridiano principal, reducidos á

$$(b_\beta + c_\gamma + d_\delta + \ldots\ldots)\, a_\alpha = a b_{\alpha+\beta} + a c_{\gamma+\alpha} + a d_{\delta+\alpha} + \ldots,$$

producto que, reducido al primitivo meridiano principal, será

$$(b_{\beta|\beta'} + c_{\gamma'|\alpha'} + d_{\delta|\alpha'} + \ldots\ldots)\, a_{\alpha|\alpha'} = ab_{\beta+\alpha|\alpha'} + ac_{\gamma+\alpha|\alpha'} + ad_{\delta+\alpha|\alpha} + \ldots\ldots$$

Si los términos del polínomio tienen distintas longitudes, la operación no es distributiva.

49. Siendo conmutativa la multiplicación, el producto de los tres factores, en el orden A, B, C, no cambia porque se tome un multiplicador por multiplicando y viceversa; de modo que $A \cdot B \times C = B \cdot A \times C = C \times B \cdot A$, pero no se puede sentar sin demostrar que multiplicar C por el producto $B \cdot A$ es lo mismo que C multiplicado por los multiplicadores sucesivos B y A, como en el caso particular de estar los tres factores y la unidad en un mismo plano.

Para demostrar que es general la propiedad de invertir de cualquier manera el orden de los factores sucesivos, principiemos por ver si se puede invertir el orden $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$ de los tres factores

$$A = a_{\alpha|\alpha'}, \quad B = b_{\beta|\beta'}, \quad C_{\gamma|\gamma'}.$$

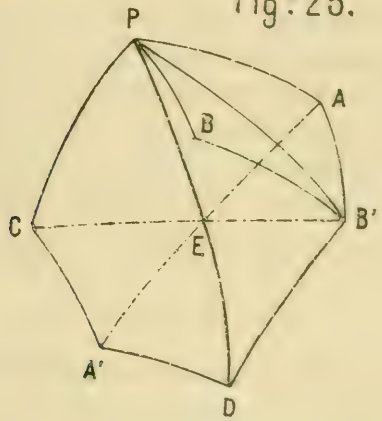
Según la definición adoptada, el módulo del producto ABC es abc, y como producto de factores reales será $abc = cba$. En cuanto á su dirección, será la de la unidad

$$1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'} \times 1_{\gamma|\gamma'}.$$

Sean (fig. 25) A, B y C los puntos de la esfera de radio uno en que terminan los tres radios factores y P el polo. Los arcos meridianos PA, PB, PC serán las respectivas colatitudes. La diagonal PB' del paralelógramo construído con PA y PB es la colatitud del producto AB, y la diagonal del $B'PCD$ es la colatitud del producto ABC, es decir, de haber multiplicado A por B y este producto por C. Las diagonales PD y $B'C$ del último paralelógramo se cortan en

partes iguales en el punto E, y si se hace girar el cuadrilátero $PAB'D$ alrededor del radio de la esfera que termina en E, hasta que el punto P venga á D, todos los vértices permanecerán en la superficie esférica, el punto D se trasladará á P, el vértice B' irá á C y A á A' en el círculo máximo que pasa por A y E á una distancia circular $EA' = AE$. Así se forma el exágono $PAB'DA'C$, que tiene iguales los lados y los ángulos opuestos. Siendo $CA' = AB' = PB$, el arco PD que

Fig.ª 25.



cierra el cortorno poligonal $PAB'D$ formado por las colatitudes α, β, γ, cierra el contorno $PCA'D$ formado por las colatitudes γ, β, α. La diagonal PD del paralelógramo $PADA'$ será también la colatitud del producto CB por A, y se tendrá $ABC = CBA$.

Esta inversión completa de los tres factores, combinada con la de los dos primeros, permite colocarlos todos en el orden que se quiera, y se tendrá

$$ABC = CBA = BAC = BCA = ACB = CAB.$$

Si se tiene un número cualquiera de factores $A \times B \times C \times D \times E \times F$, se pueden considerar como un producto de

tres factores: $A\,B\,C\,D \times E \times F$ y permutar el segundo E con F. Una vez cambiado el factor F al quinto lugar, puede considerarse como un factor $A\,B\,C$ y permutar F con D, y así sucesivamente, y queda demostrado que pueden ordenarse los factores como se quiera, lo mismo que con factores reales.

De esto se deduce fácilmente la propiedad asociativa.

División.

50. Esta operación, inversa de la multiplicación, tiene ya una definición que se puede generalizar á toda entidad.

Entenderemos, como en el caso de cantidades reales, ó de entidades que no tienen exponente imaginario que, dados dos términos, *dividendo* y *divisor*, se trata de hallar otra entidad que, multiplicada por el divisor, produzca el dividendo.

Sea

$$a_{\alpha|\alpha'} : b_{\beta|\beta'} = c_{\gamma|\gamma'}$$

en que $c\,\gamma$ y γ' son las incógnitas que determinan el cociente. Siendo el módulo de un producto igual al producto de los módulos de los factores, será $a = b\,c$, y por consiguiente,

$$c = \frac{a}{b}.$$

Conocida la magnitud del cociente, veamos la dirección, tomando unidades por dividendo y divisor. Principiemos por interpretar el cociente

$$\frac{1}{1_{\beta|\beta'}} = 1_{\gamma|\gamma'}.$$

Por la definición de la división se ha de verificar la ecuación

$$1_{\beta|\beta'} \times 1_{\gamma|\gamma'} = 1$$

y aplicando la fórmula (13) resulta

$$-1+(\cos\beta+\cos\gamma)\times$$

$$\frac{\cos\beta+\cos\gamma+\sqrt{-1}\left(\operatorname{sen}\beta\cos\beta'+\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma'\right)+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\left(\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'+\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\gamma'\right)}{1+\cos\beta\cos\gamma+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos(\beta'-\gamma')}-1$$

que se descompone en

$$-1+\frac{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}{1+\cos\beta\cos\gamma+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos(\beta'-\gamma')}=1,$$

$$\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\beta'+\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma'}{1+\cos\beta\cos\gamma+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos(\beta'-\gamma')}=0,$$

$$\frac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'+\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\gamma'}{1+\cos\beta\cos\gamma+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos(\beta'-\gamma')}=0.$$

De dos maneras se satisfacen estas tres ecuaciones.

1.ª con $\gamma=-\beta$ y $\gamma'=\beta'$;
2.ª con $\gamma=\beta$ y $\gamma'=\beta'+\pi$.

Cualquiera de estas soluciones conduce á las identidades

$$\frac{4\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}=2,$$

$$\frac{2\cos\beta(\operatorname{sen}\beta\cos\beta'-\operatorname{sen}\beta\cos\beta')}{1+\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}=0.$$

$$\frac{2\cos\beta(\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'-\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta')}{1+\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}=0.$$

Las dos soluciones conducen á un mismo vector que (número 46) en el caso de $\gamma=-\beta$ está en el semimeridiano opuesto al de longitud β', y en el caso de colatitud β está en el semimeridiano $\beta'+\pi$, que es opuesto al de longi-

tud β' Tenemos, pues, el mismo vector bajo las tres formas

$$\frac{1}{1_{\beta|\beta'}} = 1_{-\beta|\beta'} = 1_{\beta|\beta'+\pi}.$$

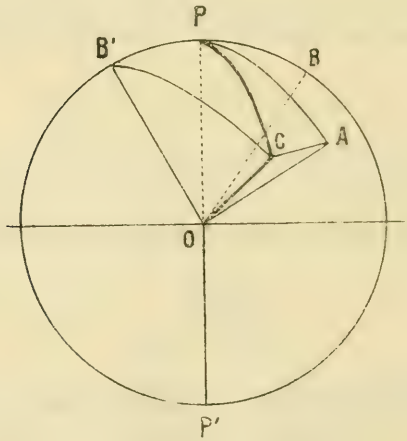
Si se multiplica esta doble ecuación por $1_{\alpha|\alpha'}$, se tiene

$$\frac{1_{\alpha|\alpha'}}{1_{\beta|\beta'}} = 1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{-\beta|\beta'} = 1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'+\pi},$$

es decir, el divisor $1_{\beta|\beta'}$ reemplazado por el factor $1_{-\beta|\beta'}$ ó por su igual $1_{\beta|\beta+\pi}$.

Sea (fig. 26) OP la unidad positiva, PBP' el semimeri-

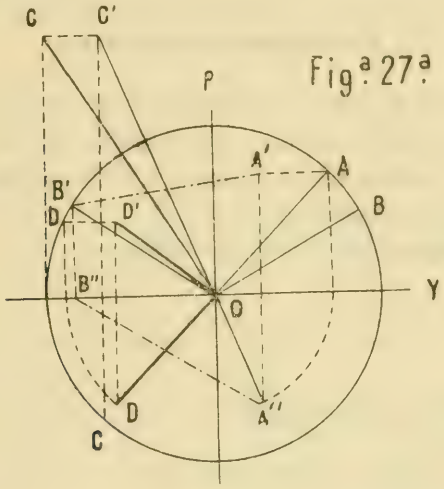
Fig.ª 26.ª



diano en que está el divisor $OB = 1_{\beta|\beta'}$ reemplazado por el factor $OB' = 1_{-\beta|\beta'}$ que se obtiene tomando $PB' = -PB$. El dividendo es $OA = 1_{\alpha|\alpha'}$ y construyendo con las colatitudes PA y PB' el paralelógramo $APB'C$ se tendrá el cociente $OC = 1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{-\beta|\beta'}$.

51. Para la construcción sobre el papel, tomemos por plano vertical de proyección el meridiano del divisor.

Sea $OP = 1$ (fig. 27) $OB = 1_\beta$ el divisor, $OA = a_\alpha$ el dividendo $1_{\alpha|\alpha'}$ llevado al meridiano del divisor, y OA', OA'' las proyecciones de $1_{\alpha|\alpha'}$ vuelto á su meridiano POA'', de modo que $YOA'' = \alpha'$ es el ángulo del meridiano del dividendo con el del divisor, y tomando éste por meridiano principal, será α' la longitud del dividendo. Reemplazando el divisor OB por el factor $OB' = b_{-\beta}$ cuya proyección horizontal es OB'', se tira la recta $A'B'$, $A''B''$ que une los extre-



mos de los vectores factores y se tira el vector OC', OC'' que pasa por el punto medio de $A'B'$, $A'B''$; este vector tendrá la misma longitud angular y la mitad de la colatitud del producto cociente. Haciéndole girar hasta situarlo en el meridiano de proyección, se tendrá la dirección OC, y duplicando la colatitud POC, se tendrá la dirección OD en el meridiano principal con su colatitud POD. Llevando este cociente á su meridiano POC'' nos da las proyecciones OD', OD' del radio que se busca de la esfera de radio 1,

$$\frac{1_{\alpha|\alpha'}}{1_\beta} = 1_{\alpha'\alpha'} \times 1_{-\beta'}$$

teniendo en evidencia su colatitud POD y su longitud YOD''.

Para terminar el módulo del cociente

$$\frac{a_{\alpha|\alpha'}}{b_\beta} = \frac{a}{b}$$

se hará la construcción del número 17, fig. 8.

Potencias en general.

52. Antes de tratar de exponentes en toda su generalidad, ó sea de la forma $a_{\alpha|\alpha'}$ representada por un vector en el espacio, veamos qué propiedades de los exponentes reales se pueden generalizar.

Consideremos las cantidades indirectas

$$(a_\alpha)^{b_\beta} \times (a_\alpha)^{c_\beta} = a^b_{b\alpha|\beta} \times a^c_{c\alpha|\beta}.$$

El módulo de este producto es

$$a^b \times a^c = a^{b+c},$$

y como los dos factores están en el meridiano de longitud β, en él estará el producto sumándose las colatitudes (número 46, caso 1.°), y el producto será

$$a^{b+c}_{(b\alpha+c\alpha)|\beta} = a^{b+c}_{(b+c)\alpha|\beta} = (a_\alpha)^{b_\beta + c_\beta}.$$

Esta propiedad también se verifica con

$$(a_{\alpha|\alpha'})^{b_\beta} \times (a_{\alpha|\alpha'})^{c_\beta} = a^b_{b\alpha|\alpha'+\beta} \times a^c_{c\alpha|\alpha'+\beta} = a^{b+c}_{(b+c)\alpha|\alpha'+\beta} = (a_{\alpha|\alpha'})^{b_\beta + c_\beta}.$$

Pero si fueren distintos los índices de los exponentes, no se verificaría y, no pudiéndose generalizar á los sencillos

exponentes como b_β y c_γ, con mayor razón á exponentes de la forma $b_{\beta|\beta'}$.

Se sabe por el Algebra elemental, que

$$a^{b^{c^{d}}} = a^{bcd}$$

siendo a^b afectado del exponente c y a^{b^c} del exponente d, veamos qué grado de generalidad puede tener esta propiedad.

Sea

$$(a_{\alpha|\alpha'})^{b_\beta^{c^{d}}}, \quad (a_{\alpha|\alpha'})^{b_\beta} = a^{b}_{b\alpha|\alpha'+\beta}, \quad \left(a^{b}_{b\alpha|\alpha'+\beta}\right)^{b_\gamma} = a^{b^{c}}_{bc\alpha|\alpha'+\beta+\gamma}$$

y

$$\left(a^{b^{c}}_{bc\alpha|\alpha'+\beta+\gamma}\right)^{d_\delta} = a^{b^{c^{d}}}_{bcd\alpha|\alpha'+\beta+\gamma\,d+} = a^{bcd}_{bcd\alpha|\alpha'+\beta+\gamma+\delta} = a^{b\beta \times c_\gamma \times d_\delta}_{\alpha|\alpha'}. \quad (20)$$

Falta dar una interpretación al exponente $b_{\beta|\beta'}$. Ensayemos sujetarlo á la propiedad de los exponentes sucesivos; para ver si es posible y conveniente que se satisfaga la igualdad

$$(a_\alpha)^{1_{\alpha'}^{b_{\beta|\beta'}}} = (a_\alpha)^{1_{\alpha'} \times b_{\beta|\beta'}}$$

El factor $1_{\alpha'}$ puede ponerse bajo la forma $1_{\alpha'|o}$ y para aplicar la fórmula (13) haremos en ella $\alpha' = o$ y en lugar de α pondremos α'; así resulta

$$1_{\alpha'|o} \times 1_{\beta|\beta'} = -1 + (\cos\alpha' + \cos\beta) \times$$

$$\times \frac{\cos\alpha' + \cos\beta + \sqrt{-1}\left(\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta\cos\beta'\right) + \sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta'},$$

expresión demasiado complicada para reducirla á la forma $1_{\mu|\mu'}$, y sólo en cálculo numérico podría llevarse á la práctica, ó bien por procedimientos gráficos.

Resulta, pues, que el mayor grado de generalidad que se puede dar á la propiedad de multiplicarse los exponentes sucesivos, es cuando éstos no pasan de la forma b^{β}, aunque sea más general la base de la potencia.

Será, pues, necesario dar una interpretación al índice, longitud del exponente. Para ver cuál conviene, observaremos que, si en la igualdad

$$(a_\alpha)^{b_\beta} = a^{b}_{ab|\beta}$$

se hace

$$\alpha = 0, \quad \text{resulta} \quad (a_o)^{b_\beta} = a^{b}_{o|\beta}$$

cantidad real que está en todos los meridianos; pero más particularmente en el meridiano β, y si por alguna operación ulterior llega este vector á tener colatitud mayor que cero, será sin salir del meridiano β.

53. La ecuación final de la fórmulas (20), haciendo $\alpha' = o$ se puede poner bajo la forma

$$a_\alpha^{b_\beta^{c_\gamma^{d_\delta}}} = a^{bcd}_{bcd\alpha|\beta+\gamma+\delta} = a^{bcd} \times$$

$$\times \left\{ \cos bcd\alpha + \operatorname{sen} bcd\alpha \left[\sqrt{-1} \cos(\beta+\gamma+\delta) + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \operatorname{sen}(\beta+\gamma+\delta) \right] \right\}$$

Si $a = b = c = d = 1$ será $bcd = 1$ esta ecuación se reduce á

$$1_\alpha^{1_\beta^{1_\gamma^{1_\delta}}} = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \left[\sqrt{-1} \cos(\beta+\gamma+\delta) + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \operatorname{sen}(\beta+\gamma+\delta) \right]$$

Si $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ y $\gamma = \delta = 0$ será $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $1_\alpha = 1_\beta = \sqrt{-1}$, $\cos(\beta + \gamma + \delta) = 0$, $\operatorname{sen}(\beta + \gamma + \delta) = 1$ y la fórmula se reduce á la identidad

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ y $\delta = o$ será $1_\alpha = 1_\beta = 1_\gamma = \sqrt{-1}$

y

$$1_\alpha^{1_\beta^{1_\gamma}} = \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{-1}\cos\pi + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\pi\right) = -\sqrt{-1}.$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$ será $1_\alpha = 1_\beta = 1_\gamma = 1_\delta = \sqrt{-1}$ y la fórmula se convierte en

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}} = \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \times$$

$$\times\left(\sqrt{-1}\cos\frac{3\pi}{2} + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

A estos mismos resultados llegamos si tenemos en cuenta que cada exponente $\sqrt{-1}$ afectando á una de estas bases, que están en el ecuador, la desvía de su meridiano un ángulo recto, girando alrededor del eje real; así, girando $\sqrt{-1}$ vendrá á situarse en la perpendicular $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ al meridiano principal. Otro giro debido al segundo exponente $\sqrt{-1}$ le hará tomar la dirección opuesta á $\sqrt{-1}$ que es $-\sqrt{-1}$;

un tercer exponente conducirá á la dirección opuesta á $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ que es $-\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, y, finalmente, un cuarto exponente haría

$$\sqrt{-}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}}} = \sqrt{-1}.$$

ó, multiplicando las exponentes, $\sqrt{-1}^{1} = \sqrt{-1}$.

Esta misma evolución se verifica mientras cada exponente es $\sqrt{-1}$ y la base está en el ecuador.

En este caso se encuentra el vector

$$\sqrt{-1}^{a} = 1_{\frac{\pi}{2}|a} = \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{-1}\cos a + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen} a\right)$$

que, con el exponente

$$\sqrt{-1} \text{ es } \left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^{\sqrt{-1}} = 1_{\frac{\pi}{2}|a}^{1\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{-1}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\cos a$$

que es perpendicular á la derecha de $1_{\frac{\pi}{2}|a}$ y está en el ecuador, así como las potencias sucesivas.

$$1_{\frac{\pi}{2}|a}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{-1}\cos(\alpha + \pi) + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\left(\alpha + \pi\right)\right]$$
$$= -\cos\alpha - \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen} a$$

$$1_{\frac{\pi}{2}|a}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}} = \sqrt{-1}\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) =$$
$$= \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha - \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\cos\alpha.$$

De estas cuatro unidades situadas en el ecuador, la primera tiene la longitud α, la segunda $\alpha + \frac{\pi}{2}$, la tercera $\alpha + \pi$, la cuarta $\alpha + \frac{3\pi}{2}$ y un nuevo exponente $\sqrt{-1}$ conduce al vector $1_{\frac{\pi}{2}|\alpha+2\pi}$, que es la misma base $1_{\frac{\pi}{2}|\alpha}$.

Con otros exponentes $\sqrt{-1}$ irían presentándose las mismas potencias anteriores.

Logaritmos.

54. Está admitido que el logaritmo de un número es el exponente de la potencia á que se ha de elevar una base real y positiva para obtener el número dado, y no modificaremos esta definición.

En lo que precede se ha visto que, salvo en la adición y sustracción, el módulo del resultado de cualquiera otra operación es el resultado de la misma operación, con los módulos de las cantidades que entran en ella. En la multiplicación, por ejemplo, el módulo del producto es el producto de los módulos de los factores

$$a_{\alpha|\alpha'} \times b_{\beta|\beta'} = ab + 1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'}.$$

Aquí tenemos un producto de una cantidad real ab por la unidad indirecta $1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'}$. Todo el producto se puede determinar por procedimientos gráficos, pero si se quiere, se calcula por logaritmos el producto de los módulos, y por procedimiento gráfico el de las unidades indirectas $1_{\alpha|\alpha'} \times 1_{\beta|\beta'}$.

Así se puede hacer si uno de los factores es negativo y los demás indirectos, teniendo en cuenta que $-a = a_{\pi}$.

No es posible someter al cálculo logarítmico todas las cantidades indirectas, porque los exponentes de esta clase no

tienen todas las propiedades de los exponentes reales, ni el cálculo logarítmico de las unidades indirectas sería más breve que los procedimientos gráficos.

Sin embargo, llamo la atención sobre la analogía entre la manera de sumar colatitudes por el paralelógramo esférico y la de sumar vectores por el paralelógramo plano. Si no llega á utilizarse para el cálculo logarítmico, algún otro partido se podrá sacar de tal analogía.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXXIX.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia undécima..... 821

XL.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia duodécima..... 853

XLI.—Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkoswki (continuación), por *B. Cabrera*..... 874

XLII.—Geometría analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades (conclusión), por *Modesto Domínguez Hervella*..... 888

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XI.—NUMERO 12.
JUNIO DE 1913.

Smithsonian Institution
FEB 7 1920
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.
1913

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XLIII.—Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimatercera.

SEÑORES:

El teorema de Jacobi, como decíamos al fin de la Conferencia anterior, tiene por objeto facilitar la integración de las ecuaciones diferenciales de la Mecánica, puestas bajo la forma á que se da el nombre de *forma canónica ó de Hamilton.*

Si para simplificar la explicación y la demostración de este teorema, que ambas son independientes del número de funciones, suponemos que éstas sean seis, á saber: tres de ellas q_1, q_2, q_3, que expresarán el número mínimo de variables que determinan la posición del sistema, y las tres funciones auxiliares p_1, p_2, p_3, que hemos introducido para convertir las ecuaciones diferenciales de segundo orden en ecuaciones diferenciales de primero; si suponemos todo esto, las ecuaciones diferenciales ordinarias ó simultáneas que nos proponemos integrar, ó mejor dicho, cuya integración nos proponemos simplificar, serán éstas, expresadas en forma abreviada:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (H)$$

que se desarrollan en seis ecuaciones, dando al índice i los valores 1, 2, 3.

En esta ecuación, H es una función perfectamente conoci-

FEB 12

da en cada problema, desde el principio, y contiene las p, las q y t.

Es decir, que su forma es

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t).$$

Y el célebre teorema de Jacobi es el siguiente.

***

Teorema de Jacobi.—Para resolver el sistema de ecuaciones (H) se empieza por formar la ecuación en diferenciales parciales, que llamaremos, para abreviar, *ecuación diferencial de Jacobi*, del modo siguiente:

En la función de forma conocida (H), que acabamos de citar, se sustituye á las tres funciones

$$p_1, p_2, p_3$$

las tres derivadas

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial V}{\partial q_3},$$

siendo V una función de las tres variables independientes q_1, q_2, q_3, y, además, de la variable t.

Hecha esta sustitución, tendremos:

$$H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right).$$

A esta función, de forma perfectamente conocida, se le agrega la derivada de V con relación á t, ó sea $\frac{\partial V}{\partial t}$, y la suma se iguala á cero. Con lo cual tendremos la ecuación en diferenciales parciales de Jacobi; y le damos este nombre,

como hemos indicado, para abreviar la explicación, aunque ya dijimos que toda ecuación diferencial de primer orden con cuatro variables independientes y una sola función V, que no entrase en forma explícita, podia ponerse bajo esta forma.

Pero esto importa poco para nuestro caso.

Formada, pues, esta ecuación en diferenciales parciales

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right) = 0 \qquad (J)$$

el teorema de Jacobi se expresará de este modo.

Basta conocer una *integral completa* de la ecuación en diferenciales parciales (J) con tres constantes arbitrarias, porque de la cuarta podemos prescindir, es decir, basta tener una expresión de V:

$$V = V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3) + \text{constante.}$$

en que a_1, a_2, a_3 son tres constantes arbitrarias, para deducir de esta integral la solución completa de las ecuaciones de Hamilton (H).

Y, en efecto, como vamos á demostrar, los valores de q_1, q_2, q_3 se obtendrán diferenciando V con relación á a_1, a_2, a_3 é igualando las expresiones que resulten á tres nuevas constantes arbitrarias b_1, b_2, b_3. Y se obtendrán los valores de las otras tres funciones p_1, p_2, p_3, de las ecuaciones de Hamilton, diferenciando la misma solución completa V de la ecuación de Jacobi con relación á q_1, q_2, q_3.

En suma: los valores de las seis funciones q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, quedarán completamente determinadas por estas seis ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = b_1;\ \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = b_2;\ \dfrac{\partial V}{\partial a_3} = b_3 & (S_1) \\ p_1 = \dfrac{\partial V}{\partial q_1};\ p_2 = \dfrac{\partial V}{\partial q_2};\ p_3 = \dfrac{\partial V}{\partial q_3} & (S_2) \end{array}\right\} (S)$$

Estas seis ecuaciones dan las integrales generales de las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (H)$$

En esto consiste el teorema. Resolver las ecuaciones *(H)* por el conocimiento de una *solución completa* de la ecuación *(J)*; ó sea hallar q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 por medio de las ecuaciones *(S)*, que se determinan sin dificultad por diferenciaciones, conocida la solución completa *V*.

Pero, antes de dar la demostración, no serán inútiles para los principiantes algunas aclaraciones.

***

Lo hemos dicho ya en otra Conferencia. Al alumno que por primera vez estudia estas materias puede causarle cierta extrañeza, que la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias (ó simultáneas), puesto que se trata de seis funciones de una sola variable independiente, dependa de la integración de una sola ecuación, la de Jacobi, con una función única y cuatro variables independientes; porque acaso pensará el alumno: ¿cómo han de tener la misma significación en uno y en otro sistema las funciones ó variables de la ecuación en diferenciales parciales y de las seis ecuaciones diferenciales ordinarias y simultáneas?

Claro es que esta duda, que tiene cierto fundamento, no puede desvanecerse por completo sin penetrar en el fondo del problema, y acaso el método más directo para la resolución de estas cuestiones es el método de las *características*, en que no podemos detenernos.

Pero tal duda no disminuye en lo más mínimo ni la exactitud y claridad del teorema, ni *la fuerza lógica de la demostración*, que vamos á dar inmediatamente.

Prescinda el alumno por completo de cómo se han obtenido las seis ecuaciones (S).

Son seis ecuaciones de forma totalmente definida, y el teorema consiste en demostrar que los seis valores de $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$, deducidos de dichas seis ecuaciones (S), son funciones de t, contienen seis constantes arbitrarias y satisfacen á las seis ecuaciones (H) de Hamilton.

El teorema no es ni más ni menos que lo que acabamos de explicar: se nos dan las seis funciones en función de t y de seis constantes, y vamos á poner en evidencia que los valores de estas seis funciones $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ satisfacen á las ecuaciones (H).

Y que las ecuaciones (S) determinan las p y q en función de t y de seis constantes, se ve inmediatamente con sólo observar la composición de dichas ecuaciones (S).

Consideremos, por ejemplo, la primera de la primera línea (S_1); á saber:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1.$$

Como la forma de V es por hipótesis conocida, porque es una integral completa de la ecuación de Jacobi (J), es decir,

$$V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3),$$

al diferenciar con relación á a_1 quedará una función de forma de todo punto conocida, también de las mismas cantidades, que para indicar su origen podremos expresar de este modo:

$$V'_{a_1}(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3) = b_1,$$

que con otra notación es lo mismo que escribíamos; á saber:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1.$$

Y como podremos decir otro tanto de las otras dos ecuaciones de la primera línea, se reproducirá ésta en la siguiente forma:

$$V'_{a_1}(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3) = b_1;$$
$$V'_{a_2}(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3) = b_2;$$
$$V'_{a_3}(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3) = b_3.$$

Son, pues, tres ecuaciones de forma conocida, de las cuales podemos despejar q_1, q_2, q_3, en función de las demás cantidades, y tendremos:

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \\ q_2 &= \varphi_2(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \qquad (Y_1) \\ q_3 &= \varphi_3(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

Hemos obtenido, pues, como antes decíamos, las q_1, q_2, q_3 en función de t y de seis constantes arbitrarias $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

Una cosa análoga vamos á hacer con la segunda línea (S_2).

Consideremos la primera ecuación de esta línea:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}.$$

Repitiendo lo que antes explicábamos, vemos que la V, por ser una integral completa de una ecuación en diferenciales parciales perfectamente definida, es una función de forma definida también, como acabamos de indicar,

$$V(q_1, q_2\ q_3, t, a_1, a_2, a_3).$$

Pero importa poco lo que sea, ni cómo la hayamos obtenido, ni de qué origen proceda; lo que importa saber es que es una *función de forma definida*, volvemos á repetirlo. Y

si conocemos la forma de V, conoceremos la forma de su derivada con relación á q_1, que será una función que contendrá las mismas cantidades que V.

Y adoptando una notación (V'_q) que recuerde su origen, las tres ecuaciones de la línea S_2 tomarán esta forma:

$$p_1 = V'_{q_1}(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3);$$
$$p_2 = V'_{q_2}(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3);$$
$$p_3 = V'_{q_3}(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3).$$

Estas ecuaciones nos dan, por lo tanto, las p en función de las q y de t.

Pero como las ecuaciones (Y_1) nos dan las q_1, q_2, q_3 en función de t y de seis constantes arbitrarias, sustituyendo estos valores en las p del sistema anterior tendremos, por último:

$$\begin{aligned} p_1 &= \psi_1(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \\ p_2 &= \psi_2(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \qquad (Y_2) \\ p_3 &= \psi_3(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (Y_1) (Y_2) nos dan, como habíamos anunciado, los valores de $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$, en función de t y de seis constantes arbitrarias $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, según indican dichas ecuaciones (Y_1) (Y_2).

Ahora lo que hay que probar, y ésta será la demostración del problema, es que estos valores (Y_1) (Y_2) son las integrales generales de las ecuaciones de Hamilton (H).

Es decir, que estos valores (Y_1) (Y_2), sustituídos en las ecuaciones (H), las convierten en seis identidades $0 = 0$, desapareciendo el tiempo y las constantes arbitrarias, ó sea anulándose por sí estas cantidades.

El método de la demostración está indicado. Considere-

mos una de las ecuaciones de Hamilton (H); por ejemplo, la primera:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1},$$

para lo cual no hay mas que dar á i el valor 1.

Obsérvese, y esto no hay que olvidarlo nunca, que H es una función de forma conocida *á priori* de las p, las q y t. Es decir,

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t).$$

Luego su derivada, con relación á p_1, será una función de las mismas cantidades; y empleando, como antes, una notación que recuerde su origen, es decir H con un acento que indique la derivada y un subíndice que indique la variable respecto á la cual se diferencia, resultará, como tantas veces hemos explicado,

$$H'_{p_1}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t).$$

De modo que la primera ecuación del sistema (H), en rigor, tendrá esta forma:

$$\frac{dq_1}{dt} = H'_{p_1}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t) \qquad (a_1)$$

En esta escuación es en la que debemos sustituir los valores (Y_1) (Y_2), que suponemos que representan las integrales generales, y que queremos comprobar.

Para sustituir en esta ecuación el valor de la derivada de q_1 tendremos que diferenciar la primera ecuación de (Y_1) con relación á t, que, empleando notaciones análogas á las anteriores, dará

$$\frac{dq_1}{dt} = \varphi'_{1,t}(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$$

y deberemos sustituir este valor, con los tres valores de q y los tres de p, en la ecuación (a_1).

Tendremos, pues,

$$\varphi'_{1,t}(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = H'_{p_1}[\varphi_1(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3),$$
$$\varphi_2(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \varphi_3(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3),$$
$$\psi_1(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \psi_2(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3),$$
$$\psi_3(t, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), t].$$

Como vemos, esta última expresión no contiene mas que t y las seis constantes arbitrarias.

Y para que el teorema sea verdadero, es decir, para que las ecuaciones (Y_1) (Y_2), ó sea las (S), constituyan la solución general de las ecuaciones de Hamilton (H), será preciso que esta última ecuación que hemos obtenido y las análogas, es decir, las otras cinco de (H) se conviertan en identidades.

Es preciso, pues, que la t y las seis constantes arbitrarias desaparezcan, convirtiéndose las seis ecuaciones (H), por la sustitución de las p y de las q de los sistemas (Y_1) (Y_2), en seis identidades $0 = 0$.

A primera vista esto parece difícil. Podrá comprobarse en cada caso particular; pero ¿cómo se demuestra en general, si no podemos saber la forma ó las formas, en cada caso, de φ, ψ y H?

Y, sin embargo, la demostración es sencillísima, como vamos á ver.

*
* *

Escribamos, para tenerlas presentes y reunidas:

1.° La ecuación en diferenciales parciales de Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right) = 0 \qquad (J)$$

2.° La integral completa de esta ecuación diferencial

$$V = V(q_1, q_2, q_3, a_1, a_2, a_3 t) \qquad (Y)$$

prescindiendo de la constante adicional, que en nada influye, ni en el teorema ni en la demostración; porque como V no entra mas que por sus derivadas, dicha constante adicional desaparece, pues, naturalmente, su derivada es cero.

3.° El sistema de seis ecuaciones deducidas de la anterior, como hemos explicado,

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \ \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \ \dfrac{\partial V}{\partial a_3} = b_3 & (S_1) \\ p_1 = \dfrac{\partial V}{\partial q_1}, \ p_2 = \dfrac{\partial V}{\partial q_2}, \ p_3 = \dfrac{\partial V}{\partial q_3} & (S_2) \end{array}\right\} (S)$$

Este sistema constituye la solución general de las ecuaciones de Hamilton, y nos dan, como acabamos de explicar, los valores de $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ en función del tiempo y de las seis constantes arbitrarias $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

4.° Escribamos, por último, el sistema de las seis ecuaciones diferenciales de Hamilton, que pretendemos integrar:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (H)$$

El teorema se condensa en estos brevísimos términos: *demostrar que el sistema de las seis ecuaciones* (S) *constituye la solución general de las ecuaciones diferenciales de Hamilton.*

Para lo cual parece que habría que hacer lo que antes explicábamos; á saber: deducir de (S) las q, las p y sus derivadas; sustituir estos valores en las seis ecuaciones (H), y *ver* que obtenemos seis identidades.

Primero. Empecemos por demostrar esto para las tres primeras ecuaciones del sistema (H), es decir:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3}.$$

Para deducir del sistema (S_1) las derivadas de q con relación al tiempo, se sabe, por cálculo diferencial, que no es preciso despejar q_1, q_2, q_3. Basta diferenciar, con relación al tiempo, las ecuaciones (S_1) que son:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \frac{\partial V}{\partial a_3} = b_3.$$

Fijémonos en la primera.

Acabamos de ver, que el primer miembro contiene q_1, q_2, q_3 y t, además de las constantes.

Y sabemos, además, que q_1, q_2, q_3 son funciones del tiempo.

Luego las reglas de la diferenciación darán:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = 0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = 0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

aplicando igual diferenciación, con relación al tiempo, á las dos últimas ecuaciones $\frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2$, $\frac{\partial V}{\partial a_3} = b_3$.

Este sistema (A) de tres ecuaciones nos permite despejar $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, $\frac{dq_3}{dt}$, puesto que son de primer grado en estas cantidades, y estas derivadas serían las que tendríamos que sustituir en las tres primeras ecuaciones del sistema (H)

para ver si se convierten en identidades: habría, pues, que sustituir en

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3} \qquad (H_1)$$

Pero despejar las tres derivadas del sistema (A) y sustituirlas en los primeros miembros del sistema (H_1) es, en el fondo, eliminar dichas tres derivadas entre los sistemas (A) y (H_1), y más sencillo es sustituir en (A) los valores de las derivadas $\frac{dq_1}{dt}$ ..... tomadas de las (H_1); con lo cual tendremos, evidentemente, estas tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0 \\
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\, \partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0 \\
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3\, \partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (A_1)$$

Las ecuaciones precedentes son el resultado de eliminar las derivadas de q con relación á t entre las ecuaciones diferenciales y las tres primeras ecuaciones del sistema (S).

Y como unas y otras son lineales respecto á dichos coeficientes diferenciales, el método que se siga para la operación es indiferente: el resultado siempre será el mismo.

Sólo nos queda por despejar las q y p de las ecuaciones (S) y sustituirlas en (A_1).

Tendremos tres ecuaciones con t, y las seis constantes y estas tres ecuaciones deberán ser identidades.

Pero vamos á demostrar más.

Basta sustituir las p_1, p_2, p_3 en (A_1) para que estas tres ecuaciones se conviertan en identidades.

Ni siquiera hay que eliminar q_1, q_2, q_3 en función de t.

Y es claro que, si son identidades en q_1, q_2, q_3, t y en

las seis constantes, es decir, si son identidades para valores arbitrarios de q_1, q_2, q_3, también lo serán cuando se sustituyan los valores de estas tres funciones deducidos de (S_1).

Que habiendo eliminado las p_1, p_2, p_3, de las ecuaciones (A_1), éstas se convierten en identidades de las cantidades que quedan, se demuestra inmediatamente.

En efecto; hemos dicho, y éste es nuestro punto de partida, que

$$V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3)$$

es *integral completa* de la ecuación de Jacobi.

Luego sustituyendo este valor de V en dicha ecuación (J) debe resultar una identidad.

Y si es una identidad respecto á todas las cantidades q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3, esto quiere decir que todas estas cantidades desaparecen, de modo que no entrarán en (A_1); luego la derivada con relación á a_1 de la ecuación de Jacobi (J) será idénticamente cero: será una identidad por virtud de dicha sustitución.

Obtengamos, pues, esta derivada, advirtiendo que a_1 entrará en el primer término $\frac{\partial V}{\partial t}$ porque entra en V; y entrará, bajo el signo H en $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, $\frac{\partial V}{\partial q_3}$ por la misma razón.

Tendremos, pues, diferenciando (J) con relación á a_1,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial a_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}} \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_2}} \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial a_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_3}} \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_3}}{\partial a_1} = 0,$$

ó bien

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial a_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial a_1} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial a_1} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_2}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_3\,\partial a_1} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_3}} = 0.$$

Y esta ecuación, poniendo en vez de V el valor de la integral completa, debe ser una identidad en

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ t \text{ y } a_1,\ a_2,\ a_3.$$

Pero si en la ecuación primera del grupo (A_1) ponemos, dejando las q, en vez de p_1, p_2, p_3, sus valores tomados de (S_2), es decir

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1},\quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2},\quad p_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3}$$

el resultado coincide exactamente con el que hemos obtenido diferenciando la ecuación de Jacobi con relación á a_1.

La composición de ambas ecuaciones es, evidentemente, la misma, pues la H de la ecuación Jacobina es idéntica á (H) cuando en (H) se sustituye, en vez de p_1, p_2, p_3, las tres derivadas precedentes.

Para convencerse materialmente no hay mas que escribir ambas ecuaciones

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial a_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial a_1}\,\frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial a_1}\,\frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_2}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_3\,\partial a_1}\,\frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_3}} = 0 \qquad (j)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial a_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial a_1}\,\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial a_1}\,\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_3\,\partial a_1}\,\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0 \qquad (h$$

y comparar término á término.

Todas las segundas derivadas se refieren á la misma V, y está hecha la derivación con relación á la misma variable; luego la identidad será completa en q_1, q_2, q_3, t, a_2, a_2, a_3.

Respecto á las primeras derivadas

$$\frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}},\quad \frac{\partial H}{\partial p_1};\quad \frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_2}},\quad \frac{\partial H}{\partial p_2};\quad \frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_3}},\quad \frac{\partial H}{\partial p_3},$$

la composición de H es también para todas ellas la misma, con la diferencia de que en unas entran p_1, p_2, p_3, y en otras $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, $\frac{\partial V}{\partial q_3}$; luego cuando en las segundas se sustituya á las p estas últimas derivadas los resultados serán también idénticos.

Y con esto queda terminada esta parte de la demostración, porque si (j) es una identidad, como hemos demostrado, (h), hecha la sustitución de las p será también una identidad en q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3.

Todo ello, sin necesidad de poner en vez de q sus valores en función de t.

También podemos decir que es una identidad en b_1, b_2, b_3, puesto que no entran estas constantes.

Diferenciando asimismo la ecuación de Jacobi con relación á a_2 y a_3, demostraríamos que las dos últimas ecuaciones (A_1) son también identidades.

Luego hemos demostrado que el sistema (S) convierte en identidades las tres primeras ecuaciones de Hamilton relativas á las derivadas de q con relación al tiempo.

Segundo. Un razonamiento análogo al precedente nos permite demostrar que el sistema (S) satisface al segundo grupo de ecuaciones de Hamilton; á saber:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3}.$$

Para ello no habría mas que diferenciar con relación á t las ecuaciones (S_2), lo cual nos daría las tres derivadas $\frac{dp_1}{dt}$, $\frac{dp_2}{dt}$, $\frac{dp_3}{dt}$, é igualando á los segundos miembros de las precedentes habremos eliminado dichas derivadas.

No consideremos mas que la primera ecuación

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

porque lo que de ésta digamos podremos repetir de las otras dos.

Diferenciemos, pues, la primera ecuación $p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}$ del grupo (S_2) de las integrales que queremos comprobar; diferenciemos, repetimos, con relación á t, observando que t entra en

$$V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3),$$

que es la integral completa, y, por lo tanto, en $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ de dos maneras: primero, directamente, y luego, porque q_1, q_2, q_3 son funciones del tiempo, puesto que en las ecuaciones (S_1), (S_2), q_1, q_2, q_3 son las funciones de t que deseamos obtener.

Efectuada dicha diferenciación, tendremos:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{dq_3}{dt}.$$

Esta derivada $\frac{dp_1}{dt}$ es la que hay que sustituir en

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

para ver si reducimos esta última á una identidad; porque no olvidemos que es la primera del segundo grupo de las ecuaciones de Halmilton (H).

Pero lo mismo da, exactamente lo mismo, tanto, que es idéntica operación, poner aquel valor de $\frac{dp_1}{dt}$ en la ecuación

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

que sustituir en el primer miembro de la ecuación anterior el valor $-\frac{\partial H}{\partial q_1}$.

Tendremos, pues,

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{d q_1}{d t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_2}\frac{d q_2}{d t}+\frac{\partial^2 V}{d q_2\, \partial q_3}\frac{d q_3}{d t}.$$

Mas en el segundo miembro entran las derivadas de q con relación al tiempo, y éstas hay que eliminarlas, porque en la ecuación no han de quedar mas que las q, t y las constantes, con el objeto de ver si se reducen á una identidad cuando se eliminen las q en función del tiempo, dado que esto fuera preciso, que no lo es en este caso, como no lo era en el anterior.

Poniendo, pues, en el segundo miembro

$$\frac{d q_1}{d t}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\qquad \frac{d q_2}{d t}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\qquad \frac{d q_3}{d t}=\frac{\partial H}{\partial p_3},$$

puesto que en la primera parte de la demostración hemos comprobado la exactitud de estas ecuaciones para los valores q que obtuvimos, resultará:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3}$$

Y ahora hay que demostrar que, sustituyendo las p y las q, deducidas de las ecuaciones (S) en función de tiempo y de las seis constantes arbitrarias a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, esta expresión se reduce á una identidad.

Más todavía: ni siquiera es necesario eliminar las q, porque sin este requisito la ecuación resulta idéntica.

La demostración es la misma que dimos en la primera parte.

Todo está reducido á comparar esta ecuación con una identidad que vamos á obtener, como antes la obteníamos, acudiendo á la ecuación diferencial de Jacobi:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right)=0.$$

El resultado de sustituir en esta ecuación una integral completa

$$V(q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3)$$

debe ser una identidad entre las cantidades que resulten. Es decir, una identidad en q_1, q_2, q_3, t, a_1, a_2, a_3.

Luego la derivada, con relación á cualquiera de estas cantidades, también deberá ser una identidad respecto á las mismas.

Pues derivemos con relación á q_1, y resultará:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_2}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_3}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3} = 0 \quad (h')$$

Y sólo nos resta comparar esta ecuación con la que antes habíamos obtenido, y que deseábamos demostrar que era idénticamente nula.

Volveremos á escribirla, pasando todos los términos á un miembro y haciendo que se correspondan con los de la anterior. Tendremos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_3} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3} \quad (j')$$

y resulta que (h') y (j') tienen la misma forma analítica, con esta sola diferencia: que donde en la primera entran

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3},$$

entran en la segunda p_1, p_2, p_3.

Lo cual es evidente, porque la función (H) de la primera

se distingue de la función H de la segunda, según dijimos al principio, al establecer la ecuación de Jacobi, en la sustitución de las $\frac{\partial V}{\partial q}$ á las p.

Luego cuando en esta última hagamos dicha sustitución, que, como ya dijimos, es necesario hacer para eliminar las p, la forma algebraica de la (j') será idéntica á la forma algebraica de (h').

Pero (j') es una identidad, como hemos dicho, en q_1, q_2, q_3, t y las constantes.

Luego (h') será también una entidad, sean cuales fueren las q, y sin necesidad de eliminarlas en función de t.

Y como lo mismo podríamos repetir para las dos últimas ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3},$$

resulta demostrada la segunda parte del teorema.

Es decir, que los valores de p y q, deducidos de (S) ecuaciones formadas, como se ha explicado, son las integrales generales de las ecuaciones diferenciales de Hamilton.

*
* *

Por las explicaciones minuciosas que hemos dado á fin de evitar toda duda y todo esfuerzo al alumno, llevándole constantemente de la mano, si se me permite esta expresión, pudiera creerse que la demostración es complicada y sutil; pero, si bien se considera, la demostración, mejor dicho, la comprobación, es natural y sencillísima: en su esencia se reduce á lo siguiente, y ésta es la tercera vez que lo explicamos, pero esta síntesis que vamos á hacer no estará de más; todo se reduce á lo siguiente:

1.° Deducir de (S) las derivadas de las p y las q con re-

lación al tiempo y sustituirlas en las ecuaciones diferenciales (H), *ó entre aquéllas y éstas eliminar dichas derivadas.*

2.° Derivar con relación á a_1, a_2, a_3 la ecuación de Jacobi.

3.° Diferenciar con relación á q_1, q_2, q_3 esta misma ecuación.

4.° Comparar estas seis ecuaciones, que son seis identidades, con las seis primeras, y observar que tienen la misma forma algebraica.

De donde resulta que son identidades las seis últimas.

***

Un punto queda, sin embargo, dudoso, aunque nada hemos dicho sobre él en el curso de la demostración.

Para ver si las tres primeras ecuaciones (S_1) satisfacían á las ecuaciones diferenciales, diferenciamos con relación á t estas tres ecuaciones, y obtuvimos el siguiente cuadro (A), que, para tenerlo á la vista, lo reproducimos:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = 0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = 0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_3 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_3 \partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = 0
\end{aligned}\right\}(A)$$

De estas ecuaciones debíamos deducir los valores de

$$\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}$$

á fin de sustituirlos en las tres primeras ecuaciones de Hamilton (H).

Pero aquí se presenta la duda que antes indicábamos.

(A) es el conjunto de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, que son los tres coeficientes diferenciales que acabamos de escribir, y será fácil deducir estos valores que serán únicos.

Pero hay un caso de excepción, y es cuando la determinante de los coeficientes de las incógnitas es nula, porque entonces las incógnitas toman valores infinitos ó toman forma indeterminada.

Luego, si esto ocurriese, la demostración aquí se detenía, y, lo que hemos dicho después, no sería exacto.

Tenemos, pues, que examinar este caso de excepción, es decir, aquel caso en que se tenga

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_3} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2 \, d q_3} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_3 \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_3 \partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_3 \partial q_3} \end{vmatrix} = 0$$

Mas, para que la excepción se presente, es preciso que esta determinante, no ya se anule para valores particulares de q, t, a, sino que, *por sí*, sea idénticamente nula.

Si sólo se anula para valores particulares de aquellas cantidades, esto indicará, cuando más, puntos singulares en las trayectorias ó momentos excepcionales en el movimiento del sistema; pero no afectará á la demostración en su marcha general. Serán singularidades que habrá que estudiar en cada caso, y esto siempre sucede con las integrales, y constituye la gran dificultad del problema; dificultades en que no podemos detenernos en este momento.

Pero nosotros consideramos el caso en que la determinante es idénticamente nula, y en este caso vamos á fijarnos.

Observemos que la determinante puede escribirse de este modo:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_1} & \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial a_1} & \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_3}}{\partial a_1} \\ \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_2} & \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial a_2} & \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_3}}{\partial a_2} \\ \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_3} & \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial a_3} & \dfrac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_3}}{\partial a_3} \end{vmatrix} = 0$$

Y ésta es una determinante funcional, tal como las definíamos en otro curso, de las funciones $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}$ con relación a_1, a_2, a_3, como variables.

Ahora bien; demostramos en aquella ocasión que, cuando la determinante funcional es idénticamente nula, existe una relación entre las tres funciones, en que los coeficientes son independientes de a_1, a_2, a_3, consideradas como las variables.

Es decir, que tendremos una relación

$$F\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial V}{\partial q_3}\right) = 0$$

entre dichas tres derivadas $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}$.

O, si se quiere, una ecuación en diferenciales parciales F, que, como la V es la misma que satisfacía á la ecuación de Jacobi, tendrá esta solución común con dicha ecuación (J).

En suma, tendremos dos ecuaciones

$$\frac{\partial V}{dt} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right) = 0$$

$$F\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}\right) = 0$$

satisfechas por el mismo valor de V, que es el que hemos llamado la *integral completa.*

Pero si definimos, como se hace generalmente, este concepto de *integral completa*, diciendo que de ella se deduce la ecuación diferencial, *pero nada más que la ecuación diferencial,* sin que se pueda deducir ninguna otra como la F, tendremos que concluir que la hipótesis de que hemos partido es inadmisible; es decir, que la determinante funcional que estamos considerando no puede ser nula.

En rigor, decir esto, á saber, que de la integral completa sólo se puede deducir la ecuación diferencial dada, vale tanto como agregar al teorema esta condición: que la determinante funcional anterior deducida de V no puede ser nula.

Claro es que la definición *especificada*, que acabamos de dar de la integral completa merecería un estudio más detenido.

En este teorema de Jacobi, cuya demostración acabamos de dar, hay un caso particular muy importante, y es aquel en que, 1.°, las fuerzas tienen una potencial, ó se derivan de una función de fuerzas, que da lo mismo, en que no entra t, función que, generalmente, hemos llamado U; y, 2.°, además, las ecuaciones de los enlaces son independientes del tiempo.

Porque, en estas hipótesis, ni T ni U contienen t; luego tampoco entrará en H, que, como sabemos, se reduce á

$$H = T - U.$$

De aquí resulta, que en la ecuación de Jacobi tampoco en-

trará t bajo el signo H, reduciéndose dicha ecuación á esta otra:

$$\frac{\partial V}{dt} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3\right) = 0$$

sin que aparezca t en el segundo término H.

Tal circunstancia nos permite, en algunos casos, facilitar la investigación de la *integral completa,* y es decisiva para el teorema de Liouville, que explicaremos en la Conferencia inmediata.

XLIV. — Conferencias sobre Física matemática. Ecuaciones de la Mecánica.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimacuarta.

SEÑORES:

Hemos explicado con toda minuciosidad, en la conferencia precedente, el teorema de Jacobi.

Toda una conferencia hemos empleado en desarrollar la demostración, y, á decir verdad, hubiéramos podido exponerla, sin que perdiera su vigor, en mucho menos espacio: en dos ó tres páginas bien aprovechadas.

Mas, para los principiantes, toda concisión es peligrosa.

Se dijo hace tiempo, por un gran matemático, que «algunos libros serían mucho más cortos si fueran mucho más largos».

Es preferible que los lectores se enojen con el autor, tachándole de machacón y pesado, á que se detengan horas y horas ante unas cuantas líneas, pensando en lo que habrá querido decir el autor.

Yo, sin duda por achaques de la edad, antes he de ser pesado que conciso.

***

Ya saben mis alumnos, que el teorema de Jacobi tiene por objeto la integración de las ecuaciones de la Mecánica ó, dicho en forma más concreta, de las ecuaciones de Hamilton.

Y la integración será problema resuelto cuando se conozca una integral completa de la ecuación de Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \ldots\ldots \frac{\partial V}{\partial q_k}, q_1, q_2, \ldots\ldots q_k, t\right) = 0,$$

ecuación que se forma, como ya sabemos, sustituyendo en la expresión H de las ecuaciones de Hamilton $p_1, p_2 \ldots\ldots p_k$ por las derivadas $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \ldots\ldots \frac{\partial V}{\partial q_k}$.

Si la integral completa que hayamos podido encontrar es

$$V(q_1, q_2, \ldots\ldots q_k, t, a_1, a_2 \ldots\ldots a_k) = \text{constante}$$

en que $a_1, a_2 \ldots\ldots a_k$ son constantes arbitrarias, de esta expresión se deducirán $2k$ ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = b_2 \ldots\ldots \dfrac{\partial V}{\partial a_k} = b_k \\ \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = p_2 \ldots\ldots \dfrac{\partial V}{\partial q_k} = p_2 \end{array}\right\} \quad (S)$$

que darán las p y las q en función del tiempo y de las $2k$ constantes arbitrarias $a_1, a_2 \ldots\ldots a_k, b_1, b_2 \ldots\ldots b_k$.

Claro es que la forma de cada una de las ecuaciones (S) será perfectamente conocida, puesto que se conoce la forma de V, ó sea de la integral completa de la ecuación de Jacobi.

En suma, las ecuaciones (S) nos dan la resolución de las $2k$ ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

En lo que precede, en vez de suponer seis variables, como

en la demostración hicimos, sólo por abreviar la escritura, hemos empleado ya $2k$ funciones.

Y hemos dicho, que la ecuación de Jacobi resuelve el problema de integración de las ecuaciones diferenciales de Hamilton.

Y como lo decimos ahora es mucho decir, y en forma más modesta lo expresábamos al enunciar el teorema, porque allí dijimos:

Se podrán integrar las ecuaciones de Hamilton *si se conoce una integral general* de la ecuación de Jacobi.

Pero si no se conoce esta integral completa, el teorema no tiene aplicación.

Y la verdad es que no existe un método general, riguroso é infalible para hallar estas integrales completas.

Hacemos depender la solución de las ecuaciones de Hamilton, de la solución de un problema de integración de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden.

Hay métodos para integrarlas, que pueden ver mis alumnos en la lista de obras de análisis, que en otras conferencias hemos citado.

Aparte de los métodos de existencia, que son métodos de resolución realmente para funciones holomorfas, ó de otro modo, á las que sea aplicable la serie de Taylor, existen tres métodos generales de integración.

1.° El método de las características. Pero en él poco ganamos para nuestro objeto, porque la integración de las ecuaciones en diferenciales parciales se funda, á su vez, en la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias: las que hemos llamado simultáneas de una sola variable independiente.

2.° Existe aún el método de Jacobi, que es precisamente el mismo que hemos explicado, pero á la inversa; se integran las ecuaciones en diferenciales parciales, y una vez integradas, claro es que se puede obtener una integral completa.

Mas si para integrar la ecuación de Jacobi, hemos de in-

tegrar antes las ecuaciones de Hamilton, y para integrar las ecuaciones de Hamilton hemos de obtener antes una integral completa de la ecuación de Jacobi, este sistema, si no es un círculo vicioso, tiene con él estrechas relaciones de parentesco.

3.° Existe, por fin, un nuevo método de Jacobi y Mayer, perfeccionado posteriormente por Mayer y Lier, pero ninguno de estos métodos es infalible y definitivo.

No hemos de discutirlos en estos momentos, porque estos problemas de cálculo integral, considerados en su generalidad, no pertenecen á nuestra asignatura.

Lo que queríamos únicamente explicar á nuestros alumnos, es que el teorema de Jacobi, que es muy importante, que es de mucha aplicación, que resuelve el problema de la integración de las ecuaciones de Hamilton en algunos casos, en general no constituye un método infalible, y empleamos la misma palabra que antes.

Las ecuaciones de Hamilton podrán integrarse aplicando el teorema de Jacobi, según el mismo teorema indica, si ha habido manera de encontrar una integral completa de la ecuación de Jacobi.

Que es como si dijéramos: si *en parte*, y valga la palabra, se ha podido resolver esta ecuación diferencial.

***

Sigamos ahora nuestra tarea.

Decíamos, al concluir la conferencia precedente, que hay algún caso en que se simplifica la solución que se desprende del teorema de Jacobi.

Y es aquel en que no entra el tiempo en las ecuaciones de los enlaces, y en que las fuerzas que actúan sobre el sistema se derivan de una función de fuerzas, ó sea de una potencial en que no entra tampoco t.

En estas hipótesis, explicamos en otra conferencla, que al función H que aparece en las ecuaciones de Hamilton no contiene t, y que además es de la forma

$$H = T - U.$$

De modo que H se compone de las p y de las q solamente. Es decir, que para el caso de seis variables, la composición de H es la siguiente:

$$H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3)$$

y, por lo tanto, la ecuación diferencial de Jacobi, será:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3\right) = 0 \qquad (J')$$

Este caso es el que decimos que puede simplificarse.

Sin perjuicio de la aplicación que luego vamos á hacer al teorema de Liouville, y en que la simplificación conduce á la resolución definitiva del problema, por el pronto ocurre que puede hacerse desaparecer la derivada de V con relación á t.

Porque en efecto, imaginemos que á la función V se le da la forma

$$V = -ht + W$$

siendo h una constante arbitraria en la cual se pone el signo — por la comodidad de los resultados, aunque esto es indiferente en el fondo; y en que W es una función de q_1, q_2, q_3, pero no de t: además W contiene las constantes arbitrarias que convengan para nuestro objeto.

Sustituyendo esta expresión V en la ecuación de Jacobi, puesto qne suponemos que en W no entra t, y por lo tanto

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h, \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3} = \frac{\partial W}{\partial q_3}$$

tendremos

$$-h + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3\right) = 0 \qquad (J'')$$

Si encontramos para W una función de q_1, q_2, q_3, y de tres constantes arbitrarias que, para distinguirlas del caso general, las llamaremos α, β, h no siendo, por de contado, ninguno de ellas *adicional*, es decir, que no sea, por ejemplo,

$$W(q_1, q_2, q_3, \beta, h) + \alpha,$$

sino

$$W(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta, h);$$

en este caso es evidente, que habremos encontrado una integral completa de la ecuación de Jacobi, que será el resultado de sustituir en V el valor de W, es decir

$$V = -ht + W(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta, h)$$

y vemos que no entra la t en W.

Que ésta V es una integral completa de *(J')* es evidente.

En primer lugar, si W satisface á *(J'')*, convirtiéndola en una identidad, es claro que V satisfará á *(J')*, pues aquélla se ha deducido de ésta por la sustitución de V.

De modo que este valor de V es una solución; pero tiene tres constantes α, β, h, luego es una integral completa, toda vez que la cuarta constante ya recordarán mis alumnos que es la adicional en

$$W = -ht + W + \text{constante}$$

la cual constante adicional, como ya se indicó, no entra en juego en el teorema.

Y ahora se comprende por qué dijimos que las constantes α, β, h, no debían ser adicionales.

En efecto: si lo fuera por ejemplo α, la forma

$$W(q_1, q_2, q_3, \beta, h) + \alpha$$

sustituída en el valor de V daría

$$V = -ht + W(q_1, q_2, q_3, \beta, h) + \alpha + \text{constante}$$

que es equivalente á

$$V = -ht + W(q_1, q_2, q_3. \beta, h) + \text{constant.}$$

Y como la constante adicional no influye en el teorema, la parte restante

$$V = -ht + W(q_1, q_2, q_3, \beta, h)$$

aunque satisfaga á la ecuación de Jacobi no tiene mas que dos constantes β y h en vez de tres, α, β, h.

De donde resulta que no es una integral completa.

Vemos, desde luego, que en esta hipótesis el problema está simplificado, porque en la ecuación de Jacobi no entran las cuatro derivadas de V, con relación á q_1, q_2, q_3, t, sino tres derivadas tan solo. Ni entran las cuatro derivadas, ni entra t tampoco, y el problema de buscar una integral completa, resulta más sencillo.

Esto, dicho en términos generales: cuando expliquemos el teorema de Liouville, veremos que, en efecto, gracias á esta simplificación, hay casos en que se puede obtener una integral completa, empleando tan sólo cuadraturas.

En resumen, podemos establecer:

Que cuando en las ecuaciones de los enlaces no entra el tiempo y las fuerzas se derivan de una función de fuerzas (que no contenga t), buscando para la ecuación

$$-h + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}, q_1\, q_2\, q_3\right) = 0$$

una integral completa

$$W(q_1, q_2, q_3, \alpha, \beta, h)$$

se tendrá otra integral completa

$$V = -ht + W(q, q, q, \alpha, \beta, h)$$

para la ecuación de Jacobi; y aplicando á ésta el teorema general, las seis ecuaciones siguientes

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial V}{\partial h} = h'$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial V}{\partial q_3} = p_3$$

darán la solución completa de las ecuaciones de Hamilton.

Claro es, que sustituyendo en estas seis ecuaciones el valor de V, aparecerán en función de W y tendremos:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta', \quad -t + \frac{\partial W}{\partial h} = h'$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial q_3} = p_3$$

En breve tendremos ocasión de aplicar esta simplificación.

***

Y pasemos ya al teorema de Liouville. Pero en él hemos de aplicar la teoría de la integración de las ecuaciones en diferenciales totales de primer orden.

Esta teoría debiera yo suponer que la conocen mis alumnos ó mis lectores, porque se explica en todos los tratados de cálculo integral, aun en los más elementales; pero siguien-

do mi sistema de no dejar ningún cabo suelto, si vale la palabra, y de refrescar todas las ideas fundamentales de análisis, abriremos aquí un pequeño paréntesis sobre la teoría á que acabo de referirme, es decir, sobre la Teoría de la integración de ecuaciones en diferenciales totales de primer orden y con diversas variables independientes, que para fijar las ideas, supondremos que son tres: x, y, z.

En el cuadro que presentamos en una de las conferencias precedentes, sobre los varios tipos de ecuaciones diferenciales, que suelen ofrecerse en los problemas de Física Matemática, hablábamos ya de este caso: el de las ecuaciones diferenciales totales, y aun en él comprendíamos dos casos particulares.

Que la ecuación diferencial, representando por V la función y por x, y, z, las variables independientes, fuese de esta forma,

$$dV = f_1(x, y, z)\,dx + f_2(x, y, z)\,dy + f_3(x, y, z)\,dz;$$

en la que en los coeficientes diferenciales no entra la fun ción V; ó de esta otra forma

$$dV = f_1(x, y, z, V)\,dx + f_2(x, y, z, V)\,dy + \\ + f_3(x, y, z, V)\,dz.$$

en la cual los coeficientes diferenciales contienen no sólo las variables independientes x, y, z, sino la función V de estas variables.

Este último caso, que es el general, es más complicado que el primero. Y comparábamos ambas ecuaciones diferenciales, á los dos tipos primero y segundo, que en aquel cuadro habíamos señalado:

$$dy = f(x)\,dx, \qquad dy = f(x, y)\,dx.$$

La primera de estas últimas ecuaciones representa una

cuadratura; la segunda corresponde á un problema mucho más complicado, aún para formas muy elementales de la función f.

Pues bien, de los dos casos de ecuaciones diferenciales totales, sólo necesitamos recordar, para nuestro objeto, el más sencillo, que es el primero.

Consideremos, pues, la ecuación diferencial total de tres variables independientes (y lo mismo podría ser de un número mayor):

$$\partial V = f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz.$$

Integrar esta ecuación es buscar una función $V(x, y, z)$ tal, que satisfaga á la ecuación precedente, convirtiéndola en una identidad.

O de otro modo, que diferenciada con relación á x como variable independiente, dé

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = f_1(x, y, z);$$

diferenciada con relación á y, satisfaga idénticamente á la ecuación

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = f_2(x, y, z);$$

y que del mismo modo se tenga

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = f_3(x, y, z);$$

ó escribiendo abreviadamente estas condiciones

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = f_3$$

Tal es el problema que nos proponemos resolver.

Y anticiparemos esta idea. Que si es posible resolverlo, se resuelve por cuadraturas.

Y puesto que decimos, *si es posible*, esto significa que no siempre lo será; y que para que lo sea, los datos deberán satisfacer á ciertas condiciones.

Aquí los datos son las funciones f_1, f_2, f_3.

Y en efecto, la ecuación

$$dV = f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$$

no siempre es una diferencial exacta.

Fijemos bien las ideas.

Puede existir una relación lineal entre los elementos diferenciales dV, dx, dy, dz, de cuatro variables V, x, y, z, sin que esto signifique que V sea función de x, y, z, en el sentido ordinario de esta palabra.

Por eso en rigor, una relación lineal entre estos cuatro elementos diferenciales dV, dx, dy, dz, ó sea:

$$dV(x, y, z) = f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + \\ + f_3(x, y, z)\, dz.$$

puede ser exacta y puede no significar que V sea función de x, y, z; ó dicho de otro modo, puede no ser una ecuación diferencial total de tres variables independientes.

Ya sobre este problema dijimos algo en las conferencias de otro curso, y llamaba la atención de mis alumnos sobre la diferencia enorme que resultaría para ciertos problemas de la Física, de ser ó no ser ecuaciones en diferenciales totales de primer orden, las ecuaciones diferenciales que allí señalábamos.

Decíamos que estas dos hipótesis, en relación con ciertos fenómenos físicos, podían corresponder á *dos universos completamente distintos;* como si la Naturaleza se trastornase

por no cumplir ciertas ecuaciones fundamentales las condiciones de integrabilidad.

Claro es, que el mundo no se desquiciaba porque las condiciones de integrabilidad no se cumpliesen. Es que á la inversa el cumplirse ó no cumplirse, significaba condiciones distintas *de realidad* en los fenómenos del mundo inorgánico.

Pero continuemos nuestra tarea, rogando que se me dispense esta última digresión, que por haber sido larga, contra mi voluntad dejo incompleta.

***

Para que una ecuación diferencial

$$dV = f_1(x, y, z)\,dx + f_2(x, y, z)\,dy + f_3(x, y, z)\,dz$$

sea ecuación diferencial total de V, como función de x, y, z, es claro que f_1, f_2, f_3, no serán arbitrarias.

Deberá tenerse, según antes explicábamos,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = f_3(x, y, z);$$

es decir, que f_1, f_2, f_3, deben ser las derivadas parciales de V con relación á x, y, z.

Así se obtiene, en efecto, la diferencial total de tres variables

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\partial x + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y + \frac{\partial V}{\partial z}\partial z$$

y por eso resulta

$$dV = f_1\,\partial x + f_2\,\partial y + f_3\,\partial z.$$

Digamos de paso, para evitar confusiones á mis alumnos, que así como para V, que es la función, conviene distinguir

la diferencial total dV (con d alta) de las tres diferenciales parciales ∂V (respecto á x, á y, ó á z: con ∂ redonda) asimismo importa poco emplear una ú otra notación para las diferenciales de x, y, z, que son las variables independientes.

Y continuemos nuestra explicación.

De las tres ecuaciones á que deben satisfacer f_1, f_2, f_3, para que dV sea una diferencial: á saber: de las ecuaciones

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = f_3(x, y, z)$$

se deducen *tres condiciones* á que f_1, f_2, f_3, deben satisfacer.

En efecto, diferenciando la primera con relación á y, y la segunda con relación á x, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x};$$

y, por lo tanto, una primera condición, puesto que los primeros miembros de ambas ecuaciones son iguales.

Primera condición de integrabilidad:

$$\frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x}$$

Del mismo modo, diferenciando la primera con relación á z, la última con relación á x, é igualando los segundos miembros, resulta

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x}$$

de donde, segunda condición:

$$\frac{\partial f_1(x, y, x)}{\partial z} = \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x}.$$

Por último, diferenciando la segunda con relación á z, la tercera con relación á y, é igualando, obtendremos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial y}$$

y la tercera condición será

$$\frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial y}$$

De suerte, que como decíamos antes, para que la ecuación diferencial propuesta sea una ecuación diferencial total de primer orden y de tres variables independientes, f_1, f_2, f_3 no pueden ser arbitrarias, sino que deben satisfacer á *tres condiciones* que escribimos abreviadamente suprimiendo las variables x, y, z, en esta forma, que es la ordinaria

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}: \qquad (C)$$

condiciones que se retienen fácilmente de memoria, observando que los índices 1, 2, 3, y las variables x, y, z, se sustituyen alternadas; y con sólo examinar las fórmulas se comprende lo que queremos decir.

Resulta, en fin, que las tres ecuaciones C son tres ecuaciones de condición y también podemos decir de integrabilidad. O explicado de otro modo, son *necesarias* y *suficientes* para que la ecuación diferencial propuesta sea una diferencial total.

Que son necesarias, acabamos de demostrarlo; que son suficientes vamos á verlo desde luego, porque vamos á explicar un procedimiento para deducir V cuando dichas condiciones de integrabilidad se verifican.

Y mas aún, y esto pocas veces se consigue, vamos á obtener la integral por medio de cuadraturas.

Hemos dicho que, en rigor, la ecuación diferencial total

$$dV = f_1 \partial x + f_2 \partial y + f_3 dz$$

equivale á estas tres

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = f_3.$$

Pero cada una de éstas es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con una sola variable independiente: x en la primera, y en la segunda, z en la tercera, y cada ecuación de estas es integrable por una sola cuadratura.

Así, de la primera

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1(x, y, z) \text{ ó bien } \partial V = f_1(x, y, z) \partial x,$$

considerando como única variable independiente á x, y á y, z como constantes, porque realmente, para esta primera diferencial parcial lo son, tendremos integrando

$$V = \int f_1(x, y, z) \partial x + C$$

en la que C será la constante arbitraria.

Y como para la integración y, z son constantes, C será realmente una función de estas dos variables, es decir,

$$V = \int f_1(x, y, z) \partial x + \varphi(y, z),$$

que para la simetría de la fórmula final no hay inconveniente en ponerla bajo esta forma

$$V = \int_a^x f_1(x, y, z) \partial x + \varphi(y, z)$$

siendo a una constante.

Pues en efecto, el valor de V puede ponerse de este modo: representando por $\alpha(x, y, z)$ la integral indefinida

$$\int f_1(x, y, z)\,\partial x;$$

ó sea

$$\alpha(x, y, z) = \int f_1(x, y, z)\,\partial x,$$

y agregando y quitando $\alpha(a, y, z)$ á V, resulta:

$$V = \int f_1(x, y, z)\,\partial x + \varphi(y, z) + \alpha(a, y, z) - \alpha(a, y, z);$$

ó bien

$$V = \alpha(x, y, z) - \alpha(a, y, z) + \varphi(y, z) - \alpha(a, y, z).$$

Pero los dos primeros términos no son otra cosa que la integral definida de límite superior variable

$$\int_a^x f_1(x, y, z)\,\partial x$$

y los dos últimos constituyen una función arbitraria de y, z, puesto que a es una constante; función que podemos representar por la misma notación φ y resulta, como antes decíamos,

$$V = \int_a^x f_1(x, y, z)\,\partial x + \varphi(y, z)$$

En rigor, esta es la forma de la función V que buscamos; pero no es una forma determinada, toda vez que hasta ahora, φ es una función arbitraria.

Y debe serlo, porque V en esta expresión no cumple más que con una de las tres condiciones: la de que su derivada parcial con relación á x sea f_1. Precisamente de la indeter-

minación de φ hemos de servirnos para que cumpla con las otras dos condiciones. Es decir, para que la derivada de esta V con relación á y sea f_2, y para que su derivada con relación á z sea f_3.

Expresemos dicha segunda condición.

Diferenciando con relación á y, resultará:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} \partial x + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$$

y hemos diferenciado bajo el signo integral con relación á y, porque esta variable no entra en los límites a_1, x de la integración; entra en cambio en el coeficiente diferencial f_1, y suponemos por de contado que puede diferenciarse bajo el signo integral.

Respecto á las singularidades del problema, no podemos ocuparnos en la teoría general.

Ahora bien; la derivada parcial del primer miembro $\frac{\partial V}{\partial y}$ debe ser f_2, luego tendremos

$$f_2(x, y, z) = \int_a^x \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} \partial x + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$$

que nos servirá para determinar φ.

Ahora bien; de las tres condiciones (C) la primera es esta

$$\frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x},$$

luego, bajo el signo integral, podemos hacer tal sustitución y tendremos

$$f_2(x, y, z) = \int_a^x \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x} \partial x + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$$

Antes no podíamos efectuar la integral; ahora sí, porque f_2 está diferenciada con relación á x é integrada respecto á la misma variable; de suerte que, precisamente, la integral será f_2, y tendremos

$$f_2(x, y, z) = \Big[f_2(x, y, z)\Big]_a^x + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$$

ó bien

$$f_2(x, y, z) = f_2(x, y, z) - f_2(a, y, z) + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$$

y simplificando

$$f_2(a, y, z) = \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$$

Mas esta es una ecuación diferencial del tipo más sencillo, es decir, de *una sola variable* y : a_1 es constante por hipótesis y respecto á z, no se ha diferenciado respecto á ella; luego, integrando con relación á y, resultará

$$\varphi(y, z) = \int f_2(a, y, z)\,\partial y + C.$$

Ya hemos precisado algo más la forma de φ. Y es claro que C, que es una constante, se deberá considerar en el caso más general como una función de z, ó sea $C = \psi(z)$; lo cual es evidente y debe ser, porque al diferenciar φ con relación á y, todos los términos en z se anularán, y al integrar hay que restablecerlos; como antes decíamos, respecto á y y z, en la primera integración con relación á x.

Además, podemos poner la integral indefinida bajo forma de integral definida con sólo agregar y restar á ψ una cierta función de z.

Es un artificio análogo al precedente. Y tendremos:

$$\varphi(y, z) = \int_b^y f_2(a, y, z)\,\partial y + \psi(z).$$

Sustituyendo este valor de φ en V, se halla una expresión más precisa de esta función:

$$V = \int_a^x f_1(x, y, z)\,\partial x + \int_b^y f_2(a, y, z)\,\partial y + \psi(z).$$

Tal expresión de V cumple ya con dos de las condiciones generales del problema, porque la hemos formado de modo que cumpla con ellas.

A saber: su derivada con relación á x es f_1, y su derivada con relación á y es f_2.

Ahora nos aprovecharemos de la indeterminación de ψ para que cumpla con la tercera; es decir, para que la derivada de V con relación á z, sea f_3.

Diferenciando, pues, el valor de V con relación á z, tendremos:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \int_a^x \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z}\,\partial x + \int_b^y \frac{\partial f_2(a, y, z)}{\partial z}\,\partial y + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z}$$

Hemos diferenciado bajo el signo integral, porque los límites de las integrales son independientes de z, y porque suponemos que la forma de las f es tal que puede diferenciarse bajo dicho signo integral.

Pero el primer miembro debe ser f_3; luego, para determinar ψ, tendremos la condición

$$f_3(x, y, z) = \int_a^x \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z}\,\partial x + \int_b^y \frac{\partial f_2(a, y, z)}{\partial z}\,\partial y + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z}$$

Ahora bien, las condiciones de integrabilidad (C) nos permiten sustituir bajo los signos de integración en vez de $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ y $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ las derivadas $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ y $\frac{\partial f_3}{\partial y}$, luego

$$f_3(x, y, z) = \int_a^x \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x}\,\partial x + \int_b^y \frac{\partial f_3(a, y, z)}{\partial y}\,\partial y + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z}.$$

Pues basta observar, respecto á la segunda integral, que de la condición general $\frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial y}$ se deduce evidentemente $\frac{\partial f_2(a, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f_3(a, y, z)}{\partial y}$

Tendremos, pues,

$$f_3(x, y, z) = \int_a^x \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x} \partial x + \int_b^y \frac{\partial f_3(a, y, z)}{\partial y} \partial y + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z}$$

y como ya se pueden efectuar las dos integraciones inmediatamente, porque la diferenciación y la integración de f_3 se refieren á las mismas variables x ó y, resultará,

$$f_3(x, y, z) = \Big[f_3(x, y, z)\Big]_a^x + \Big[f_3(a, y, z)\Big]_b^y + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z},$$

ó bien

$$f_3(x, y, z) = f_3(x, y, z) - f_3(a, y, z) + f_3(a, y, z) - f_3(a, b, z) + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z}$$

y simplificando

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = f_3(a, b, z).$$

Esta última ecuación no contiene mas que dos variables: la ψ como función y la z como variable independiente.

Podemos obtener la primera por una simple cuadratura con relación á z, y tendremos

$$\psi(z) = \int f_3(a, b, z) \partial z + C,$$

que por consideraciones análogas á las de los casos anteriores, puede ponerse bajo la forma de integral definida y ni hay necesidad de expresar la constante C si el límite inferior es una constante arbitraria c.

Así, pues,

$$\psi(z) = \int_c^z f_2(a, b, z)\,\partial z;$$

y sustituyendo este valor en el precedente de V, tendremos, por fin, para la integral general de la ecuación en diferencial total propuesta

$$V(x, y, z) = \int_a^x f_1(x, y, z)\,\partial x + \int_b^y f_2(a, y, z)\,\partial y + \\ + \int_c^z f_3(a, b, z)\,\partial z.$$

Fácilmente puede escribirse la fórmula para el caso de un número cualquiera de variables independientes.

Este valor de V es, en efecto, la integral general de

$$dV = f_1\,\partial x + f_2\,\partial y + f_3\,\partial z,$$

porque la hemos obtenido de modo que su derivada con relación á x sea f_1, su derivada con relación á y, f_2 y su derivada con relación á z, f_3.

Y esto mismo puede comprobarse desde luego, lo cual equivaldría á una demostración sintética. Pero no hemos de detenernos en estos ejercicios elementales.

Se ve, desde luego, que V es la integral general porque contiene una constante arbitraria

Verdad es que, aparentemente, son tres a, b, c; pero es fácil demostrar, desarrollando la fórmula, que sólo queda una constante adicional y que las otras desaparecen.

Por ejemplo: desaparece la constante a y la prueba es que diferenciando con relación á a vamos á obtener un resultado idénticamente nulo, teniendo en cuenta por descontado una constante adicional C.

En efecto: diferenciando V con relación á a y por las re-

glas de diferenciación que ya conocemos, se tendrá, suponiendo que se ha agregado C y que C es funciún de a.

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -f_1(a, y, z) + \int_b^y \frac{\partial f_2(a, y, z)}{\partial a} \partial y +$$
$$+ \int_c^z \frac{\partial f_3(a, b, z)}{\partial a} \partial z + \frac{\partial C}{\partial a},$$

y por las condiciones (C) de integrabilidad, tendremos, sustituyendo las dos derivadas, que están bajo el signo integral por sus equivalentes,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -f_1(a, y, z) + \int_b^y \frac{\partial f_1(a, y, z)}{\partial y} \partial y +$$
$$+ \int_c^z \frac{\partial f_1(a, b, z)}{\partial z} \partial z + \frac{\partial C}{\partial a},$$

ó bien

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -f_1(a, y, z) + f_1(a, y, z) - f_1 a, b, z) +$$
$$+ f_1(a, b, z) - f_1(a, b, c) + \frac{\partial C}{\partial a}$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -f_1(a, b, c) + \frac{\partial C}{\partial a}.$$

Determinando C, que es arbitraria, por la ecuación

$$\frac{\partial C}{\partial a} = f_1(a, b, c)$$

resultará

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0.$$

Y como una cosa análoga podemos hacer respecto á b,

resulta que la presencia de cuatro constantes a, b, c, C es aparente.

***

En suma, la diferencial total de primer orden de una función de diversas variables independientes puede integrarse por medio de cuadraturas.

Pero esto es suponiendo, como antes dijimos, que en los coeficientes diferenciales no entra la función V.

Si entrase V, la condición de integrabilidad sería otra y el problema mucho más difícil.

Afortunadamente, para nuestro objeto, no necesitamos considerar mas que ecuaciones diferenciales totales de primer orden, para el caso en que la función no entra en los coeficientes; y en tal caso hemos dado un procedimiento seguro de integración por medio de cuadraturas.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden totales, que vamos á considerar en la conferencia siguiente, pertenecen al mismo tipo de las que hemos considerado hasta aquí.

Su forma será, por consiguiente, ésta:

$$dW = p_1 \partial q_1 + p_2 \partial q_2 \ldots\ldots p_k \partial q_k$$

con las notaciones propias de las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Así, lo que antes llamábamos x, y, z, es decir, las variables independientes, son en la ecuacion anterior q_1, q_2 ..... q_k, y su número es, por lo tanto, k, en vez de ser 3.

Lo que llamábamos f_1, f_2, f_3 se representa en este caso por p_1, p_2 ..... p_k: también en número k; y todas ellas son funciones de las q, que son las variables independientes.

Por último, lo que llamábamos V, ó sea la función, la designamos en este caso por W, á fin de acomodarnos á anotaciones ya de antemano establecidas.

De suerte que la ecuación anterior, escrita de una manera explícita, será:

$$dW(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k) = p_1(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k)\,\partial q_1 +$$
$$+ p_2(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k)\,\partial q_2 + \ldots\ldots p_k(q_1, q_2 \ldots\ldots q_k)\,\partial q_k.$$

Y con esto cerramos esta digresión, que hemos creído necesaria para la mejor inteligencia de lo que sigue.

En la conferencia próxima nos ocuparemos en el teorema de Liouville, como ya he indicado varias veces.

XLV. — Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowski.

(Continuación.)

POR B. CABRERA.

54. *Fuerza ponderomotriz.*—Ya hemos visto que sobre la unidad de carga eléctrica situada en un campo electrostático se ejerce una fuerza mecánica medida por la intensidad del campo $\vec{E}$. Si la carga está en movimiento, y existe, además del campo eléctrico, un campo magnético $\vec{H}$, á la acción anterior se suma otra cuyo valor es $\frac{1}{c}\left|\vec{v}\,\vec{H}\right|$ siendo $\vec{v}$ la velocidad. La existencia de esta fuerza es una consecuencia natural, y pudiéramos decir que necesaria, de la equivalencia entre un elemento de corriente y una carga eléctrica en movimiento: en el primer caso se demuestra experimentalmente que sobre el elemento actúa una fuerza definida por $\frac{dV}{c}\left|\vec{i}\,\vec{H}\right|$; y si reemplazamos $\vec{i}\,d\,\mathrm{V}$ por su igual $\vec{v}\,\rho\,d\,V$, se deduce la expresión escrita arriba, suponiendo que $\rho\,d\,\mathrm{V} = 1$. Por otra parte, la aplicación directa de dicha fórmula al estudio de las partículas electrizadas, en movimiento, que constituyen los rayos catódicos, canales, α, β y δ, han venido á demostrar la exactitud de aquella expresión. Así, llamando F la fuerza ponderomotriz total por unidad de carga, tendremos que

$$\text{V} \qquad \vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c}\left|\vec{v}\,\vec{H}\right|.$$

55. *Energía distribuída en el campo electromagnético. Existencia del éter.*—Supongamos exacto el principio de la

conservación de la energía para los fenómenos electromagnéticos: en tal supuesto, la suma de la potencia suministrada por las fuerzas interiores á un sistema, de la rapidez de variación de su energía y del flujo saliente de la misma á través de la superficie que le limita, es nula. Ahora bien: calculemos la potencia procedente de la fuerza ponderomotriz $\vec{F}$, para la región envuelta por una superficie s y que contiene masas eléctricas de densidad ρ. Su valor será, llamando T el trabajo

$$\frac{dT}{dt} = \int \rho \left(\vec{F}\, \vec{v} \right) d\, V = \int \rho \left(\vec{E}\, \vec{v} \right) dV,$$

puesto que el segundo término de $\vec{F}$, por ser normal á $\vec{v}$, engendra un trabajo constantemente nulo.

Si en lugar de $\rho \vec{v}$ sustituímos su valor deducido de III

$$\rho \vec{v} = \frac{1}{4\pi} \left(c \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

se obtiene

$$\frac{dT}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int \left(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} \right) d\, V - \frac{1}{4\pi} \int \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\, V.$$

Hemos ya demostrado (§ 20) que

$$\operatorname{div} \left| \vec{a}\, \vec{b} \right| = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b},$$

igualdad que nos permite escribir la siguiente:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = - \operatorname{div} \left| \vec{E}\, \vec{H} \right| + \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}$$

y, por ende, en vez de la primera integral la suma

$$- \frac{c}{4\pi} \int \operatorname{div} \left| \vec{E}\, \vec{H} \right| d\, V + \frac{c}{4\pi} \int \left(\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} \right) d\, V.$$

Además, en virtud del teorema de Gauss, podemos convertir la primera de estas integrales en una de superficie

$$-\frac{c}{4\pi}\int \operatorname{div} \vec{E}\,\vec{H}\; dV = -\frac{c}{4\pi}\int_s \left|\vec{E}\,\vec{H}\right| \cdot \vec{ds},$$

y la segunda, por la ecuación IV, se transforma según la siguiente igualdad:

$$\frac{c}{4\pi}\int \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}\, dV = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{H}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\, dV,$$

con lo cual, en definitiva,

$$\frac{dT}{dt} + \frac{c}{4\pi}\int_s \left|\vec{E}\,\vec{H}\right| \vec{ds} + \frac{\partial}{\partial t}\int \left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} + \frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right) dV = 0.$$

Figuran en esta ecuación tres términos, de los cuales el primero es la potencia suministrada por las fuerzas interiores; la segunda, el flujo del vector $\frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}\,\vec{H}\right|$ á través de la superficie límite, y la tercera la variación por unidad de tiempo de la integral de la función $\left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi} + \frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)$ extendida á todo el campo. Si se compara esta ecuación con el enunciado del principio de la conservación de la energía que hemos dado hace un momento, nos vemos compelidos á suponer que existe una cierta energía distribuída en el campo, cuya densidad será

$$\text{VI} \qquad W = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} + \frac{\vec{H}^2}{8\pi},$$

ó sea la suma de una parte correspondiente al campo eléctrico y otra al campo magnético.

En segundo lugar, la fracción de esta energía enviada al

exterior por segundo de tiempo, estaría medida en cada punto de la superficie límite por el flujo elemental del vector

$$\text{VII} \qquad \vec{G} = \frac{c}{4\pi} \left| \vec{E}\, \overset{\frown}{H} \right. .$$

conocido con el nombre de vector de Poynting.

Rechazar la existencia de esa cantidad de energía distribuída en el espacio y capaz de propagarse de un punto á otro, equivale á negar validez al principio de la conservación de la energía cuando se le aplica á los fenómenos electromagnéticos, por lo menos dentro de las ideas clásicas. Dicho se está que los dos términos del dilema son igualmente lógicos; pero es evidente que aceptar el segundo equivale á destruir los cimientos mismos de la ciencia, tal como ha sido edificada en la última centuria, y en estas condiciones se comprende que es *más cómodo* admitir la realidad de aquella energía electromagnética.

Pero la energía se presenta siempre en un sostén material, y de aquí la *necesidad* de admitir la existencia de un medio, un algo que llene la totalidad del espacio, y al cual se ha denominado *éter*. Subrayamos la palabra necesidad para llamar la atención sobre el valor meramente relativo que aquí posee, puesto que, en primer término, somos libres de escoger entre la existencia de una energía electromagnética ó la negación del primer principio de la Energética; y en segundo lugar, aun aceptando este último, la necesidad de aquel medio no está impuesta por los fenómenos mismos, sino por nuestros hábitos mentales.

56. *Propagación del campo electromagnético. Significación de la constante* c. — Acabamos de decir que la energía electromagnética se propaga en el espacio y que su flujo está definido por el vector $\vec{G}$. Veamos según qué leyes tiene lugar esta propagación, y en particular cuál es su velocidad. Para ello consideremos una región del espacio donde no exis-

tan cargas eléctricas, de suerte que $\rho = 0$. En tal supuesto, la ecuación III se convierte en

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Aplicando el operador rot á los dos miembros de esta ecuación, tendremos

$$\operatorname{rot}^2 \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E},$$

de donde teniendo en cuenta que hemos demostrado (§ 21) que

$$\operatorname{rot}^2 \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \triangle \vec{a},$$

y recordando las ecuaciones II y IV, se deduce

$$- \triangle \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Análogamente se deduce de la ecuación IV, teniendo en cuenta las I y III, en el caso en que $\rho = 0$,

$$- \triangle \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Estas dos ecuaciones definen, según es sabido, la propagación de un movimiento ondulatorio con la velocidad c. Y como además la experiencia ha demostrado que este movimiento ondulatorio no es otro que la luz, resulta que la constante c, cuyo valor había permanecido indeterminado, es la velocidad de la luz, ó sea $3 \cdot 10^{10}$ *C. G. S.*

57. *Tensor de Maxwell. Cantidad de movimiento electromagnético. Existencia del éter.*—Volviendo á la ecuación V,

calculemos la acción total sobre un sistema de cargas eléctricas. Esta acción estará dada por

$$\int\int \vec{F}\rho\, dV = \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left|\rho\vec{v}\cdot\vec{H}\right|\right) dV.$$

Sustituyendo en su segundo miembro ρ y $\rho\vec{v}$ por sus valores deducidos de I y III, se obtiene

$$\int \vec{F}\rho\, dV =$$

$$= \int \frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{div}\vec{E}\cdot\vec{E} + \left|\operatorname{rot}\vec{H}\cdot\vec{H}\right| - \frac{1}{c}\left|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\vec{H}\right|\right) dV.$$

Pero una transformación inmediata, y la aplicación de las ecuaciones VII y IV, dan

$$\frac{1}{c}\left|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{H}\right| = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left|\vec{E}\cdot\vec{H}\right| - \frac{1}{c}\left|\vec{E}\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right|$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} - \left|\operatorname{rot}\vec{E}\cdot\vec{E}\right|,$$

de suerte que agregando dentro del paréntesis el término idénticamente nulo div $\vec{H}\cdot\vec{H}$ (II),

$$(a)\quad \int \vec{F}\rho\, dV = \int \frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{div}\vec{E}\cdot\vec{E} + \left|\operatorname{rot}\vec{E}\cdot\vec{E}\right|\right) dV +$$

$$+ \int \frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{div}\vec{H}\cdot\vec{H} + \left|\operatorname{rot}\vec{H}\,\vec{H}\right|\right) dV - \int \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{G}}{\partial t}\, dV.$$

Fijándonos en la primera de las integrales del segundo

miembro, y escribiendo su componente según el eje x, se obtiene

$$\int \left[\operatorname{div} \vec{E} \cdot E_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y \right] dV =$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] dV.$$

Análogamente se deduce para valores de las otras dos componentes

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial x} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) + \frac{\partial}{\partial z} (E_y E_z) \right] dV,$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial x} (E_x E_z) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y E_z) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \right] dV;$$

y otras tres expresiones de igual forma para las componentes de la segunda integral.

Ahora bien; si escribimos

$$p_{xx} = \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{8\pi} (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2),$$

$$p_{yy} = \frac{1}{8\pi} (- E_x^2 + E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{8\pi} (- H_x^2 + H_y^2 - H_z^2),$$

$$p_{zz} = \frac{1}{8\pi} (- E_x^2 - E_y^2 + E_z^2) + \frac{1}{8\pi} (- H_x^2 - H_y^2 + H_z^2),$$

$$p_{yz} = \frac{1}{4\pi} (E_y E_z + H_y H_z),$$

$$p_{zx} = \frac{1}{4\pi} (E_z E_x + H_z H_x),$$

$$p_{xy} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y);$$

estas seis funciones serán las componentes de un triple ten-

sor simétrico $\overleftrightarrow{p}$, de naturaleza análoga al que hemos designado por $\| \vec{q}^2 \|$, cuyo graduante es la fuerza por unidad de volumen que corresponde á los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación (a). Así, pues, en definitiva

$$(b) \qquad \int \vec{F} \rho \, dv = \int \operatorname{grad} \overleftrightarrow{p} \, d\, V - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \, dV.$$

Esta ecuación, traducida al lenguaje vulgar, nos dice que la fuerza total que actúa sobre un sistema de cargas eléctricas se descompone en dos partes. Una, á que se refiere la primera integral del segundo miembro, posee la misma forma que las fuerzas que derivan de una deformación elástica, por lo cual daremos á $\overleftrightarrow{p}$ el nombre de tensor elástico de Maxwell, pues fué este físico quien le introdujo en el estudio del campo electromagnético. La otra, á que responde la segunda integral, recuerda por su forma la fuerza engendrada por el cambio de la cantidad de movimiento, admitiendo que esta última está medida por $\frac{1}{c^2} \vec{G}$.

Obsérvese que en el segundo miembro de la ecuación que nos ocupa no figura ya la densidad de las cargas eléctricas, de suerte que aquellas funciones elásticas y la cantidad de movimiento electromagnético se refieren á cualquier punto del campo. Ello nos conduce también á admitir la existencia del éter.

Pudiera, sin embargo, creerse que si bien las transformaciones que acabamos de hacer son rigurosamente exactas desde el punto de vista analítico, pudieran carecer de significación física precisa, por lo cual conviene que insistamos sobre este aspecto de la misma. El criterio más seguro para reconocer la validez física del segundo miembro, consiste en la comprobación experimental de las consecuencias que de él puedan deducirse. Ahora bien; si suponemos un cam-

po electromagnético limitado por la superficie de un cuerpo absolutamente absorbente, un teorema demostrado en el capítulo anterior nos dice que

$$\int \operatorname{grad} \overleftrightarrow{p}\, dV = \int_s \left| \overleftrightarrow{p}\ \vec{ds} \right|,$$

de suerte que sobre la referida superficie se ejerce una presión cuyo valor está representado por la segunda integral. Esto es, un rayo de luz que cae sobre una superficie absorbente, ejerce una presión; esta presión ha sido demostrada experimentalmente por Lebedev, Nichols y Hull.

Su valor se deduce fácilmente de la expresión del producto $\left| \overleftrightarrow{p}\, \vec{d}\, \vec{s} \right|$. Notemos que en una onda electromagnética $\vec{E}$ es perpendicular á $\vec{H}$ y á la dirección de propagación; además, los valores medios de las energías eléctrica y magnética durante un período, y por consiguiente, para cualquier fenómeno perceptible, son iguales

$$\int_0^T E^2 dt = \int_0^T H^2\, dt,$$

y, además, en cualquier instante

$$\frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 + \frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 = \text{const} = W.$$

Si además tomamos para dirección del eje x la del vector $\vec{E}$, para el y la de $\vec{H}$ y para el z la de propagación, las ecuaciones que definen $\overleftrightarrow{p}$, nos dicen que para cualquier tiempo apreciable

$$\frac{1}{T} \int_0^T p_{xx}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_{yy}\, dt = 0,$$

y además, en todo momento

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0,$$

mientras que

$$p_{zz} = \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 = W,$$

con lo cual el triple tensor $\overleftrightarrow{p}$ se reduce prácticamente al tensor simple $\overleftrightarrow{W}$; de suerte que

$$\left| \overleftrightarrow{p} \, \vec{ds} \right| = W ds \cos (nz),$$

siendo n la normal al elemento ds. Así, pues, la presión que una onda luminosa ejerce sobre un elemento de pared, es igual á la energía por unidad de volumen, multiplicada por el coseno del ángulo de incidencia. Tal es la fórmula que la experiencia confirma.

Pero aceptar esta presión como un hecho experimental, y negar la presencia de una cantidad de movimiento distribuída en el medio; esto es, aceptar el primer término de la ecuación (b) y rechazar el segundo, es tanto como renunciar al principio de la conservación de la cantidad de movimiento ó sus equivalentes el de la igualdad de la acción y la reacción, ó el del movimiento relativo. En efecto; supongamos, con Poincaré, un manantial luminoso colocado en el foco de un espejo parabólico, frente al cual colocamos un cuerpo absorbente; imaginemos, además, que le encendemos en un instante determinado. Inmediatamente después, el espejo sufre una acción de retroceso, mientras la onda avanza en el sentido del eje, sin que esta acción encuentre compensación alguna hasta el momento en que la onda encuentre al cuerpo absorbente. A partir de aquel instante la compensación existe; pero si apagamos después el foco luminoso, la acción de retroceso se anula inmediatamente y la presión sobre el

cuerpo continúa hasta el momento en que llega á él la última porción de luz emitida. Ahora bien; la cantidad de movimiento electromagnético distribuída en el espacio total ocupado por la energía radiante, suministra en todo momento la compensación, pues según la ecuación (b) su variación es igual á la suma de las presiones en el reflector y el cuerpo, de suerte que, mientras éstas se compensan, aquélla permanece constante.

58. *Aberración de la luz.* — Resumiendo lo dicho, la teoría electromagnética clásica supone la existencia de un medio continuo universal, lugar de los fenómenos, cuyo estado queda definido por el conjunto de las ecuaciones ya obtenidas y que agrupamos á continuación:

$$\text{I} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\text{II} \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\text{III} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\vec{v}\right),$$

$$\text{IV} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\text{V} \qquad \vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c}\left|\vec{v}\,\vec{H}\right|,$$

$$\text{VI} \qquad W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2),$$

$$\text{VII} \qquad \vec{G} = \frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}\,\vec{H}.\right|$$

El conjunto de estas ecuaciones bastan para explicar los fenómenos que tienen lugar en un sistema sin movimiento de conjunto, pero conduce á resultados contradictorios si las aplicamos á un sistema dotado de un movimiento de traslación, demostrando que la teoría clásica es incompleta.

Cierto que las discordancias señaladas son de segundo orden respecto á la relación $\frac{v}{c}$ entre la velocidad de traslación y la de la luz; pero los métodos experimentales hoy en práctica son sobradamente sensibles para que no quede duda alguna.

Para poner de manifiesto la existencia de la indicada contradicción, nos fijaremos en el caso de mayor interés, por haber sido el que puso primeramente en evidencia la insuficiencia de la teoría electromagnética.

Hemos dicho que la repetida teoria postula la existencia

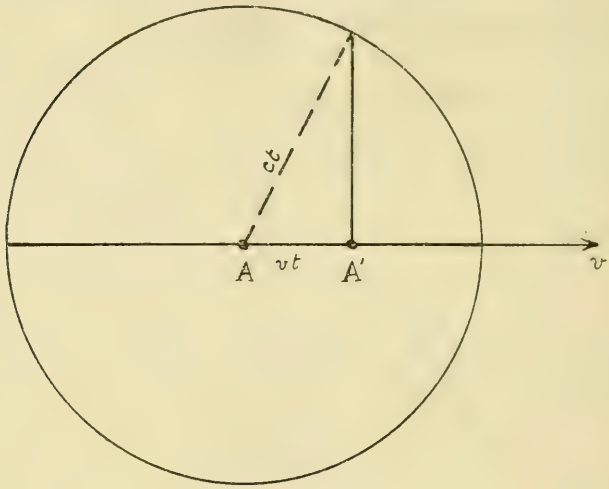


Figura 20.

del éter que llena la totalidad del Universo, penetrando hasta el seno de la materia ponderable. Ahora bien; para un cuerpo en movimiento pueden ocurrir una de las dos cosas siguientes: ó el éter, embebido en él, es arrastrado á la manera como una esponja transporta el agua que ha absorbido, ó por el contrario, queda en reposo absoluto; caso que, si bien no tiene análogo en el movimiento de los cuerpos, en el seno de los flúidos reales es teóricamente

concebible. En el primer supuesto, si en un punto A (fig. 20) del cuerpo se produce una emisión luminosa, la onda esférica engendrada tendrá constantemente por centro dicho punto, y la velocidad de propagación para un observador situado en el interior del cuerpo será independiente de la dirección. En el segundo caso el foco de emisión se alejará del centro de la onda con la velocidad v, y la velocidad de propagación c será

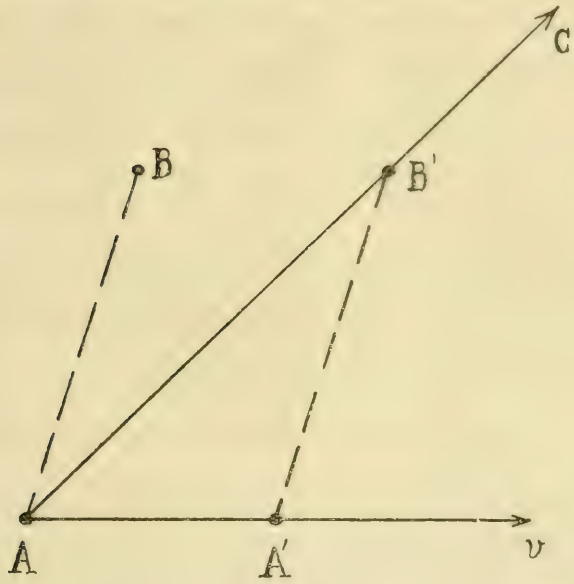


Figura 21.

distinta, según la dirección y el sentido, pues mientras en el sentido del movimiento es $c - v$, en el opuesto será $c + v$ y normalmente $\sqrt{c^2 - v^2}$, según se reconoce inmediatamente mirando la figura. Tenemos, pues, un primer criterio para conocer si el éter es ó no arrastrado por la materia: medir la velocidad de la luz en diferentes direcciones.

Otro criterio para el mismo fin lo suministra el siguiente problema: supongamos un segundo punto B (fig. 21) fijo en el cuerpo, y veamos con qué dirección tiene que ser lanzado

un rayo de A para que encuentre á B. Si el éter es arrastrado por el cuerpo, esta dirección coincide evidentemente con la recta AB; pero si el éter permanece en reposo, mientras la onda va de A á B, este último punto ha pasado á B', de suerte que la dirección de la emisión será la definida por AB', cuyo ángulo con AB crecerá con $\frac{v}{c}$.

Es evidente que si la teoría que discutimos es perfecta, la solución que encontremos aplicando ambos criterios ha de ser la misma. Ahora bien; en contra de esta presunción, vamos á ver cómo cada uno de ellos conduce á un resultado opuesto. Mientras el segundo exige que el éter permanezca en reposo, el primero afirma que es arrastrado.

Comencemos por el segundo criterio. Identifiquemos A con el centro óptico del objetivo de un anteojo, y B con la cruz filar del retículo. Para que un rayo luminoso que llega á A pase por B es necesario que el eje óptico AB del anteojo forme un ángulo con la dirección AB' del rayo: tal es el fenómeno clásico de la aberración de la luz. Luego, según esto, el éter no participa del movimiento del cuerpo, según habíamos anticipado.

Tomemos ahora un rayo, que dividimos en dos mediante cristal A (fig. 22). Ambos continuarán en direcciones perpendiculares hasta llegar á los espejos B y B_1, equidistantes de A, que los envían nuevamente en la misma dirección. Al llegar á A cada uno de ellos se subdivide superponiéndose: consideremos los dos que llevan la dirección AC. Estos rayos formarán un sistema de bandas de interferencia que recogeremos en la pantalla C. Hasta aquí hemos supuesto implícitamente el sistema reposo. Pongámosle ahora en movimiento en la dirección AB con la velocidad v. Si el éter es arrastrado por el cuerpo, las velocidades, según AB y AB_1, serán iguales, y la posición de las franjas en C no cambiarán; pero si el éter permanece en reposo, la velocidad de la luz al ir de A á B será $c - v$, y al volver de B á A, $c + v$, de

suerte que llamando D la distancia común de A á B y á B_1, el tiempo invertido por la luz en el recorrido ABA será

$$T = \frac{D}{c - v} + \frac{D}{c + v} = \frac{2D}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \ldots\ldots\right),$$

mientras que en la dirección AB, perpendicular al movi-

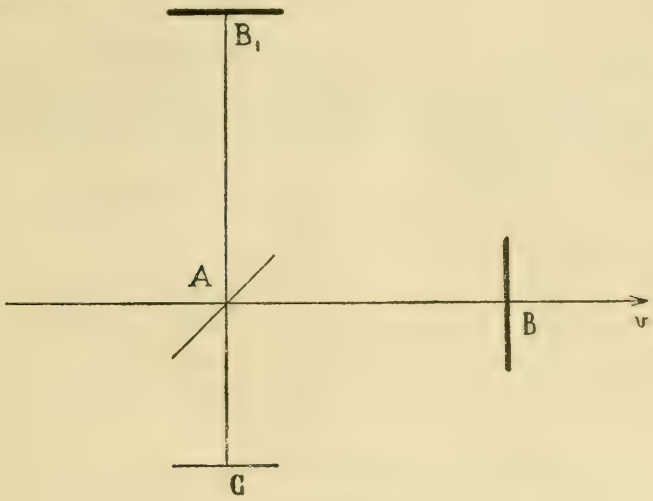


Figura 22.

miento, la velocidad es $\sqrt{c^2 - v^2}$, tanto á la ida como á la vuelta, y el tiempo invertido en el recorrido AB_1A,

$$T_1 = \frac{D}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{D}{\sqrt{c^2 + v^2}} = \frac{2D}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\ldots\right)$$

Luego habrá retardo de una onda respecto de la otra,

$$T - T_1 = \frac{D}{c}\frac{v^2}{c^2}$$

y, por tanto, un corrimiento de las franjas.

Tal es el esquema del experimento de Michelson, en el cual la precisión de los aparatos era suficiente para acusar

una diferencia igual á la centésima de la cantidad prevista, sin que á pesar de ello se notara variación alguna en la posición de las franjas, denotando que, en abierta contradicción con lo exigido por el fenómeno de la aberración, el éter debe ser arrastrado por los cuerpos que se mueven en su seno.

Ahora bien; como decíamos más arriba, el caso que acabamos de señalar no es el único. Existen otras varios experimentos que conducen á la misma contradicción. Y como en dichas condiciones no es posible rechazar los resultados experimentales, debemos concluir que la teoría electromagnética es incompleta.

(Continuará.)

XLVI.—Potencia de las corrientes trifásicas no senoidales.

Por J. A. Pérez del Pulgar. (S. J.)

Profesor de Electrotecnia en el I. C. A. I.

Como las corrientes industriales, á no ser las suministradas por alternadores de construcción especial (*), distan, generalmente. mucho de ser senoidales, el problema de la medida de potencia en redes trifásicas, en el caso general, ha preocupado mucho en estos últimos años á los electricistas, contando ya con una abundante bibliografía. No tratándose la cuestión, en la generalidad de las obras clásicas, sino incompletamente, quizá interesará á algunos tener una idea del resultado de estas investigaciones. Añadiremos algunas observaciones y consecuencias que de ellas creo pueden deducirse.

Aron (**) y Stern (***) han tratado el problema, dando la expresión matemática de la potencia; pero siempre en la hipótesis de que la suma de las tres fuerzas electromotrices trifases era nula. E. Orlich (****) completó estas teorías, observando que esa hipótesis puede no tener lugar, y de hecho, en la práctica, frecuentemente no lo tiene. Una serie de determinaciones experimentales hechas sobre los tipos más corrientes de generatrices y con contadores de todo género han confirmado posteriormente estas teorías, y á este estudio

(*) Véanse *Proceedings of the ann. Inst. of El. Ing.*, tomo XXVIII' año 1909, fascículos 6 y 7, donde C. A. Adams expone las condiciones á que ha de satisfacer el paso de un arrollamiento para disminuir en lo posible los harmónicos.

(**) *Electrotechnische Zeitschrift*, 1901, pág. 215.

(***) Idem, 1901, pág. 267, y 1903, pág. 976.

(****) Idem, 1907, pág. 71.

ha seguido el de las disposiciones del hierro y del cobre de las generatrices más apropiado para hacer desaparecer ó neutralizar los harmónicos, que pueden introducir errores á veces notables.

El problema de la potencia de las corrientes polifásicas presenta una diferencia esencial con respecto al de la medida de corrientes monofásicas. Los valores medios, tanto de la *f · e · m ·* como de la intensidad y la potencia de una corriente monofásica no senoidal, son los mismos que los de otra corriente también monofásica, rigurosamente senoidal y que se llama corriente equivalente. Y como los aparatos de medidas industriales sólo dan valores medios, no trae consecuencias prácticas el considerar en la teoría exclusivamente las corrientes senoidales. En los sistemas trifásicos no ocurre lo mismo. En primer lugar, es preciso, en general, hacer las medidas de la potencia por medio de la *f · e · m ·* é intensidad compuestas; y como las relaciones que ligan á éstas con las simples son distintas, según la forma de las ondas, no pueden éstas suponerse senoidales en el caso general. Además, todos los procedimientos usuales de medida suponen nula la suma de las tres tensiones trifásicas. Esto no es cierto en el caso de corrientes no senoidales, llegando á ser el error, como después veremos, para el caso de alternadores con *f · e · m ·* de forma trapezoidal, hasta más del 40 por 100 de la tensión eficaz compuesta. Y aunque el error en la medida de la potencia, y debido á esta causa, no alcanza, ni con mucho, estos valores, por diversas razones que luego expondremos, dicha observación demuestra que el problema merece ser estudiado de cerca.

Resumiremos, pues, brevemente las propiedades generales de un sistema trifásico no senoidal, limitándonos al estudio de la *f · e · m ·* producida por alternadores provistos de *pares de polos,* y trataremos de dar la expresión general de la potencia deduciendo las condiciones á que han de satisfacer las generatrices trifásicas para que la energía por

ellas producida pueda ser medida sin error por los procedimientos usuales.

I

ESTUDIO GENERAL DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS

Recordaremos, ante todo, que pudiéndose desarrollar toda función periódica en serie de Fourrier en la forma

$$y = f(wt) = C_o + A_1 \operatorname{sen} wt + A_2 \operatorname{sen} 2\,wt + \ldots\ldots + \\ + B_1 \cos wt + B_2 \cos 2\,wt + \ldots\ldots$$

multiplicando los dos miembros por sen nwt, é integrando desde cero hasta

$$T = \frac{1}{F} = \frac{2\pi}{w};$$

siendo T el período, F la frecuencia, y w la velocidad angular del vector, resulta

$$\int_o^T y \operatorname{sen} n\,wt\,dt = A_n \frac{T}{2}$$

de donde

$$A_n = \frac{2}{T} \int_o^T y \operatorname{sen} n\,wt\,dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_o^T y \cos n\,wt\,dt,$$

de donde se deduce que en las fuerzas electromotrices engendradas por generatrices provistas de *pares de polos simétricos* con respecto al plano de conmutación, poniendo $t + \frac{T}{2}$ en lugar de t, y cambia de signo sin cambiar de valor, lo que exige que C_o y todos los coeficientes de *orden par* sean nulos. Luego en este caso único á que limitaremos nuestra atención, las funciones que tenemos que estudiar serán todas de la forma

$$y = A_1 \operatorname{sen} wt + A_3 \operatorname{sen} 3\, wt + \ldots\ldots B_1 \cos wt + \\ + B_3 \cos 3\, wt + \ldots\ldots$$

que también podremos escribir, según el teorema de Fresnel,

$$y = C_1 \operatorname{sen} (wt + \varphi_1) + C_3 \operatorname{sen} (3\, wt + \varphi_3) + \ldots\ldots$$

donde

$$A_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y \operatorname{sen} n\, wt\, dt \quad B_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y \cos n\, wt\, dt$$

$$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2 \qquad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{B_n}{A_n}.$$

Si y es una $f \cdot e \cdot m \cdot$ ó una intensidad, el valor *eficaz* de ella viene dado por la relación

$$Y^2 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y^2\, dt.$$

Recordaremos, por último, que en este caso el factor de potencia no es precisamente el coseno de un decalaje, sino que, siendo E_n I_n los valores máximos de la $f \cdot e \cdot m \cdot$ é intensidad de un harmónico, ψ_n el decalaje entre los vectores que los representan, y K el factor de potencia

$$K = \frac{\Sigma E_n I_n \cos \psi_n}{\sqrt{\Sigma E_n^2} \sqrt{\Sigma I_n^2}}$$

aunque en los casos ordinarios, como ha demostrado Chaumat, este valor difiere poco de $\cos \psi_1$.

Recordadas estas propiedades de las corrientes monofásicas, que evidentemente son aplicables *á cada* una de las fases de un sistema trifásico, consideremos las propiedades especiales de éste.

Un sistema cualquiera de fuerzas electromotrices trifásicas producidas por un alternador puede ser expresado siempre, según lo anteriormente demostrado, del modo siguiente:

$$e_1 = A_1 \operatorname{sen}(wt - \varphi_1) +$$
$$+ A_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3) + A_5 \operatorname{sen}(5\,wt - \varphi_5) + \ldots\ldots$$
$$e_2 = A_1 \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right) +$$
$$+ A_3 \operatorname{sen}\left(3\,wt - \varphi_3 - 3\,\frac{2\pi}{3}\right) + A_5 \operatorname{sen}\left(5\,wt - \varphi_5 - 5\,\frac{2\pi}{3}\right) + \ldots\ldots$$
$$e_3 = A_1 \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 - \frac{4\pi}{3}\right) +$$
$$+ A_3 \operatorname{sen}\left(3\,wt - \varphi_3 - 3\,\frac{4\pi}{3}\right) + A_5 \operatorname{sen}\left(5\,wt - \varphi_5 - 5\,\frac{4\pi}{3}\right) + \ldots\ldots$$

verificando operaciones, este sistema puede escribirse

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= A_1 \operatorname{sen}(wt - \varphi_1) + \\
&+ A_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3) + A_5 \operatorname{sen}(5\,wt - \varphi_5) + \ldots\ldots \\
e_2 &= A_1 \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right) + \\
&+ A_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3) + A_5 \operatorname{sen}\left(5\,wt - \varphi_5 + \frac{2\pi}{3}\right) + \ldots\ldots \\
e_3 &= A_1 \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 - \frac{4\pi}{3}\right) + \\
&+ A_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3) + A_5 \operatorname{sen}\left(5\,wt - \varphi_5 + \frac{4\pi}{3}\right) + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} [A]$$

donde es de advertir que una elección conveniente del origen de los tiempos puede hacer $\varphi_1, = 0$. El sistema $[A]$ demuestra que los harmónicos de orden 3.º, 6.º, 9.º, etc., son idénticos y sincrónicos en las tres fases, y que los restantes constituyen grupos trifásicos.

Las intensidades instantáneas simples vienen dadas, en general, por el sistema

$$\left.\begin{aligned}
i_1 &= I_1 \operatorname{sen}(wt - \varphi_1 + \psi_1) + \\
&\quad + I_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3 + \psi_3) + \ldots\ldots \\
i_2 &= I'_1 \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 + \psi'_1 - \frac{2\pi}{3}\right) + \\
&\quad + I'_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3 + \psi'_3) + \ldots\ldots \\
i_3 &= I''_1 \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 + \psi''_1 - \frac{4\pi}{3}\right) + \\
&\quad + I''_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3 + \psi''_3) + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} [B]$$

sistema que goza de la misma propiedad fundamental que el [A].

Las intensidades máximas y los decalajes son, en general, desiguales, siendo sólo iguales en los sistemas equilibrados. En todo caso es

$$I_n = \frac{A_n}{\sqrt{R_n^2 + \left(nL_n w - \dfrac{1}{nc_n w}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \psi_n = \frac{L_n n w - \dfrac{1}{nc_n w}}{R_n}$$

De las ecuaciones [A] y [B] se desprenden las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
e_1 + e_2 + e_3 &= 3E_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3) + \\
&\quad + 3E_g \operatorname{sen}(9\,wt - \varphi_g) + \ldots\ldots = 3M \\
i_1 + i_2 + i_3 &= 3\,I_3 \operatorname{sen}(3\,wt - \varphi_3 + \psi_3) + \\
&\quad 3\,E_g \operatorname{sen}(9\,wt - \varphi_g + \psi_g) + \ldots\ldots = 3N
\end{aligned}\right\} [C]$$

$$\left.\begin{aligned}
e_1 - e_2 &= E_1\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 + \frac{\pi}{6}\right) + \\
&\quad + E_5\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(5\,wt - \varphi_5 + \frac{\pi}{6}\right) + \ldots\ldots \\
i_1 - i_2 &= I_1\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(wt - \varphi_1 + \psi_1 + \frac{\pi}{6}\right) + \\
&\quad + I_5\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(5\,wt - \varphi_5 + \psi_5 + \frac{\pi}{6}\right) + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} [D]$$

y sus análogas.

II

CONEXIÓN EN ESTRELLA

Supuesto que exista hilo neutro, por él circulará una corriente igual á $3N$, de donde puede deducirse un método para ensayar si la forma de la *f. e. m.* es ó no senoidal. Bastará para ello intercalar un frecuencímetro en el hilo neutro, y supuestas las tres fases equilibradas, habrá desaparecido el período fundamental, y en cambio tendremos como vibración fundamental la del tercer harmónico, es decir, que el frecuencímetro marcará una frecuencia triple de la fundamental en el sistema trifásico. En el caso que no se dispusiese de un frecuencímetro de escala suficientemente extendida, bastaría certificarse, por medio del frecuencímetro, de que el sistema estaba perfectamente equilibrado, y entonces intercalar un amperímetro suficientemente sensible, el cual marcaría la intensidad $3N$ debida á los harmónicos. Esta observación puede también ponernos en guardia contra el error que consistiría en atribuir el paso de una corriente por el hilo neutro, á falta de equilibrio entre las fases, pues, como vemos, puede ser también originada por una irregularidad en la forma de la $f \cdot e \cdot m \cdot$.

También se deduce de lo dicho que en los sistemas inductivos las corrientes que circulan por el hilo neutro son de poca intensidad, por la gran reactancia de dichos sistemas para corrientes de frecuencia al menos triple que la fundamental; pero que no ocurre lo mismo cuando se trata de sistemas provistos de resistencias óhmicas solamente, como, verbigracia, en el caso de instalaciones de alumbrado.

Si no existe hilo neutro, el potencial del centro de la estrella oscila, aun en el caso de sistemas completamente equilibrados; pero las tres corrientes M sincrónicas y de igual intensidad se destruyen, hallándose las tres corrientes com-

puestas desprovistas de los harmónicos de orden múltiplo de 3. En este caso, las intensidades compuestas son:

$$y_1 = i_1 - N; \quad y_2 = i_2 - N; \quad y_3 = i_3 - N$$

siendo siempre, con arreglo á la ley de Kirchhoff,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Vamos á determinar la potencia que circula por este sistema de conductores en función de las intensidades y *f. e. m.* compuestas. Para ello se tiene, designando por p la potencia instantánea,

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 = (v_1 - v_0) i_1 + (v_2 - v_0) i_2 + \\ + (v_3 - v_0) i_3;$$

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 - v_0 (i_1 + i_2 + i_3),$$

donde v_0 representa el potencial absoluto del punto neutro; y como

$$i_3 = (i_1 + i_2 + i_3) - i_1 - i_2$$

sustituyendo resulta

$$p = i_1 (v_1 - v_3) + i_2 (v_2 - v_3) + \\ + v_3 (i_1 + i_2 + i_3) - v_0 (i_1 + i_2 + i_3),$$

$$p = i_1 (v_1 - v_3) + i_2 (v_2 - v_3) + \\ + (v_3 - v_0) (i_1 + i_2 + i_3). \qquad [E]$$

Si no existe hilo neutro, ó si, aun existiendo él, el sistema es rigurosamente senoidal y, además, rigurosamente equilibrado

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

la potencia total vendrá dada por la suma de las lecturas hechas en dos vatímetros por el procedimiento ordinario. En todo otro caso, esta suma será menor que la energía total, cometiéndose un error por defecto igual á

$$\frac{1}{T}\int_o^T (v_3 - v_0)(i_1 + i_2 + i_3)\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_o^T e_3\,(i_1 + i_2 + i_3)\,dt.$$

Pero, además del caso citado, existe otro en que esta integral es distinta de cero; á saber: cuando, aun estando perfectamente equilibradas las fases, la $f \cdot e \cdot m \cdot$ no tiene una forma senoidal. En efecto, entonces

$$i_1 + i_2 + i_3 = 3N$$

y la integral toma la forma

$$\frac{3}{T}\int_o^T N e_3\,dt.$$

N no contiene mas que harmónicos de orden múltiplo de 3. Por el contrario, e_3 los contiene todos. Pero al limitar la integral se anulan todos los términos de la forma

$$E_n \operatorname{sen}(nwt + \alpha)\, I_m \operatorname{sen}(mwt + \beta),$$

y sólo quedan los de la forma

$$E_n \operatorname{sen}(nwt + \alpha)\, I_n \operatorname{sen}(n\,wt + \beta).$$

Esto significa que los errores en las lecturas del vatímetro ó contadores sólo provienen de los harmónicos de orden múltiplo de 3. *Estos son, pues, los que hay que evitar en los alternadores destinados á instalaciones trifásicas con hilo neutro, sobre todo si están destinadas al alumbrado.*

Por lo que hace á los dos primeros términos de la potencia instantánea $[E]$, también contienen términos de la forma

$$E_n\, I_m \operatorname{sen}(n\,wt + \alpha) \operatorname{sen}(m\,wt + \beta)\,dt,$$

los cuales no aparecen en la potencia media por anularse al limitar la integral entre o y T, y sólo quedan los restantes, tomando la integral total de la potencia media la forma

$$P = \sqrt{3}\,\Sigma E_n I_n \cos\left(\frac{\pi}{6} \pm \psi_n\right) + \frac{3}{T}\int_0^T N e_3\, dt,$$

donde n es un número impar no múltiplo de *tres*, y anulándose la última integral siempre que no exista hilo neutro ó que las $f \cdot e \cdot m \cdot$ tengan una forma rigurosamente senoidal.

Resumiendo, resulta, pues, que en las conexiones en estrella con hilo neutro las indicaciones de los dos vatímetros y de los contadores fundados en el mismo principio vienen afectadas de un error por defecto, debido exclusivamente á harmónicos de orden múltiplo de 3. Que si no existen dichos harmónicos ó no existe hilo neutro, el procedimiento de los dos vatímetros mide exactamente la potencia para una forma cualquiera de la $f \cdot e \cdot m \cdot$, y que los primeros harmónicos que tienen influencia en la potencia son los de orden *quíntuplo,* quedando las corrientes compuestas automáticamente libres de harmónicos de orden múltiplo de 3 lo mismo que las tensiones compuestas.

III

CONEXIÓN EN TRIÁNGULO

Las propiedades de este sistema son del todo correlativas con las del sistema en estrella. Dentro del triángulo existe una fuerza electromotriz igual á $3M$ que, en general, produce una corriente en corto, pero de pequeña intensidad, en un sistema inductivo, por no contener $3M$ sino harmónicos de orden múltiplo de 3. Las corrientes que circulan por los hilos de línea están, por el contrario, automáticamente desprovistas de dichos harmónicos.

Las fuerzas electromotrices compuestas son, pues, respectivamente, $e_1 - M$, $e_2 - M$, $e_3 - M$, y las intensidades compuestas son, con arreglo á las leyes de Kirchhoff,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= i_1 - i_3 \\ y_2 &= i_2 - i_1 \\ y_3 &= i_3 - i_2 \end{aligned}\right\} \qquad [F]$$

La potencia instantánea es, pues, siendo v_1, v_2, v_3 los potenciales de los hilos de línea,

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 = (v_1 - v_2) i_1 + (v_2 - v_3) i_2 + \\ + (v_3 - v_1) i_3 + M\Sigma i;$$

$$p = v_1 (i_1 - i_3) + v_2 (i_2 - i_1) + v_3 (i_3 - i_2) + M\Sigma i$$

$$p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + M\Sigma i;$$

y como sumando ordenadamente las ecuaciones $[F]$ resulta que

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

tenemos, por último,

$$p = y_1 (v_1 - v_3) + y_2 (v_2 - v_3) + M\Sigma i \qquad [G]$$

El procedimiento de dos vatímetros está, pues, en este caso, siempre afectado de un error por defecto, que puede ser grande en sistemas no inductivos. La potencia media

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T y_1 (v_1 - v_3)\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T y_2 (v_2 - v_3)\, dt - \\ + \frac{1}{T}\int_0^T M\Sigma i dt$$

se presta á consideraciones idénticas á las que hemos hecho para el caso de la conexión en estrella.

IV

MÉTODOS DE BRAGSTAD Y ORLICH PARA EL ENSAYO DE ALTERNADORES TRIFÁSICOS

Hemos visto que si un alternador produce una $f \cdot e \cdot m \cdot$ trifase que posea harmónicos de orden múltiplo de 3, las medidas de potencia efectuadas por el procedimiento de los dos vatímetros, ó por medio de los contadores del tipo Aron, vienen afectados de un error que, en el caso de la conexión en estrella, y para un sistema equilibrado y con hilo neutro, es

$$\frac{3}{T}\int_0^T Ne_3\,dt,$$

y en la conexión en triángulo es siempre

$$\frac{3}{T}\int_0^T MI\,dt.$$

De las ecuaciones [E] y [G] y de las análogas obtenidas por permutación circular es fácil obtener, sumando dos de ellas ó las tres, los errores que cometen otros contadores de las casas A. E. G. y Siemens Halske (*), fundados en las fórmulas que de dichas operaciones resultan.

Estos errores no significan siempre lo mismo, aunque siempre son en perjuicio del productor. En un alternador cuyo inducido está conectado en triángulo, el error antes mencionado se reduce á una disminución del rendimiento del alternador, aunque los contadores y vatímetros marcan la energía que efectivamente se sumnistra al consumidor, por salir del alternador las tres fases desprovistas ya de harmónicos de orden múltiplo de 3. Por el contrario, un alternador cuyo inducido está conectado en estrella y con hilo neutro, suministra al abonado una energía mayor que la marcada por los contadores de los tipos indicados. Por último, en un alternador con el inducido conectado en estrella y sin hilo neutro se hallan automáticamente eliminados estos errores.

Por lo que hace al modo práctico de determinarlos, Bragstad recomienda el uso de un vatímetro con el circuito amperimétrico intercalado en el hilo neutro, y el voltimétrico

(*) El contador Siemens Schuckert, modelo D5, con hilo neutro, fundado en la medida de la potencia por tres vatímetros, puede estar exento de todos estos errores si el hilo neutro se mantiene constantemente á un potencial nulo, ó al menos constante, á todo lo largo de él.

En los demás casos, también este contador está afectado de un error.

puesto entre éste y un punto neutro artificial formado por tres resistencias idénticas derivadas de las tres fases. Las medidas efectuadas por este procedimiento dan hasta un 2,5 por 100 de la energía total en los alternadores antiguos, y no bajan del 0,5 al 1 por 100 en la generalidad de los tipos corrientes.

Orlich propone en el artículo antes citado otro procedimiento muy ingenioso, pero más difícil de realizar en buenas condiciones, porque el orden de los errores que se cometen, alcanza fácilmente á ser el de las magnitudes medidas.

De la teoría arriba establecida se desprende fácilmente según las leyes de Kirchhoff, que

$$\left.\begin{aligned} v_1 - v_2 &= e_2 - e_1 \\ v_2 - v_3 &= e_3 - e_2 \\ v_3 - v_1 &= e_1 - e_3 \end{aligned}\right\}$$

y como $e_1 + e_2 + e_3 = 3M$, llamando E_a, E_b, E_c á las tensiones eficaces compuestas, y $E_1\,E_2\,E_3$ á las simples (conexión en estrella), y haciendo

$$E_1^2 + E_2^2 + E_3^3 = E_*^2; \quad E_a^2 + E_b^2 + E_c^2 = E_\Delta^2,$$

las tres primeras ecuaciones nos dan

$$\begin{aligned} E_a^2 &= E_2^2 + E_1^2 \\ E_b^2 &= E_3^2 + E_2^2 \\ E_c^2 &= E_1^2 + E_3^2 \end{aligned}$$

Y la última da, designando por E_0 la tensión eficaz de $3\,M$,

$$E_0^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$$

Sumando

$$E_0^2 = 3E_*^2 - E_\Delta^2.$$

En alternador trifásico de $f \cdot e \cdot m \cdot$ trapezoidal, y operando en vacío obtuvo Orlich

$$E_{\ast} = 71.3 \text{ voltios.}$$
$$E_{\Delta} = 118.8 \quad »$$

de donde sale

$$E_0 \quad 58.5 \quad »$$

En otra máquina disimétricamente cargada obtuvo para

$E_1 = 63.9$ voltios.	$E_a = 107.8$ voltios.
$E_2 = 63.0$ »	$E_b = 109.6$ »
$E_3 = 62.7$ »	$E_c = 110.2$ »

de donde resultó $E_0 = 146$ voltios.

Estos resultados deben poner en guardia contra los errores cometidos en las medidas que se efectúan sobre corrientes de forma no senoidal.

Sacaremos, por último, como consecuencia de todo lo dicho, que, en igualdad de todas las demás circunstancias, los alternadores trifásicos en estrella y sin hilo neutro, son superiores á todos los demás; y cualquiera que sea la forma de su $f \cdot e \cdot m \cdot$, se prestan sin error á la medida por los procedimientos ordinarios. Es de advertir aquí que en las instalaciones en que se hace uso de transformadores, basta suprimir el hilo neutro entre el centro de la estrella del alternador y el del primario del primer transformador para que toda la red quede libre de harmónicos de orden múltiplo de 3, y, por tanto, para que la energía pueda ser medida sin error por los procedimientos usuales, y esto *aunque el circuito secundario esté provisto de hilo neutro*, como debería estarlo siempre por razones de seguridad en los transformadores destinados á alimentar directamente motores ó lámparas.

Madrid, 1.º de Junio de 1913

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

Págs

Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1912.

Académicos de número..... 5

Académicos electos..... 6

Académicos Corresponsales nacionales..... 7

Académicos Corresponsales extranjeros..... 8

Conferencias sobre Física Matemática. Teorías diversas, por *José Echegaray.* (Conferencias 17.ª á 21.º). 11, 41, 67, 179 y 209

Fototropía y fotoluminescencia, por *Jos Rodríguez Mourelo.* 101

Constitución, análisis y preparación, con riqueza dada en SO_3. del ácido sulfúrico fumante, por *José Prats Aymerich*..... 110

Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general, por *Antonio Torroja y Miret* 147, 242, 345 y 441

nforme acerca de la obra de D. Antonio López Perea, titulada Marcas.—Cálculo práctico para determinar la hora de la Pleamar». Ponente: *Vicente Ventosa*..... 161

Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray.* (Conferencias 1.ª á 14.ª). 257, 274, 357, 376, 461, 549, 574, 645, 725, 748, 821, 853, 911 y 935

Método para la extracción de raíces de los números sin el auxilio de logaritmos, por *Vicente Ventosa*..... 292

Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkowski, por *B. Cabrera*..... 326, 398, 490, 604, 670, 775, 874 y 959

Geometría Analítica, incluyendo las tendencias ó direcciones de las cantidades, por *Modesto Domínguez Hervella.* 420, 509, 785 y 888

Pág.

La luz ultra-violeta y sus aplicaciones en microscopia, con un resumen de los trabajos hechos en el laboratorio del autor durante el año 1911 y primer semestre de 1912, por *Domingo de Orueta*..... 530, 620, 686 y 804

Programa de premios para el Concurso de 1914..... 545

Dilárido (Ins. New.) fósil y tribu nueva de Diláridos, por el *R. P. Longinos Navás, S. J.*..... 642

Potencia de las corrientes trifásicas no senoidales, por *J. A. Pérez del Pulgar, S. J.* 975

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XLIII.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia décimatercera..... 911

XLIV.—Conferencias sobre Física Matemática. Ecuaciones de la Mecánica, por *José Echegaray*. Conferencia décimacuarta..... 935

XLV.—Principios fundamentales de análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el universo de Minkoswki (continuación), por *B. Cabrera*..... 959

XLVI.—Potencia de las corrientes trifásicas no senoidales, por *J. A. Pérez del Pulgar (S. J.)*..... 975

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01224 1600